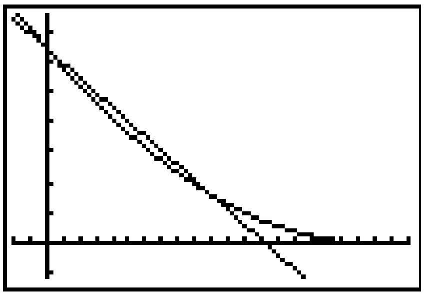
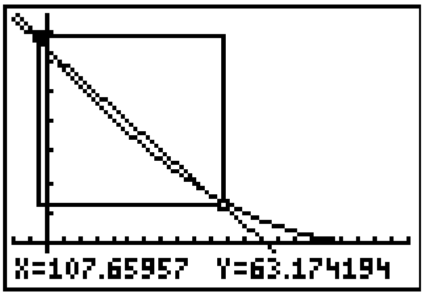
Cahiers T³ Europe
Vlaanderen nr. 36

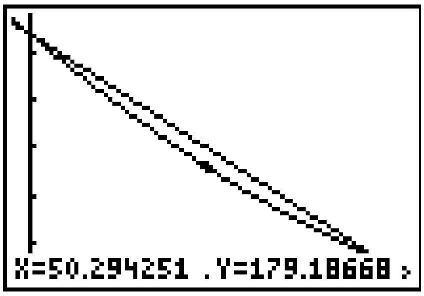
Mathematiseren en oplossen van problemen in de 3de graad kso/tso

Didactische wenken en inspirerende voorbeelden

Geert Delaleeuw







KATHOLIEKE UNIVERSITEIT LEUVEN

INHOUDSTAFEL

Mathematiseren en oplossen van problemen in de derde graad kso/tso

Geert Delaleeuw

‘Mathematiseren en oplossen van problemen’ maakt deel uit van de verplichte leerplandoelstellingen in de derde graad kso/tso. Verspreid over de twee leerjaren van de derde graad bevelen de VVKSO-leerplannen hiervoor 20 lestijden aan in de studierichtingen met leerplan a of b en 15 lestijden in de studierichtingen met leerplan c.

De basisdoelstellingen zijn de volgende:

BASISDOELSTELLINGEN

MA1	Problemen herkennen, analyseren en de probleemstelling verhelderen met behulp van hun wiskundekennis.
MA2	Heuristische methodes gebruiken om een probleem aan te pakken.
MA3	Resultaten interpreteren binnen de context van het gestelde probleem.
MA4	Een reflecterende houding verwerven door gecontroleerd terugkijken op de oplossingsweg en de uitgevoerde berekeningen.
MA5	Vertrouwen verwerven door hun wiskundekennis zinvol in te schakelen.

Voor een algemene situering en de pedagogisch-didactische wenken in verband met dit onderwerp verwijs ik naar de betrokken leerplannen.

1. Leerlijn

Het is wenselijk dat er over de studiejaren heen een traditie groeit van probleemoplossend denken. Dit veronderstelt een groeiproces en een gezamenlijke strategie van alle betrokken leraren. Uiteraard is een keuze van problemen die aangepast zijn aan het niveau van de leerlingen erg belangrijk. Vanuit de vakwerkgroep kan men hiervoor best een leerlijn opstellen.

De geleidelijke kennisopbouw, het ervaren van het gebruik en het zelf toepassen van heuristische methoden (zouden moeten) leiden tot:

- het zoeken naar meerdere oplossingswegen;
- vlotter hanteren van heuristische methoden;
- uitbreiden van heuristische methoden;
- meer gestructureerde aanpak;
- reflectie en controle worden ‘routine’;
- meer zelfstandighed bij ‘probleemaanpak’.

1.1. Eerste graad A

Al in de eerste graad moet er bijzondere aandacht gaan naar probleemoplossende vaardigheden. Vraagstukken moeten over het hele schooljaar gespreid aan bod komen. Het verwerven van probleemoplossende vaardigheden en de bijbehorende aanwending van heuristiek zullen maar gerealiseerd worden doorheen een proces van voortdurende aandacht. Om regelmaat in te bouwen kunnen we bijvoorbeeld werken met een ‘probleem van de week’. Vraagstukken bieden de gelegenheid om een integratie te verwerven van verschillende toepassingen, zoals het gebruik van diagrammen, grafieken … Ook de verschillende rekenvaardigheden (hoofdrekenen, schatten, gebruik van de rekenmachine) moeten hierin geïntegreerd worden.

Het gebruik van een vergelijking is niet de enige methode om vraagstukken op te lossen. De leerlingen beschikken over ruime mogelijkheden binnen het getallenbereik en de gekende bewerkingen om een oplossing uit te werken (bv. de regel van drieën, verhoudingstabellen, percentrekenen). Het is maar door het vergelijken van verschillende oplossingsstrategieën voor eenzelfde probleem dat de efficiëntie van een bepaalde methode opvalt.

Het oplossen van vraagstukken is de gelegenheid bij uitstek om bij leerlingen probleemoplossende vaardigheden te ontwikkelen. Je kunt bijvoorbeeld klassikaal een probleem verkennen. Daarna kun je de leerlingen individueel of in groepjes op het probleem laten zoeken en hen vragen een oplossing uit te werken. Tenslotte formuleren de leerlingen de conclusie(s) en zorgen ze voor een schriftelijke neerslag. Hierover kan er dan een klassikale nabespreking volgen.

Het is belangrijk dat leerlingen vanaf het eerste jaar op een gestructureerde manier en over het gehele schooljaar gespreid problemen leren aanpakken. De zogenaamde beertjes van Meichenbaum visualiseren de te volgen strategie.

Wat moet ik doen?

Hoe begin ik er aan?

Ik voer uit.

Ik bekijk het resultaat.

Als leraar heb je hierbij een voorbeeldfunctie. In de lespraktijk besteed je best voldoende aandacht aan elk van deze fasen.

1.2. Tweede graad

In de eerste graad worden er dus heel wat inspanningen gedaan om de leerlingen stappen te laten zetten in het verwerven van probleemoplossende vaardigheden. Dit proces moet uiteraard verder gezet worden in de tweede graad. In elk leerplan van de tweede graad wordt in de rubriek ‘Vaardigheden en attitudes’ ingegaan op het belang van het verwerven van probleemoplossende vaardigheden.

Het bevorderen van het probleemoplossend denken in de tweede graad kan onder meer door:
- het oplossen van problemen geregeld aan bod te laten komen;
- de fasen van het oplossingsproces duidelijk te expliciteren (zie verder);
- meerdere oplossingen van eenzelfde probleem te bespreken;
- de leerlingen ook te confronteren met opgaven die niet meteen aansluiten bij het onderwerp dat behandeld wordt.

Uiteraard moet hierbij de klemtoon liggen op de haalbaarheid van de problemen en de succeservaring. Differentiatie in de opdrachten is wellicht wenselijk. Zo kunnen wiskundig-sterke leerlingen meer open problemen aangeboden krijgen.

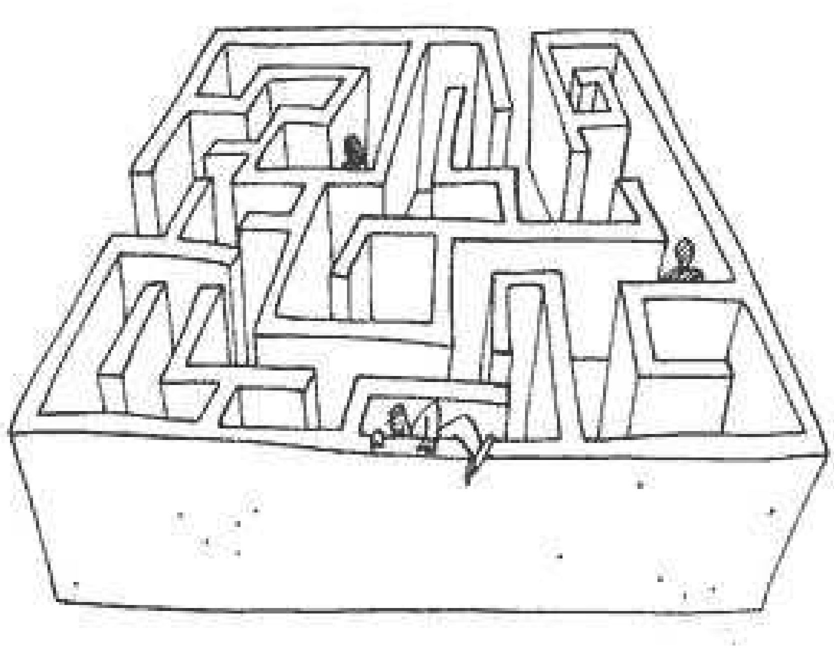
1.3. Derde graad

Deze aanpak moet dan verder gezet worden in de derde graad. Voor de kso- en tso-richtingen behoort het ‘mathematiseren en oplossen van problemen’ zelfs tot de verplichte leerplandoelstellingen. We merken hierbij op dat toepassingen die uiteraard worden gemaakt binnen een bepaald leerstofonderdeel (bijv. matrices, financiële algebra, afgeleiden van veeltermfuncties, exponentiële functies …) niet volstaan om dit onderwerp te realiseren. De bedoeling van dit onderwerp is leerlingen te confronteren met ‘problemen’, opdrachten die voor hen niet meteen een routineoefening betekenen, maar wel een analyse (exploratie) vereisen. Dit zijn opgaven waarbij de leerlingen
- bewust gebruik leren maken van mogelijke oplossingsstrategieën (heuristieken);
- de verschillende fasen van het oplossingsproces duidelijk expliciteren (zie verder);
- een onderzoekende houding aannemen;
- planmatig werken;
- voldoende aandacht hebben voor ‘demathematisering’, interpretatie en reflectie.

Het is de bedoeling om hieraan aandacht te besteden tijdens de lestijden die voorzien zijn voor het ‘mathematiseren en oplossen van problemen’ (20 of 15, naargelang de studierichting). Uiteraard mag ‘problem solving’ niet tot deze lessen beperkt blijven. Het spreekt vanzelf dat de aangeleerde strategieën ook in de ‘gewone’ lessen waar vraagstukken aan bod komen, aangewend worden.

