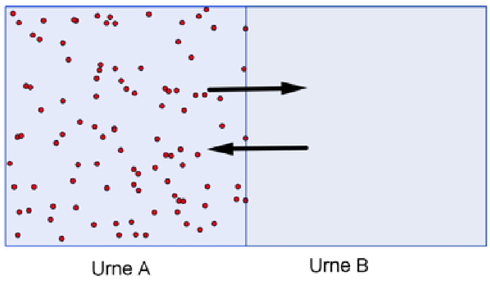
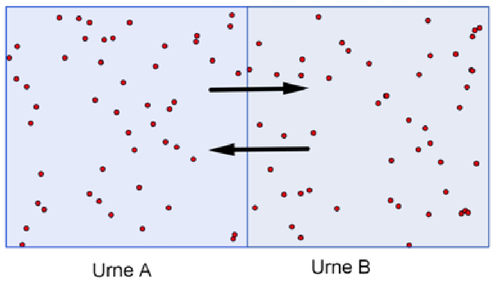
LE MODÈLE D'URNES D'EHRENFEST

TI-83 Premium CE

1. Le cadre

Le modèle d'urnes d'Ehrenfest a été proposé en 1907 par deux physiciens autrichiens, Tatiana et Paul Ehrenfest, pour simuler la diffusion d'un gaz à travers une membrane poreuse. On se donne deux urnes, A et B, et *N* boules, initialement toutes dans l'urne A. À intervalle régulier, une boule est choisie au hasard parmi les *N* boules et est changée d'urne.





Intuitivement, on conçoit qu'au bout d'un certain temps, un état d'équilibre s'établit, avec à peu près la moitié de boules dans chaque urne. La situation semble irréversible et notamment, on ne s'attend pas à un retour à l'état initial au fil du temps. Pourtant, les équations qui régissent le phénomène sont pleinement réversibles et c'est bien ce qui intriguait les physiciens de l'époque.
Comment une évolution microscopique réversible peut-elle produire une évolution macroscopique irréversible ?
Nous nous proposons de simuler ce modèle d'urne à la calculatrice et de tenter d'apporter, à l'aide des résultats, obtenus un éclairage au problème posé.

2. Une simulation de ce modèle

1) On suppose que les *N* boules sont toutes initialement dans l'urne A. On souhaite simuler le transfert des boules d'une urne à l'autre à l'aide de l'algorithme suivant, encore incomplet, écrit en langage TI-Basic :

```
Prompt N
Prompt E
N→A
EffListeL6
E→dim(L6)
N→L6(1)
For(I,2,E)
nbrAléatEnt(1,N)→T
If T≤A
Then
................
Else
................
End
A→L6(I)
End
Disp L6
```

a) Quelles sont les entrées de cet algorithme ? Que représentent-elles ?

b) Que représente la variable A dans ce programme ?

c) Que renvoie l'instruction **nbrAléatEnt(1,N)** ?

d) Comment compléter la ligne qui suit **Then** et celle qui suit **Else** concernant l'évolution de la variable A ?

e) Saisir le programme sur la calculatrice en l'appelant **EHR** et observer ce qui se passe avec différentes valeurs de N (par exemple 100, 200, 500). Observer notamment les dernières valeurs de la liste [L6] et dire comment semble évoluer le nombre de boules dans l'urne A par rapport au nombre initial.

2) Pour mieux visualiser l'évolution du nombre de boules dans l'urne A, on peut en demander une représentation graphique sous forme d'un nuage de points reliés par des segments (type **polygone** sur la calculatrice).

a) Modifier le programme précédent pour que la calculatrice représente graphiquement un nuage de points reliés par des segments, points dont l'abscisse donne le numéro de l'étape et l'ordonnée le nombre de boules dans l'urne A. On commencera par définir dans la liste [L5] les entiers de 1 à E et on règlera ensuite la fenêtre en affectant aux variables de fenêtres des valeurs appropriées. L'affichage du graphique se fait à l'intérieur du programme à l'aide de l'instruction **Graph1** (faire [2nde] [f(x)], soit [graph stats]) : on met d'abord le type du graphique ([graph stats], **TYPE** et choisir **polygone**), **L₅**, **L₆** puis la marque choisie ([graph stats], **MARQ** et choisir le petit point : choix **4**).

On peut aussi faire tracer la droite d'équation $y = \frac{N}{2}$ avec **DessF N/2** (aller dans [2nde] [prgm]).

b) Tester différentes valeurs de N.