2. Voorbeelden van heuristieken

Bij het oplossen van problemen worden heuristische methoden toegepast, die als doel hebben de leerlingen houvast te bieden om op een gestructureerde manier tot een oplossing te komen. Mogelijke heuristieken zijn bijvoorbeeld:



- het gegeven en het gevraagde expliciteren;
- het systematisch oplijsten van informatie en het zoeken van bijkomende informatie;
- het maken van een figuur, een schema, een lijst, een grafiek, een tabel, een diagram ...;
- op een figuur aanduiden wat men kent en wat men niet kent;
- het zoeken van een patroon in een situatie;
- een rekenregel of een formule gebruiken;
- het probleem oplossen door een vergelijking of een formule op te stellen;
- concrete gevallen onderzoeken, bijzondere gevallen onderzoeken;
- vergelijken met gelijkaardige problemen;
- het probleem vervangen door een eenvoudiger probleem, bv. met kleinere getallen;
- het probleem hertalen of herformuleren tot een ander probleem;
- het probleem opsplitsen in deelproblemen;
- het probleem oplossen door simulatie;
- alle mogelijkheden opschrijven en dan elimineren;
- gebruik maken van symmetrie in het probleem;
- een of meer veranderlijken constant houden;
- een of meer gestelde voorwaarden laten vallen;
- het probleem oplossen door ontkenning;
- werken van achter naar voor, m.a.w. het probleem voorstellen als opgelost;
- het formuleren van een hypothese en die dan toepassen;
- …

3. Stappenplan

In heel wat gevallen kan het nuttig zijn dat we een probleem stapsgewijs oplossen, vooral als de oplossing niet meteen voor de hand ligt.

In de eerste graad kunnen de 'beertjes van Meichenbaum' hierbij een steun betekenen voor de leerlingen.

In de tweede en derde graad is een mogelijke aanpak het gebruik maken van het stappenplan 'exploreren – mathematiseren – berekenen – controleren – demathematiseren'.

We zouden hierbij de volgende toelichting kunnen geven aan de leerlingen.

Stap 1: exploreren

Probeer het probleem goed te begrijpen.
De volgende vragen en opmerkingen kunnen hierbij nuttig zijn.

- Wat wordt er gevraagd? Kun je dat in eigen woorden zeggen?
- Maak eens een figuur, stel een schema op. Wat kan je hieruit leren?
- Formuleer een vermoeden en toets dit aan de opgave.
- Maak onbekenden eens concreet met getalwaarden. Wat tonen de getallen je?
- Gooi de ballastinformatie weg en hou de nuttige informatie over. Het probleem kan hierdoor eenvoudiger worden.
- Splits, indien mogelijk, het probleem op in deelproblemen.
- Is het een bekend probleem? Ken ik een probleem dat er op lijkt?

Stap 2: mathematiseren

Vanuit enkele concrete voorbeelden, die je tijdens het exploreren aangebracht hebt, probeer je nu een wiskundig model op te bouwen. Hierbij hou je het volgende voor ogen.

- Als er onbekenden in het probleem voorkomen, spoor die dan op. Als er meerdere onbekenden zijn, probeer dan (indien mogelijk) de ene onbekende te schrijven in functie van de andere.
- Zijn er wiskundige voorwaarden op te leggen aan de onbekende(n)?
  (positief, verschillend van nul …)
- Welk wiskundig model zal er tevoorschijn komen?
  (een bewerking, een vergelijking, een stelsel vergelijkingen, een extremumvraagstuk, een rechthoekige of een willekeurige driehoek …)
- Kom je wiskundige informatie te kort, zoek die dan op (handboek, eigen notities, formularium) maar verlies hierbij geen onnodige tijd.

Stap 3: berekenen

Als het wiskundig model opgebouwd is, probeer je dit via rekentechnieken op te lossen. Denk hierbij aan het volgende.

- Welke wiskundige bewerking(en) moet(en) uitgevoerd worden?
  (een rekenregel toepassen, een vergelijking of een stelsel oplossen, een extremum zoeken, een hoek zoeken …)
- Welke middelen zijn hier het meest geschikt om de berekeningen uit te voeren?
  (pen en papier, grafische rekenmachine, computer, internet …)
- Werk zo overzichtelijk mogelijk, zodat je naderhand ook nog kunt zien wat je gedaan hebt.

Stap 4: controleren

Controleer je berekeningen en het gevonden resultaat.

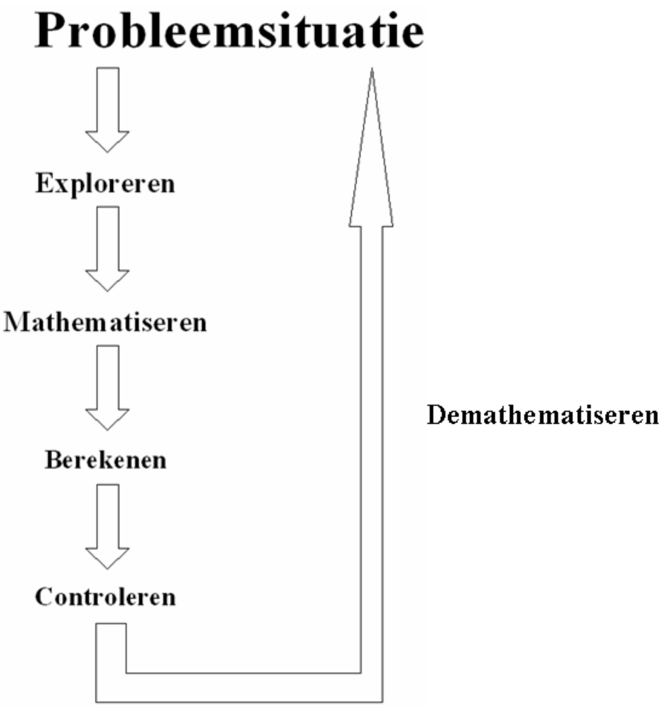
- Voer geconcentreerd je berekeningen uit. Als je met de grafische rekenmachine of de computer werkt, let dan op voor mistikken of misklikken. Controleer elke tussenstap op mogelijke fouten.
- Probeer, indien mogelijk, het antwoord eens op een andere manier te vinden.
- Controleer of je geen informatie over het hoofd gezien hebt.
- Ga na of je resultaat overeenkomt met een eerder gemaakte schatting.
- Heb je soms geen eenheden vergeten of verkeerd gebruikt (meter, liter, gram, …)?
- Bekijk je antwoord kritisch. Kan het antwoord kloppen?
- Wees kritisch en vul bijvoorbeeld je gevonden resultaat niet alleen in in jouw opgestelde formule, vergelijking, … . Dan controleer je immers alleen maar of die formule, vergelijking … correct werden opgelost. Je controleert daar echter niet mee of het vraagstuk correct opgelost is. Het is dus noodzakelijk jouw uitkomst ook te toetsen aan het gegeven vraagstuk en na te gaan of je het gestelde probleem wel degelijk goed opgelost hebt.

Stap 5: demathematiseren

Tenslotte interpreteer je de wiskundige oplossing in de context.

- Is de gevonden waarde realistisch binnen de gestelde context? Misschien is het beter je antwoord af te ronden? Zo ja, hoe?
- Formuleer tenslotte een ondubbelzinnige conclusie.

Schematisch is deze stappenmethode als volgt weer te geven. Heel belangrijk hierbij is de terugkerende pijl! Het is immers van belang het gevonden resultaat ook nog eens te toetsen aan het probleem.



Het is goed achteraf nog eens goed na te denken over de gevolgde oplossingsweg. Probeer hieruit conclusies te trekken naar de aanpak van een eventueel volgend probleem. Zo kun je je wiskundekennis verhogen of beter structureren.

4. Werkvormen en evaluatie in de derde graad kso/tso

Het is wenselijk om gespreid over beide leerjaren van de derde graad aandacht te besteden aan het ‘mathematiseren en oplossen van problemen’ en dit uiteraard ook duidelijk op te nemen in de jaarplanning. Men kan hiervoor best telkens blokjes van een paar lesuren voorzien.

Een aantal opdrachten kan individueel gegeven worden, maar het lijkt zeker ook zinvol om probleemstellingen te behandelen in de vorm van groepstaken. Hierbij zullen leerlingen, weliswaar op hun niveau, over wiskunde en probleemaanpak moeten communiceren. Hiermee zal hun (wiskundige) taalvaardigheid aangescherpt worden en zoals bij elke vorm van groepswerk bestaat hier de kans op (verdere) ontwikkeling van de sociale vaardigheden.

Waar mogelijk laat de leraar best meerdere oplossingswijzen aan bod komen.
Er moet zeker en vast ook voldoende klemtoon gelegd worden op de exploratiefase, de deelstappen, de oplossingsstrategieën, de controle en de reflectie.

Wat het evalueren betreft, lezen we in de leerplannen van de derde graad: *“Dit onderdeel moet uiteraard opgenomen worden binnen de evaluatie. Het zou van een te beperkte visie reflecteren als dit onderdeel alleen zou beoordeeld worden op de uiteindelijke oplossing van een probleem. Permanente evaluatie, begrepen als een permanente feedback op het oplossingsproces, is hier het meest aangewezen.”*

4.1. Evalueren van groepswerk

Indien de leraar de leerlingen in groepjes laat werken, kan hij uiteraard hiervoor aan elke leerling vakgebonden attitudepunten toekennen.

De leraar zou zich hierbij bijvoorbeeld kunnen focussen op drie attitudes: doorzetting, kritische zin en werken in team.

De volgende tabel kan wat inspiratie bieden.

ATTITUDES		Onvoldoende	Voldoende	Goed	Uitstekend
1	DOORZETTING	geeft al bij lichtere moeilijkheden meestal snel op, herhaalt dat gedrag ook na begeleiding	pakt lichte, kortdurende problemen steeds aan, zwaardere en langdurige enkel bij begeleiding	pakt zwaardere en langdurige problemen aan, maar moet hierbij af en toe gestimuleerd worden	zet ook bij zwaardere en langdurige problemen uit zichzelf door tot de oplossing er is
2	KRITISCHE ZIN	neemt de berekeningen en beweringen van anderen klakkeloos over en stelt zich hierbij geen vragen	is kritisch tegenover berekeningen, beweringen en de gevonden oplossing mits aanwijzingen	controleert spontaan berekeningen en beweringen en staat kritisch tegenover de gevonden oplossing	controleert spontaan berekeningen en beweringen, staat kritisch tegenover de gevonden oplossing en formuleert indien nodig voorstellen
3	WERKEN IN TEAM	valt in team negatief op, werkt door passiviteit eerder tegen	werkt voldoende actief mee in het team, stoort de groepswerking niet	werkt actief samen, is aangenaam en behulpzaam, bevordert de teamgeest	is aangenaam en behulpzaam, stuurt het teamwerk efficiënt

4.2. Klassikale bespreking

Afhankelijk van de verrichtingen van de leerlingen tijdens het groepswerk, kan het voor bepaalde oplossingen nuttig zijn dat ze klassikaal besproken worden. Zo kunnen verschillende oplossingswijzen met elkaar vergeleken worden en kunnen er eventuele fouten verbeterd worden.

Indien de leraar het wenst, kan hij ook groepjes of individuele leerlingen enkele oplossingen laten presenteren voor de klas. Deze presentatie kan geëvalueerd worden, zowel naar inhoud als naar vorm.

4.3. Portfolio 'mathematiseren en oplossen van problemen'

Nadat de leerlingen in klas voldoende tijd gekregen hebben om in groepjes te werken aan een opgave, kan de leraar aan de leerlingen vragen om thuis individueel de weerslag van het groepswerk op een nette, overzichtelijke en gestructureerde manier weer te geven. Zo kunnen de leerlingen geleidelijk een portfolio opbouwen waarin hun verwezenlijkingen in verband met mathematiseren en oplossen van problemen in opgenomen zijn.

Ook de klassikaal besproken oplossingen kunnen de leerlingen in dat portfolio bijhouden.

De leraar neemt de portfolio's best af en toe eens door, verbetert ze en geeft de leerlingen hierbij de nodige feedback. Dit kan hij doen aan de hand van een eenvoudige beoordelingsmatrix vergezeld van commentaar en een behaalde score. Bij het toekennen van punten mag het uiteindelijke antwoord op het probleem niet de doorslag geven, maar wel de wijze waarop de leerling met het probleem is omgegaan: het ordevol en gestructureerd werken, de manier waarop hij met de verschillende stappen is omgegaan.

Het kan eveneens nuttig zijn om na verbetering van de oplossingen elke leerling de kans te geven om hierop commentaar te geven. Het afsluiten van een opdracht met een evaluerend terugkijken laat leerlingen immers toe om zelf elementen van evaluatie in te brengen. Het kan hen helpen leren om meer inzicht te krijgen in hun leerproces.

Op de volgende pagina's vind je een blanco beoordelingsblad, een voorbeeld van een door de leraar ingevuld beoordelingsblad *(de naam van de leerling is weggelaten)* en een greep uit commentaren van verschillende leerlingen.

Beoordelingsblad:

Mathematiseren en oplossen van problemen

Onderwerp:

Naam: …………………………………..…….. Klas: ………… Schooljaar: …………….

	– –	–	+	+ +
Exploreren				
Mathematiseren				
Berekenen				
Controleren				
Demathematiseren				

Commentaar van de leraar:

Commentaar van de leerling:

Score:

Beoordelingsblad, ingevuld door de leraar, na verbetering van de opgave ‘lopen en zwemmen’ (zie verder):

Mathematiseren en oplossen van problemen

Onderwerp: Lopen en zwemmen

Naam: …………………………………… Klas: ………… Schooljaar: ……………

	– –	–	+	+ +
Exploreren			X	
Mathematiseren			X	
Berekenen				X
Controleren				X
Demathematiseren		X		

Commentaar van de leraar:

Het exploreren van de opdracht is goed doordacht, maar denk er aan voortdurend een correcte wiskundetaal te hanteren. Let ook op een correct gebruik van de eenheden.
Het mathematiseren is correct, maar de gebruikte symbolen heb je niet altijd goed verklaard.
Bij het berekenen heb je efficiënt gebruik gemaakt van je GRM en de controle is degelijk. Let bij het formuleren van het antwoord wel op een zinvolle afronding.

Commentaar van de leerling:

Score: 7,5 / 10

Een greep uit commentaren van verschillende leerlingen:

Ik ben tevreden over de score, deze is al veel beter dan de vorige keer. Tijdens de paar lessen mathematiseren heb ik geleerd dat een goede exploratie noodzakelijk is. Nu zal ik nog wat moeten letten op de verdere uitwerking. Ik zal wat duidelijker proberen te zijn bij de mathematisatiefase en de verdere berekeningen.
Vooraf hield ik niet zo van vraagstukken, maar nu we in groepjes hebben gewerkt en samen zochten naar een oplossing ~~heb~~ heb ik een heel andere kijk op mathematiseren.
Mathematiseren vind ik leuk. Je kunt je gedachten delen met anderen en samen zoeken naar een oplossing. Het moeilijkste is de start. Je weet niet wat je als onbekende moet nemen, maar eenmaal de start is genomen, loopt de rest vanzelf. Ik hoop dat we nog veel mogen mathematiseren.
Ik vind mathematiseren zeer interessant. Het is eens iets anders dan de gewone lessen. Een vraagstuk oplossen in een groep is iets goeds want je leert samenwerken en ook anderen kennen. Soms zit je zo in een vraagstuk dat je b.v. de bel niet hoort. Er zouden meer zo'n lessen moeten zijn (niet alleen in wiskunde).
Ik werk soms te rap waardoor ik dingen over het hoofd zie en niet meer alles kritisch bekijk. Ik moet mijn werk beter controleren zodat ik foute antwoorden kan vermijden.
Ik moet meer nadenken over wat ik precies bereken / wil berekenen.
Ik zal meer moeten eenheden noteren, zodat ik weet waarmee ik bezig ben. Ook netter werken zal nodig zijn, om een betere structuur te hebben en ook om te weten wat ik precies zoek.

5. Mathematiseren in richtingen met weinig uren wiskunde

5.1. Doelstelling

Leraren die wiskunde geven in kso/tso-richtingen met weinig lestijden wiskunde horen we vaak zeggen dat hun leerlingen het ‘mathematiseren en oplossen van problemen’ niet aankunnen.
Soms voegen ze hier aan toe: “we geven dat niet want ze kunnen het niet”.

De cruciale vraag is waarom die leerlingen dat niet kunnen. Misschien kunnen ze het niet, juist omdat er te weinig aan problemsolving (op hun niveau!) gedaan wordt? Misschien hebben die leerlingen in de eerste en tweede graad onvoldoende de kans gekregen om zich te buigen over (haalbare) problemen en probleempjes?

In het hoger onderwijs (professionele bachelors) wordt er geklaagd over het feit dat studenten er weinig van terecht brengen als ze eenvoudige opgaven krijgen.
In de opleiding lager onderwijs stelt men vast dat sommige leerlingen er niet in slagen om een eenvoudig vraagstuk behoorlijk op te lossen.
Ook als leerlingen niet meer verder studeren en willen solliciteren bij een of andere overheidsdienst, wordt van hen vaak in de selectieproeven verwacht dat ze relatief eenvoudige wiskundeproblemen kunnen oplossen.
Dat we leerlingen na zes jaar secundair onderwijs er niet kunnen toe brengen om eenvoudige vraagstukken vlot op te lossen, stemt ons toch tot nadenken …

Het behoort tot onze opdracht om alle leerlingen, dus ook de kso/tso-leerlingen van de derde graad met een beperkt aantal wekelijkse uren wiskunde, te confronteren met allerlei ‘problemen’. Het volstaat hier niet de toepassingen te maken die een hoofdstuk van de andere leerstofonderdelen afsluiten en waarbij mathematiserings- en oplossingsprocedures tot een voorspelbare routine herleid worden. Het leren gebruiken van heuristieken en het leren kiezen uit verschillende oplossingsstrategieën komen zo niet aan bod. Nochtans wordt hiervoor veel aandacht gevraagd in het leerplanonderdeel ‘mathematiseren en oplossen van problemen’.

De motivatie voor wiskunde is bij kso/tso-leerlingen met weinig uren wiskunde vaak niet groot. Daarom beperken sommige leraren zich in deze richtingen voornamelijk tot het aanleren van ‘technieken’. Technieken aanleren is immers gemakkelijker dan inzicht laten verwerven en het is ook gemakkelijker te evalueren. Het aanleren van zinvolle technieken mag gerust aandacht krijgen, maar het mag daartoe niet beperkt blijven. Daarmee nemen we deze leerlingen niet ernstig. Het is de bedoeling dat de leerlingen, door het oplossen van problemen, zich realiseren dat wiskunde veel meer is dan een stel regels, maar effectief kan ingezet worden om problemen uit het dagelijkse leven op te lossen of tenminste om er inzicht in te verwerven.

Het is dus duidelijk de bedoeling de leerlingen te confronteren met oefeningen die voor hen niet meteen een routineoefening zijn. We moeten de leerlingen confronteren met opgaven die een analyse (exploratie) vereisen, waarbij ze bewust gebruik leren maken van mogelijke oplossingsstrategieën die hen verder op weg kunnen helpen, waarbij de verschillende fasen van het oplossingsproces duidelijk geëxpliciteerd worden, waarbij ruimte wordt gemaakt voor een onderzoekende houding, voor meerdere oplossingswegen, voor planmatig werken en waarbij de fase van ‘demathematisering’ en reflectie voldoende aandacht krijgt.

Aanvankelijk zullen de leerlingen wellicht vrij onwennig staan ten opzichte van ‘open problemen’. Af en toe zal het nodig zijn dat de leraar enkele problemen ‘samen met de leerlingen’ oplost. Maar uiteindelijk moet men toch kunnen bekomen dat de leerlingen individueel of in groep aan probleemoplossend denken doen. Dit gaat dan ook samen met een andere ‘lesstijl’ van de leraar. De rol van de leraar verschuift hier van het ‘overdragen van kennis’ naar het ‘ontwikkelen, begeleiden en coachen van gepaste leerprocessen’ voor de leerlingen.