3. Retours à l'état initial ?

1) a) Tester le programme précédent avec $N = 2$ et $E = 50$.
À l'aide du graphique, dire s'il y a eu des retours à l'état initial (2 boules dans l'urne A) et le cas échéant, compter le nombre de retours à l'état initial observé au cours des E étapes.
En déduire le temps d'attente avant un retour à l'état initial.

b) Mêmes questions avec $N = 3$ et $E = 50$, $N = 4$ et $E = 100$, $N = 5$ et $E = 200$.

2) a) Écrire un programme, **EHR2**, à partir de celui qui est proposé en **1. 1)** qui compte au cours de la répétition des E étapes le nombre de retours à l'état initial, c'est-à-dire le nombre de fois où la variable A reprend la valeur N (sans compter l'état initial lui-même).

b) Tester ce programme avec $N = 2$, $N = 3$, $N = 4$, $N = 5$ en prenant $E = 2000$.

c) Si l'on admet que le temps moyen avant un retour à une l'état initial est une puissance de 2, quelle valeur peut-on conjecturer pour $N = 2$, $N = 3$, $N = 4$, $N = 5$?

d) Quelle conclusion peut-on en tirer dès lors que N est très grand ?

4. Étude du cas *N* = 2

On a donc placé initialement deux boules dans l'urne A. L'urne A peut alors se trouver dans trois états possibles :

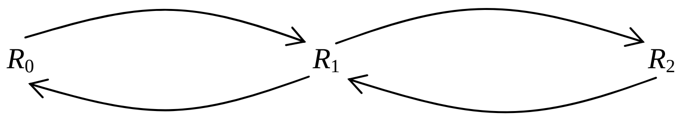
R_0 : « aucune boule dans l'urne A »
R_1 : « une boule dans l'urne A »
R_2 : « les deux boules sont dans l'urne A »

Pour tout entier naturel n, on note X_n la variable aléatoire qui donne le nombre de boules dans l'urne A à la n^e étape. La matrice des probabilités à l'étape n est définie par :

$$U_n = \left(P(X_n = 0) \quad P(X_n = 1) \quad P(X_n = 2)\right)$$

1) Que vaut U_0 ?

2) On considère le graphe probabiliste suivant :



a) Compléter ce graphe avec les probabilités correspondantes : de R_i vers R_j, on met la probabilité de R_j sachant que R_i est réalisé pour i et j distincts variant entre 0 et 2.

b) En déduire la matrice de transition M de ce graphe probabiliste.

3) a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = U_n M$.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $U_n = U_0 M^n$.

4) a) À l'aide de la calculatrice, conjecturer selon la parité de n, l'expression de M^n.

b) Prouver ce résultat par récurrence.

c) Calculer U_1 et U_2, et quelques autres termes de la suite de matrices. En déduire l'expression de U_n lorsque n est pair et lorsque n est impair. Justifier ce résultat.

d) Calculer l'espérance mathématique de X_n.

5) Conclusion de cette étude ?

5. Étude du cas *N* = 4

On a donc placé initialement quatre boules dans l'urne A. L'urne A peut alors se trouver dans cinq états possibles :

- R_0 : « aucune boule dans l'urne A »
- R_1 : « une boule dans l'urne A »
- R_2 : « deux boules dans l'urne A »
- R_3 : « trois boules dans l'urne A »
- R_4 : « quatre boules dans l'urne A »

Pour tout entier naturel n, on note X_n la variable aléatoire qui donne le nombre de boules dans l'urne A à la n^e étape. La matrice des probabilités à l'étape n est donnée par :

$$U_n = \left(P(X_n = 0) \quad P(X_n = 1) \quad P(X_n = 2) \quad P(X_n = 3) \quad P(X_n = 4) \right)$$

1) Que vaut U_0 ?

2) a) Représenter la situation par un graphe probabiliste à 5 sommets correspondant aux 5 états possibles.

b) Donner la matrice de transition M de ce graphe probabiliste.

3) a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = U_n M$.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $U_n = U_0 M^n$.

4) a) En utilisant la calculatrice, calculer U_2, U_4, U_6, U_8. Tenter de conjecturer l'expression générale de U_n.

b) Démontrer cette conjecture par récurrence.

c) Mêmes questions pour déterminer la forme générale de U_n lorsque n est impair.

d) Calculer l'espérance mathématique de X_n.

5) Écrire le système qui permet de déterminer l'état stable de cette situation. Utiliser la touche $\boxed{\text{résol}}$ pour résoudre ce système.

6) Conclusion de cette étude ?