5.2. Mogelijke onderwerpen

Het kiezen van onderwerpen kan vanuit verschillende invalshoeken gebeuren. We geven enkele suggesties:

- o Problemen die aansluiten bij de leefwereld van de leerlingen, die aangereikt worden binnen andere vakken (in het bijzonder de technische vakken).

- o Problemen vanuit onderwerpen die normaal niet aan bod komen in de betrokken studierichting, maar die wel mogelijkheden bieden tot ‘mathematisering’. We denken hierbij bijvoorbeeld aan eenvoudige telproblemen en kansrekenen. De leerlingen kunnen hierbij gebruik maken van heuristieken door het probleem voor te stellen met behulp van een boomdiagram, een wegendiagram, een rooster … .

- o Problemen vanuit onderwerpen die niet meer aan bod komen in de derde graad en die steunen op basiskennis. Door het mathematiseren en oplossen van deze problemen kan deze basiskennis terug onder de aandacht gebracht worden. We denken hierbij onder andere aan problemen in verband met metend rekenen, meetkundige problemen (vlakke meetkunde, driehoeksmeting …), problemen in verband met regelmaat en patronen, problemen in verband met evenredigheden …

- o Het organiseren en interpreteren van een enquête kan ook bijdragen tot het probleemoplossend denken.

- o Een goed doordachte selectie van allerlei problemen en opdrachten die te vinden zijn
  - in wiskundetijdschriften, leer- en leerwerkboeken;
  - in de Kangoeroe-, JWO- en VWO-wedstrijden;
  - in syllabi van nascholingen;
  - op websites, onder andere: http://www.examenbundel.nl;
  - …

5.3. Voorbeelden

Hieronder staan enkele voorbeelden van concrete probleemsituaties die in richtingen met weinig lesuren wiskunde kunnen aan bod komen. Deze voorbeelden mogen uiteraard in de lessen over ‘mathematiseren en oplossen van problemen’ gebruikt worden. Maar hopelijk werken ze ook inspirerend en zetten ze de leraren aan om zelf goed doordachte opdrachten voor hun leerlingen op te maken. Voor een aantal van die voorbeelden verwijzen we naar werkwinkels van de Dag van de Wiskunde, die jaarlijks in november plaatsvindt op de KU Leuven Campus Kortrijk.

5.3.1 *Inoefenen van heuristieken*

Een mogelijke aanpak zou kunnen zijn dat we de leerlingen aanvankelijk tijdens een aantal lessen problem solving confronteren met een reeks kleinere opgaven waarbij telkens een bepaalde heuristiek in de kijker wordt geplaatst.

We geven ter illustratie voor een aantal heuristieken enkele voorbeelden (deels gebaseerd op de werkwinkel ‘Probleemoplossen kan je leren’ van Bart Windels op de Dag van de Wiskunde tweede en derde graad 2009).

Maken van een figuur, een schema, een lijst, een tabel, een diagram

Voorbeeld 1: de afsluiting
Jan wil de grens met zijn buurman afsluiten met kippengaas. De grens is 30 meter lang en om de 3 meter moet een paal worden geplaatst. Hoeveel palen zijn er nodig?

Oplossing

Een eenvoudige figuur leidt snel tot de vaststelling dat er 11 palen nodig zijn.

Voorbeeld 2: een zwembad
Rond een rechthoekig zwembad van 14 meter bij 40 meter wil men een rechthoekige betegeling maken die overal 6 meter breed is. Wat is de oppervlakte van die betegeling?

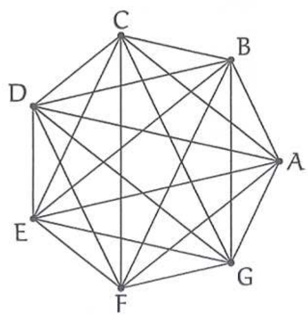
Oplossing

Door een schets te maken van het zwembad en de betegeling, kunnen de leerlingen na enkele eenvoudige berekeningen tot de vaststelling komen dat de betegeling een oppervlakte heeft van 792 m².

Voorbeeld 3: de basketballiga
Er is een nieuwe basketbalcompetitie opgericht met zeven ploegen: de Antilopen, de Beren, de Cheetahs, de Dromedarissen, de Ezels, de Fretten en de Geiten.
Ieder team moet drie wedstrijden spelen tegen elke andere ploeg op een neutraal terrein.
Hoeveel wedstrijden worden er in totaal gespeeld?

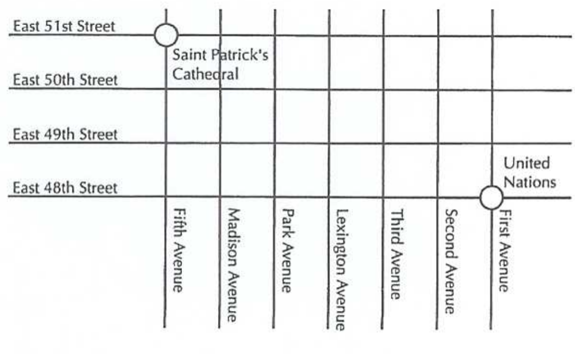
Oplossing

Er worden 63 wedstrijden gespeeld. Het aantal verschillende paren van teams (namelijk 21) kunnen we bijvoorbeeld grafisch bepalen:



Voorbeeld 4: patrouille

Twee New-Yorkse agenten moeten elke nacht patrouilleren van St Patrick's Cathedral (op de hoek van Fifth Avenue en East 51st Street) naar het hoofdkwartier van de Verenigde Naties (op de hoek van First Avenue en East 48th Street). Om een beetje afwisseling te brengen, kiezen ze elke nacht een andere route, maar steeds zonder omweg.
Hoeveel nachten kunnen zij dit volhouden?



Oplossing

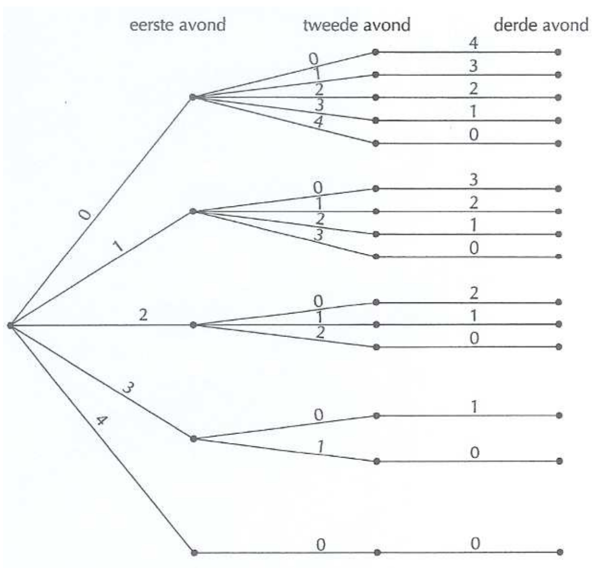
Ze kunnen dit 84 nachten volhouden.

Voorbeeld 5: huiswerk

Het is weer prijs: net nu je dacht volgende week drie vrije avonden te hebben, liggen er nog vier huistaken op je te wachten! Maken zul je ze, maar je kan natuurlijk kiezen hoeveel huistaken je wanneer maakt.
Hoe groot is die keuzevrijheid eigenlijk?

Oplossing

De eerste avond heb je vijf mogelijkheden: je maakt er geen enkele, je maakt er een, twee of drie, of je maakt ze allemaal. We stellen dat schematisch voor met een boomdiagram, zoals hieronder.
De tweede avond hangt je keuzevrijheid af van wat je de eerste avond hebt gepresteerd. Heb je toen nog niets gedaan, dan kun je beslissen om geen, een, twee, drie of vier huistaken te maken. Heb je al je huistaken al gemaakt, dan moet je niets meer doen. De derde avond moet je natuurlijk doen wat je de vorige avonden niet hebt gedaan. We vinden nu:



Op het boomdiagram kunnen we het aantal mogelijkheden aflezen in de laatste vertakking. We vinden dat er 15 mogelijkheden zijn om je werk te plannen.

Het probleem opsplitsen in deelproblemen

<u>Voorbeeld 1: gras sproeien</u>
Om 1 m² gras te besproeien is 750 ml water nodig. Hoeveel liter water is er nodig om een grasveld van 30 meter bij 60 meter te besproeien?

<u>Oplossing</u>

Deze vraag kan uiteengetrokken worden in verschillende deelproblemen:

- Hoeveel liter water is er nodig om 1 m² te besproeien? (0,75 l)
- Wat is de oppervlakte van het grasveld? (30 m . 60 m = 1800 m²)
- Hoeveel liter water is er nodig voor het hele grasveld? (0,75 l . 1800 = 1350 l)

<u>Antwoord: er is hiervoor 1 350 liter water nodig.</u>

<u>Voorbeeld 2: aankoop van een motor</u>
Paul is jaloers op de nieuwe motor van zijn vriend Frank en wil net hetzelfde voertuig aanschaffen. Frank had 30 % korting gekregen op de in de garage uitgestalde prijs van € 4000. De verkoper biedt Paul echter slechts een korting van 20 % aan. Na protest van Paul wil hij de nieuwe prijs nog verminderen met 10 %.
Betaalt Paul uiteindelijk dezelfde prijs als Frank?

<u>Oplossing</u>

- Hoeveel is 30 % van € 4000? (€ 1200)
- Hoeveel betaalde Frank voor zijn motor? (€ 2800)
- Hoeveel is 20 % van € 4000? (€ 800)
- Wat is de prijs waartegen Paul protesteert? (€ 3200)
- Hoeveel is 10 % van de nieuwe prijs? (€ 320)
- Wat is de uiteindelijke prijs die Paul betaalt? (€ 2880)
- Wie betaalt het meest? (Paul)

<u>Antwoord: Paul betaalt het meest.</u>

<u>Voorbeeld 3: de lift</u>
In een lift is er plaats voor 20 kinderen of 15 volwassenen. Als er 12 kinderen in de lift staan, hoeveel volwassenen kunnen er dan nog bij?

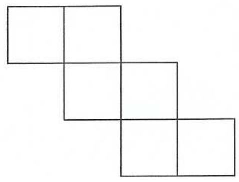
<u>Oplossing</u>

- Hoeveel kinderen kunnen er nog bij? (8)
- Hoeveel volwassenen wegen even veel als 8 kinderen?
  Dit kunnen we oplossen m.b.v. de regel van drieën:

20 kinderen wegen even veel als	15 volwassenen
↓ : 5	↓ : 5
4 kinderen wegen even veel als	3 volwassenen
↓ x 2	↓ x 2
8 kinderen wegen even veel als	6 volwassenen

<u>Antwoord: er is nog plaats voor 6 volwassenen.</u>

Voorbeeld 4: zes vierkanten
Nevenstaande figuur toont zes even grote vierkanten. De oppervlakte van de figuur is 54 m².
Wat is de omtrek van deze figuur?



Oplossing

- Hoe groot is de oppervlakte van elk vierkant? (54 m² : 6 = 9 m²)
- Hoe groot is de zijde van elk vierkant? (3m)
- Wat is de omtrek van de figuur? (14 x 3m = 42 m)

Antwoord: de omtrek is 42 meter.

Voorbeeld 5: fiets
Meneer Peeters bestelt in mei een sportfiets van € 620. De fiets wordt half juni geleverd. Op 1 juni verhoogt de winkelier alle prijzen met 12 %. Meneer Peeters neemt dat niet en wil een korting van 6 % op de nieuwe prijs. De winkelier zegt echter: "Je hoeft niet de volledige prijsverhoging te betalen, ik verhoog de oude prijs met 6 %.
Welke berekening is voor meneer Peeters het gunstigst?

Oplossing

- Wat is de nieuwe prijs? (€ 620 + 0,12 . € 620 = € 694,40)
- Wat is het voorstel van de winkelier? (€ 620 + 0,06 . € 620 = € 657,20)
- Wat is het voorstel van meneer Peeters? (€ 694,40 – 0,06 . € 694,40 = € 652,74)

Antwoord: meneer Peeters volgt best zijn eigen werkwijze.

Zoeken van een patroon in een situatie

Voorbeeld 1: de driehoek van Pascal
De driehoek hieronder wordt de driehoek van Pascal genoemd. Omschrijf een patroon om de volgende rij op te stellen. Vul onderstaande driehoek dan aan met vier rijen.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

Voorbeeld 2: schaakbord
Hoeveel vierkanten zijn er op een schaakbord?

Oplossing

Er is 1 vierkant dat bestaat uit 8 x 8 vakjes.
Er zijn 4 vierkanten die bestaan uit 7 x 7 vakjes.
Er zijn 9 vierkanten die bestaan uit 6 x 6 vakjes.
…
Er zijn 64 vierkanten die bestaan uit 1 vakje.
Er zijn dus in het totaal 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 = 204 vierkanten.

Voorbeeld 3: afvalcompetitie
83 ploegen spelen een afvalcompetitie: in elke ronde spelen zoveel mogelijk ploegen, telkens twee tegen elkaar. Als het aantal ploegen in een ronde oneven is, loot een van hen uit om zonder meer in de volgende ronde te spelen. Wie wint komt in de volgende ronde; verliezers vallen af. Hoeveel wedstrijden worden er in totaal gespeeld?

Oplossing

Je kan proberen uit te rekenen hoeveel wedstrijden er in de eerste ronde worden gespeeld, hoeveel in de tweede ronde, enzovoort. Dan bekom je: 41 + 21 + 10 + 5 + 3 + 1 + 1 = 82.

Je kan het ook anders bekijken: bij elke wedstrijd valt er één ploeg af. Aangezien er 82 ploegen moeten afvallen, worden er 82 wedstrijden gespeeld.

5.3.2 Mathematiseren in nijverheidstechnische richtingen

In het wiskundetijdschrift Uitwiskeling (jaargang 26 nummer 3) zijn er 21 pagina's gewijd aan het mathematiseren en oplossen van problemen in nijverheidstechnische richtingen. Er komen allerlei problemen aan bod die aangereikt werden door leraren technische vakken. We lichten er één voorbeeld uit. Voor een bespreking van de andere voorgestelde problemen, verwijzen we naar dat bewuste artikel in dit nummer van Uitwiskeling.

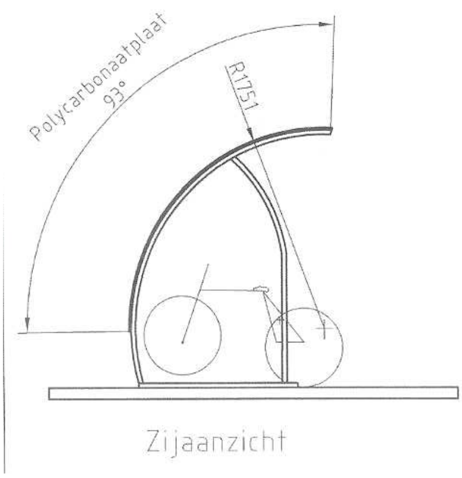
In gesprekken tussen de auteur van het artikel en leraren van technische vakken, kwam tot uiting dat de leerlingen in de technische vakken voornamelijk van de volgende wiskundige onderwerpen moeten kunnen gebruik maken:

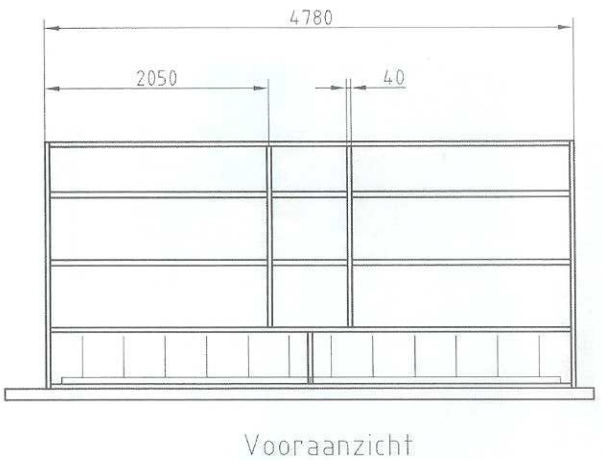
- omzetten van eenheden;
- omvormen van formules;
- het gebruik van machten van 10 en het rekenen hiermee;
- de stelling van Pythagoras en het oplossen van rechthoekige driehoeken.

Eén van de concrete problemen die in dit artikel aan bod komen, gaat over het aanschaffen van polycarbonaatplaten die nodig zijn voor het vervaardigen van een fietsenstalling.

De lasafdeling krijgt een bestelling voor 10 fietsenstallingen. Er moet hierbij heel wat gerekend en beslist worden om een prijsofferte te kunnen maken en om het materiaal te kunnen bestellen. We bekijken hier alleen de achterwand gemaakt van polycarbonaatplaten.

Polycarbonaat is een uiterst sterke kunststof, die gebruikt wordt als slagsterkte een vereiste is of als vandalisme een risico inhoudt. Polycarbonaat is bestand tegen hogere temperaturen. Het is plooibaar met een plooibank. Als je de foto goed bekijkt, zie je dat de platen niet helemaal tegen de grond komen. Op de volgende figuur zie je een voorbereidende schets. Verderop worden de eigenschappen van polycarbonaat in een tabel samengevat.





Eigenschappen van polycarbonaat	
Soortelijk gewicht	1200 kg/m³
Maximale gebruikstemperatuur	132°C
Lineaire uitzettingscoëfficiënt	$10^{-4}.K^{-1}$
Hardheid	M70
Brandgedrag	B2

De standaardmaat van een polycarbonaatplaat is 2050 x 3050. De afmeting 2050 is niet breed genoeg voor een fietsenstalling maar de platen kunnen tegen elkaar geplaatst worden met behulp van profielen. Er zullen dus platen op maat moeten gezaagd worden.
De prijs van de platen zonder btw is € 38,88/m² voor kleurloze en € 42,77/m² voor opale platen. De school krijgt 30 % korting op standaardmaten.

De opdracht bestaat er in na te rekenen hoeveel platen er moeten besteld worden voor het vervaardigen van 10 fietsenstallingen. Hierbij moet uiteraard gestreefd worden naar zo weinig mogelijk afval bij het op maat zagen van sommige platen.
Uiteindelijk moet dan ook de totale prijs voor die bestelling berekend worden.

Dit is duidelijk een 'open' opdracht waarbij heel wat (haalbare!) wiskunde aan te pas komt. De voornaamste heuristiek die hier zal moeten aangewend worden is het opsplitsen van het probleem in deelproblemen.
De leerlingen in groepjes van gedachten laten wisselen en de verschillende stappen laten zetten, is hier wellicht de meest aanbevolen werkwijze. De leraar volgt het groepswerk intens op en treedt op als coach. Waar nodig kan hij enkele tips of deelproblemen aanreiken.

De deelproblemen die horen bij dit probleem zijn de volgende:

- Welke eenheid wordt gebruikt op de tekening?
- Hoe breed is de fietsenstalling?
- Wat stelt het getal 1751 voor?
- Wat is de hoogte van een niet gebogen plaat?
  Hierbij moet de formule $\frac{d.\pi.\alpha}{360°}$ *gebruikt worden voor de berekening van de lengte van een cirkelboog; deze kan opgezocht worden in een technisch hulpboekje of ze kan aangereikt worden door de leraar.*
- Zoek de nodige gegevens op de tekening.
- Bereken de hoogte van de plaat.
- Hoeveel stukken heb je nodig voor één fietsenstalling? Geef de exacte zaagmaten.
- Hoeveel volledige platen heb je nodig voor 10 fietsenstallingen als je zo weinig mogelijk afval wil?
- Wat is de kostprijs van een plaat (kleurloos en opaal)?
- Wat is de prijs voor alle platen na korting zonder en met 21% btw?

5.3.3 Een selectie uit examenbundel

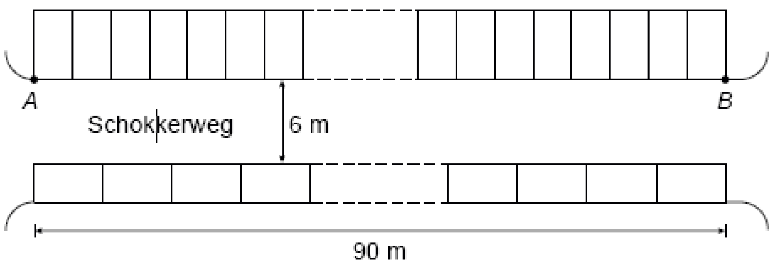
Heel wat inspiratie voor mathematiseringsopdrachten kan je vinden op http://www.examenbundel.nl . Klik dan op ‘VMBO’ en vervolgens in de linkerkolom op ‘oefenen’ en daarna op ‘oefenexamens’. Kies dan voor ‘wiskunde’. In de examendatabase kan je de opdrachten en de bijhorende antwoorden terugvinden van de examens vanaf het jaar 2000.

Uiteraard kaderen niet alle opdrachten in de lessen over mathematiseren en oplossen van problemen. Het is aan te bevelen een goede selectie te maken en de vraagstelling indien nodig wat bij te sturen (bijvoorbeeld het aantal tussenvragen beperken).

We geven enkele voorbeelden.

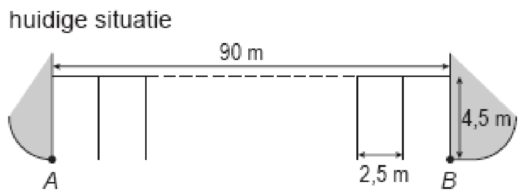
Voorbeeld 1: Schokkerweg (VMBO 2009 – II gl, tl)

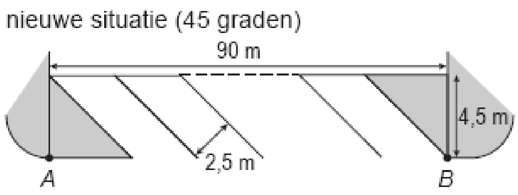
De bewoners van de Schokkerweg klagen al jaren over de verkeerssituatie in hun straat. De parkeerplaatsen aan beide kanten van de straat leveren gevaarlijke situaties op bij het in- en uitrijden van de auto’s. Hieronder staat een tekening van de Schokkerweg met de parkeerplaatsen erin aangegeven. Ernaast zie je een foto van de Schokkerweg. Deze foto werd gemaakt door een ambtenaar van de gemeente.



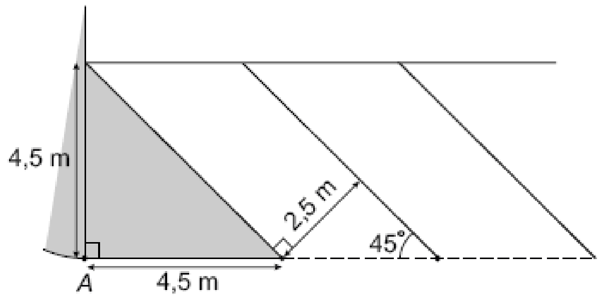
Iedere parkeerplaats is rechthoekig met een lengte van 4,5 meter en een breedte van 2,5 meter.

De ambtenaar komt met het plan om aan de linkerkant van de Schokkerweg de parkeerplaatsen aan te leggen onder een inrijhoek van 45°. Hieronder is het voorstel van de ambtenaar getekend.



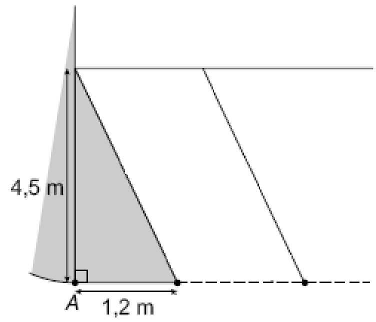


De nieuwe situatie is hieronder vergroot getekend.



Vraag 1:
De bewoners zijn tegen dit plan omdat er volgens hen dan veel minder parkeerplaatsen zullen zijn. Ga na hoeveel parkeerplaatsen er hierdoor verloren zouden gaan.

Onder druk van de bewoners maakt de ambtenaar een nieuw plan met een andere inrijhoek. Hierdoor zullen er weer wat meer parkeerplaatsen zijn. De tekening zie je hieronder.



Vraag 2:
Bereken hoeveel parkeerplaatsen de Schokkerweg zal kunnen tellen indien dat nieuw plan zou uitgevoerd worden.

Oplossing van vraag 1

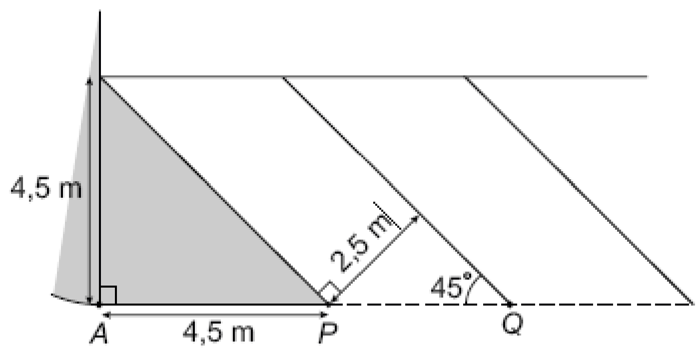
De exploratie- en mathematisatiefase moeten de nodige aandacht krijgen. Het zou mooi zijn indien de leerlingen de verschillende stappen zelf kunnen zetten. Overleg met elkaar in groepjes van drie of vier kan hierbij stimulerend werken. Indien nodig kan de leraar een tip geven.

Om vraag 1 te kunnen oplossen, zullen volgende stappen moeten gezet worden:

1) Hoeveel auto's kunnen er aan de kant van A naar B geparkeerd worden volgens de huidige verkeerssituatie? *(Hier is het niet nuttig na te rekenen hoeveel auto's er aan de andere kant kunnen geparkeerd worden).*

2) Hoeveel auto's zouden er kunnen geparkeerd worden volgens het plan van de ambtenaar van de gemeente?

   a) We brengen de punten P en Q aan op de figuur en berekenen |PQ|.



   → ofwel met de formule voor de sinus van een scherpe hoek in een rechthoekige driehoek;
   → ofwel met de stelling van Pythagoras in een gelijkbenige rechthoekige driehoek.

   b) De beschikbare ruimte is 90 m – 4,5 m en deze moeten we delen door |PQ|.

3) We maken het verschil van de resultaten bekomen in 1) en 2).

De berekeningen zijn de volgende:

1) In de huidige situatie kunnen er aan de kant van A naar B $\frac{90}{2,5} = 36$ auto's geparkeerd worden.

2) a) We berekenen de afstand van P naar Q:

Ofwel: $\sin 45° = \frac{2,5}{|PQ|} \quad \Rightarrow \quad |PQ| = \frac{2,5}{\sin 45°} \approx 3,54$

Ofwel: $|PQ|^2 = 2,5^2 + 2,5^2 = 12,5 \quad \Rightarrow \quad |PQ| = \sqrt{12,5} \approx 3,54$

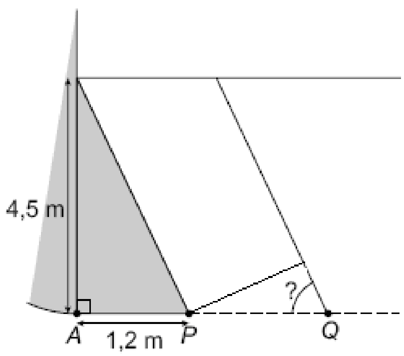
>>> Het kan een meerwaarde zijn om bij de klassikale bespreking achteraf beide oplossingswijzen eens naast elkaar te plaatsen.

b) Er is 85,5 m beschikbaar. $\frac{85,5}{3,54} \approx 24$.

3) Er zijn dus 36 – 24 = 12 parkeerplaatsen verloren gegaan.

Oplossing van vraag 2

Tijdens de exploratie- en mathematisatiefase stellen we vast dat wellicht op dezelfde manier zal moeten te werk gegaan worden als in het tweede deel van vraag 1. Alleen is hier de inrijhoek niet gegeven.



De inrijhoek is gelijk aan de hoek in het punt P van de grijze driehoek. Om die hoek te kennen, zullen we moeten beroep doen op de formule voor de tangens van een scherpe hoek in een rechthoekige driehoek.

Verder merken we op dat in deze vraag het totale aantal parkeerplaatsen gevraagd wordt; we moeten dus ook rekening houden met de overkant van de straat.

De berekeningen zijn de volgende:

1) Afstand van P naar Q:

$\tan \hat{P} = \frac{4,5}{1,2} = 3,75 \quad \Rightarrow \quad \hat{P} \approx 75°$

$\sin 75° = \frac{2,5}{|PQ|} \quad \Rightarrow \quad |PQ| = \frac{2,5}{\sin 75°} \approx 2,59$

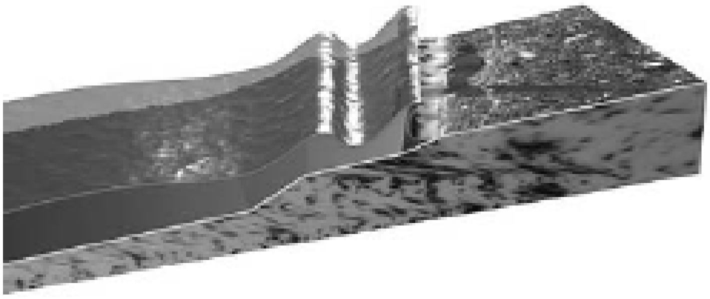
2) Aantal parkeerplaatsen:

* aan de kant van A naar B: er is 90 m – 1,2 m = 88,8 m beschikbaar. $\frac{88,8}{2,59} \approx 34$

  (wat slechts 2 parkeerplaatsen minder is dan nu!);
* aan de andere kant: $\frac{90}{4,5} = 20$;
* totaal: 54 .

Voorbeeld 2: vloedgolf (VMBO 2009 – I gl, tl)

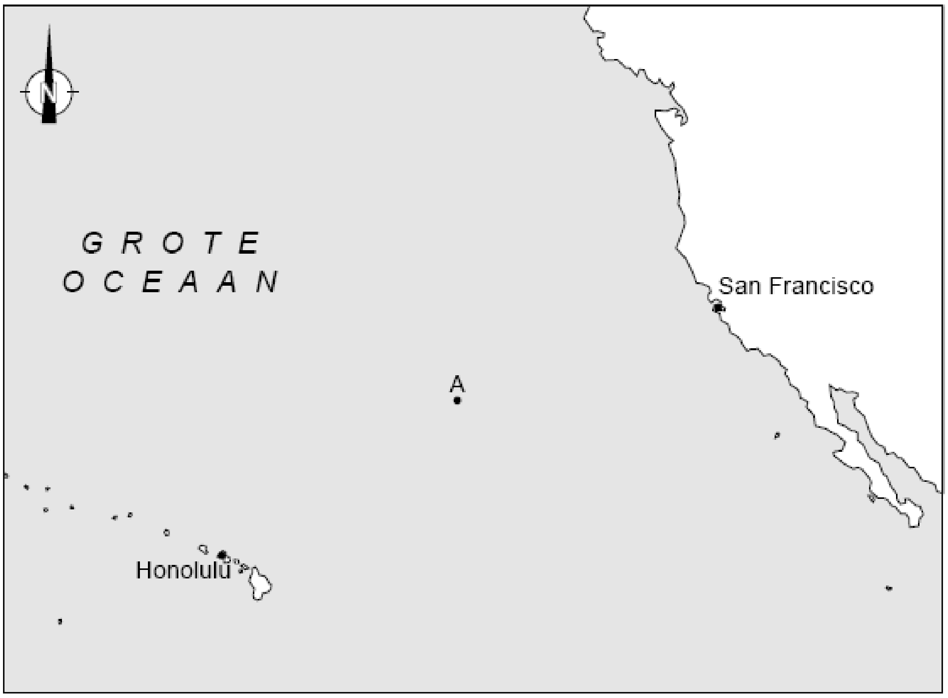
Bij een aardbeving in de zeebodem kan er een vloedgolf ontstaan. Een vloedgolf beweegt zich door het water met een bepaalde snelheid. Hoe dieper het water, hoe groter de snelheid van de vloedgolf is.



De gemiddelde snelheid van een vloedgolf is te berekenen met de formule: $v = 3{,}6 . \sqrt{9{,}8 . d}$.
Hierbij is v de snelheid in km/h en d de diepte van de zee in meter.

Er wordt in de Grote Oceaan gewerkt aan een waarschuwingssysteem voor vloedgolven. Dit systeem bestaat uit apparaten op de bodem van de oceaan die aardbevingen waarnemen. Boven elk apparaat drijft een boei die de gegevens doorseint naar een satelliet.

Hieronder zie je een kaart van de Grote Oceaan op schaal 1 : 60 000 000.
Boei *A* en de steden Honolulu en San Francisco staan hierin aangegeven. De zee onder boei A is 965 meter diep.



schaal 1:60 000 000

<u>Vraag:</u>
**Bij boei A wordt een aardbeving waargenomen en hierdoor ontstaat er een vloedgolf.
Na hoeveel uren zal deze vloedgolf San Francisco bereikt hebben?**

Oplossing

Ook hier weer laten we de leerlingen best in groepjes met elkaar overleggen. Uiteindelijk zouden ze tot het volgende stappenplan moeten kunnen komen.

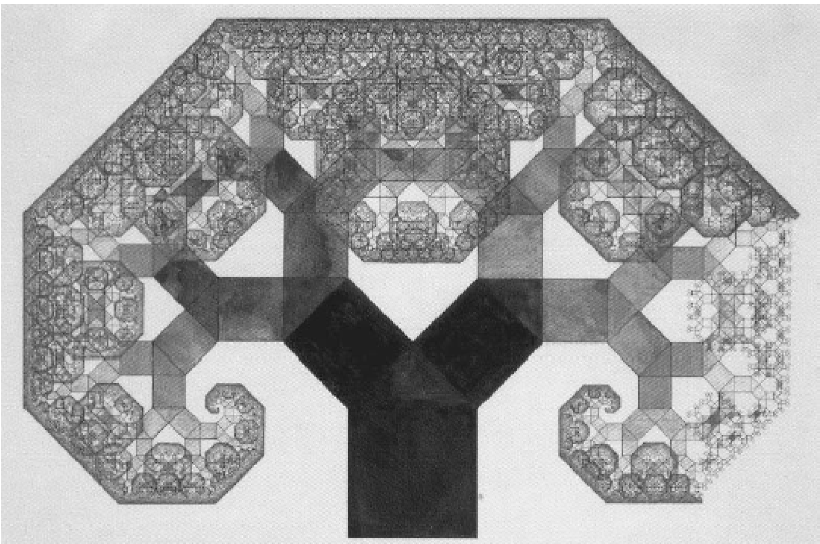
1) We meten de afstand van A naar San Francisco op de kaart en rekenen deze afstand om tot de werkelijke afstand.
2) Met behulp van de formule berekenen we de snelheid van de vloedgolf.
3) Uit vorige gegevens berekenen we de tijd.

De berekeningen zijn de volgende:

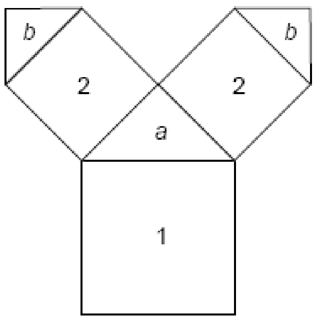
1) De afstand van boei A tot San Francisco bedraagt op de kaart 3,7 cm.
   1 cm op de kaart is 600 km in werkelijkheid. De afstand is dus 3,7 x 600 km = 2220 km.
2) De gemiddelde snelheid (in km/h) van de vloedgolf is gelijk aan: $3{,}6 . \sqrt{9{,}8 . 965} \approx 350$.
3) De tijd (in uren) is dus gelijk aan: $\frac{2220}{350} \approx 6{,}34$.
   De vloedgolf zal dus na iets meer dan 6 uur San Francisco bereiken.

Voorbeeld 3: wiskunde en kunst (VMBO 2009 – I gl, tl)

Hieronder zie je een Pythagorasboom. Deze bestaat uit vierkanten en gelijkbenige driehoeken.

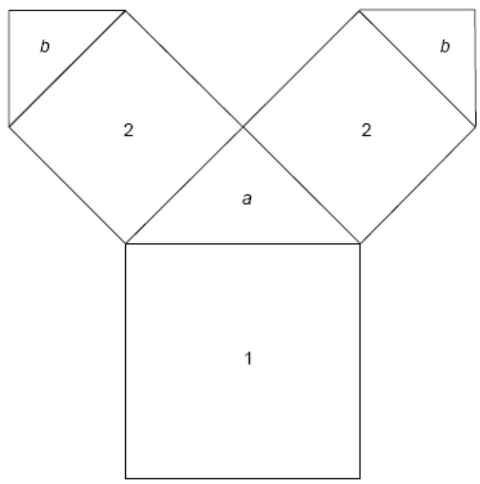


Op de onderstaande tekening is het begin van een Pythagorasboom getekend.



Het onderste vierkant geven we rangnummer 1. Op dit vierkant staat een gelijkbenige rechthoekige driehoek *a*. Aan deze driehoek *a* zitten twee vierkanten met rangnummer 2. Vervolgens zit aan elk vierkant met rangnummer 2 een gelijkbenige rechthoekige driehoek *b.* Zo wordt de hele boom opgebouwd.

Vraag 1:
Teken in de figuur hieronder alle vierkanten met rangnummer 3 en teken eveneens de driehoeken c.



Vraag 2:
Stel dat de oppervlakte van het vierkant met rangnummer 1 gelijk is aan 100 cm². Zoek dan
a) het rangnummer van een vierkant met een oppervlakte van 3,125 cm²;
b) het aantal vierkanten dat hoort bij rangnummer 10;
c) het rangnummer waarbij voor het eerst meer dan 25 000 vierkanten horen.

Oplossing van vraag 2 a):

- Als het vierkant met rangnummer 1 een oppervlakte heeft van 100 cm², is zijn zijde 10 cm.

- De oppervlakte van een vierkant van rang 2 kan op drie verschillende manieren bepaald worden.

  1) Aangezien driehoek a een gelijkbenige rechthoekige driehoek is, zijn de basishoeken elk 45°.
  Dan geldt: $\cos 45° = \dfrac{zijde\ vierkant\ 2}{10}$ Hieruit volgt dat de zijde van het vierkant met rangnummer 2 gelijk is aan 7,07… cm. De oppervlakte (in cm²) is dan (7,07…)² = 50.

  2) Teken twee diagonalen in het grote vierkant en één diagonaal in het kleinere vierkant.
  De zes driehoeken die zijn ontstaan, hebben allemaal dezelfde oppervlakte.
  De oppervlakte van elke driehoek is bijgevolg $\dfrac{100}{4}\,cm^2 = 25\,cm^2$.
  Dus is de oppervlakte van het kleinere vierkant 50 cm².

3) Stel de zijden van de vierkanten van rang 2 (in cm) gelijk aan x en pas dan op driehoek a de stelling van Pythagoras toe: $x^2 + x^2 = 10^2$. Hieruit volgt direct dat $x^2 = 50$ (in cm²).

o Op analoge wijze kan de oppervlakte van een vierkant met rangnummer 3 gevonden worden. Er kan uiteraard op deze manier verder gewerkt worden tot men komt aan een oppervlakte van 3,125 cm².

Het is echter eleganter om een verband te vinden tussen het rangnummer van een vierkant en zijn oppervlakte. Het antwoord kan dan snel gevonden worden door onderstaande tabel voort te zetten.

Rangnummer vierkant	1	2	3
Oppervlakte vierkant	100 cm²	50 cm²	25 cm²

De oppervlakten worden blijkbaar steeds gehalveerd. Het voortzetten van de tabel levert bij rangnummer 6 een oppervlakte van 3,125 cm².

Oplossingen van vragen 2 b) en 2 c):

Ook hier kan een tabel gemaakt worden die het verband weergeeft tussen het rangnummer en het aantal vierkanten:

Rangnummer vierkant	1	2	3	4	5
Aantal vierkanten	1	2	4	8	16

Wellicht zullen de leerlingen de oplossingen proberen te vinden door de tabel verder te zetten.

De leerlingen worden hier best gestimuleerd om het verband weer te geven in een formule:

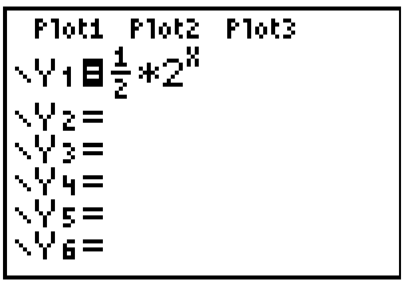
aantal vierkanten = $\frac{1}{2}.2^n$ met n het rangnummer van het vierkant.

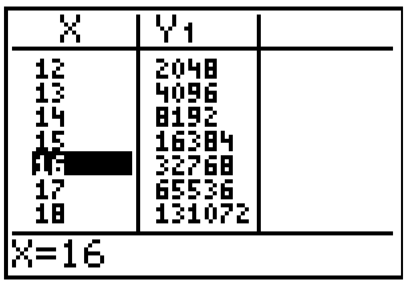
Het antwoord op vraag 2 b) wordt dan gevonden door n te vervangen door 10: $\frac{1}{2}.2^{10} = 512$.

Het antwoord op vraag 2 c) kan dan op verschillende manieren gevonden worden.

o Door enkele n-waarden te proberen en vast te stellen dat bij n = 15 er 16 384 vierkanten horen en bij n = 16 er 32 768 vierkanten horen. Bij rangnummer 16 horen dus voor het eerst meer dan 25 000 vierkanten.

o Door de grafische rekenmachine een tabel van functiewaarden te laten weergeven:





5.3.4 Een selectie uit de Kangoeroewedstrijd, JWO en VWO

Mits een goede selectie kunnen er zeker ook oefeningen uit de Kangoeroewedstrijden, JWO en VWO aan bod komen in het kader van mathematiseren en oplossen van problemen.

Kangoeroe-opgaven van vorige edities kan je vinden op http://www.wiskundekangoeroe.be .
Klik daarvoor op 'oefenen' en vervolgens op 'Kangoeroevragen per jaargang en editie'. Je kan dan onder andere alle vragen downloaden van de Wallabiewedstrijden vanaf het schooljaar 2008-2009 (Wallabie is bedoeld voor de eerste graad A).

Alle JWO- en VWO-opgaven uit de voorbije edities kunnen gevonden worden op de website http://www.vwo.be. Klik dan op 'oefenen' en vervolgens op 'vragen per jaargang en ronde' (daar vind je trouwens ook alle Kangoeroe-opgaven).

We geven een drietal voorbeelden (© v.z.w. Vlaamse Wiskunde Olympiade), één uit elke wedstrijd, die geschikt kunnen zijn voor kso/tso- leerlingen van de derde graad met weinig wekelijkse lestijden wiskunde.

Kangoeroewedstrijd – Wallabie 2009-2010

19. Nele schrijft de natuurlijke getallen van 1 tot en met 10 op het bord. Ze vervangt telkens twee getallen door hun som verminderd met 1, tot er nog maar één getal op het bord staat. Wat is dat getal?

A	B	C	D	E
1	11	45	46	55

(de meerkeuzemogelijkheid kan uiteraard weggelaten worden)

Mogelijke strategie

Enkele leerlingen maken deze oefening gelijktijdig aan het bord en de leraar waakt erover dat ze de oefening elk op een andere manier oplossen. Indien ze geen rekenfouten maken, dan zouden ze allemaal 46 moeten uitkomen.

Nu kan de leraar vragen naar een verklaring voor het feit dat de uitkomst steeds 46 zal zijn (zonder hierbij nog eens een aantal mogelijkheden te proberen). Hierover kunnen de leerlingen een vijftal minuutjes in groepjes van gedachten wisselen. Daarna volgt er een klassengesprek.

JWO eerste ronde 2009-2010

21. Marc kocht twee jaar geleden een auto. Vorig jaar verkocht hij deze auto terug aan de garage aan een prijs die 45 % lager lag dan de aankoopprijs. De garage verkoopt deze wagen nu verder aan een bedrag dat slechts 23 % lager is dan wat Marc eerst betaalde. Hoeveel procent is dat bedrag hoger dan wat Marc voor zijn auto kreeg?

(A) 22 %	(B) 29 %	(C) 40 %	(D) 49 %	(E) 51 %

(de meerkeuzemogelijkheid kan uiteraard weggelaten worden)

Oplossing

De prijs die Marc twee jaar geleden voor de auto betaalde kan men gelijk stellen aan x. De auto werd dan voor $\frac{55}{100}x$ verkocht aan de garage die hem dan voor $\frac{77}{100}x$ verkoopt. Dit bedrag is $\frac{77}{55}$ keer wat Marc voor zijn auto kreeg. De garage kreeg dus $\frac{22}{55}=\frac{2}{5}$, dit wil zeggen 40 %, meer.

We merken op dat het niet noodzakelijk is om met een letter x te werken om dat probleem te kunnen oplossen. Er kan even goed met een (eenvoudig) voorbeeld gewerkt worden.

Stel dat Marc deze auto twee jaar geleden heeft aangekocht voor 10 000 euro. Dan verkoopt hij die auto aan 5 500 euro en de garagist verkoopt hem aan 7 700 euro.

Nu is $\frac{7\,700}{5\,500}=1{,}4=1+0{,}4$. De garage kreeg dus 40 % meer.

VWO eerste ronde 2009-2010

11. Lotte neemt lukraak sokken uit een lade die 2 zwarte, 3 blauwe en 4 bruine sokken bevat. Ze weet dat er in de lade 3 sokken zijn met een gat in, maar ze weet niet welke kleur die sokken hebben. Hoeveel sokken moet Lotte minstens uit de lade nemen om er zeker van te zijn dat ze 2 sokken van dezelfde kleur heeft zonder gat er in?

(A) 3	(B) 5	(C) 6	(D) 7	(E) 8

(de meerkeuzemogelijkheid kan uiteraard weggelaten worden)

Oplossing

Lotte zou eerst drie sokken met een gat in kunnen nemen. Daarna kan ze nog drie sokken van verschillende kleuren trekken. Uiteindelijk zal ze bij de zevende sok zeker zijn dat ze een paar van dezelfde kleur zonder gaten erin gevonden heeft.

5.3.5 Ideeën uit nascholingen

Op nascholingen worden er heel dikwijls werkwinkels aangeboden waarbij er aandacht gaat naar probleemoplossend denken. Mits wat selecteren kunnen er ook hier opdrachten gevonden worden die aan wiskundig minder sterke leerlingen van de derde graad kunnen gegeven worden.

We geven enkele voorbeelden uit de Dag van de Wiskunde van 26 november 2009.

Een voorbeeld uit de werkwinkel 'Met de krant in de hand' (Johan Deprez)

China is een land met een sterk groeiende economie. Westerse landen proberen dan ook goede relaties te onderhouden met deze grote afzetmarkt van de toekomst. In het kader daarvan is eind 2004 een Belgische handelsmissie onder leiding van prins Filip naar China getrokken. In hun kielzog trok ook een groot leger journalisten mee. Hieronder lees je een stukje uit één van hun verslagen:

"Begin dit jaar bezocht een Belgische delegatie onder leiding van prins Filip China. De prins zag de toekomst van het land rooskleurig in en verklaarde dat China een groei kent van veertien procent. Dat is zoveel dat de mensen hun inkomen zullen zien verdubbelen in zeven jaar."
(uit: De Standaard 02/06/2005)

Vraag:
Ga je akkoord met de uitspraak van prins Filip? Verklaar waarom of waarom niet.

Oplossing

Hierover kunnen we de leerlingen individueel laten nadenken, maar we kunnen ze uiteraard ook van gedachten laten wisselen onder elkaar. De hamvraag is hier hoe prins Filip aan die zeven jaar komt.

Dat komt wellicht van 14 . 7 = 98 (met die veertien procent wordt wellicht een 'jaarlijkse' groei bedoeld). Dat zou betekenen dat er 98 % bijkomt in zeven jaar, wat dus ongeveer overeenkomt met een verdubbeling in zeven jaar tijd.

Prins Filip heeft echter een cruciale fout gemaakt. De jaarlijkse groeifactor is immers 1,14. Aangezien $1{,}14^7 \approx 2{,}5$ is er in zeven jaar tijd 150 % bijgekomen. Immers: 2,5 = 1 + 1,5 = 1 + 150 %.

Dit is dus meer dan een verdubbeling! Prins Filip was dus wat te pessimistisch. Maar op zich is dit misschien niet zo erg; het is immers best mogelijk dat deze sterke groei geen zeven jaar blijft duren, maar wat afzwakt.

Enkele voorbeelden uit de werkwinkel ‘Levensechte wiskunde’ (Geert Danneel)

Deze werkwinkel was voornamelijk bedoeld voor de leraren die les geven in de derde graad aan leerlingen met 3 of 4 uren, maar sommige opgaven kunnen zeker en vast aan bod komen in kso/tso-klassen met slechts 2 wekelijkse lestijden wiskunde.

Voorbeeld 1:

Een kledingstuk kost in de koopjesperiode nog € 50. Er ging immers 20 % van de volle prijs af.

Hoeveel betaalde ik voor hetzelfde stuk toen het nog niet afgeprijsd was ?

Voorbeeld 2:

In een fikse regenbui zijn twee lege bakken buiten blijven staan.
De grootste heeft bovenaan een opening van 21,6 dm², terwijl de kleinste slechts een mond heeft van 8,64 dm².

Hoeveel water mag ik verwachten in de grootste bak, als er in de kleinste al 6 liter achterbleef ?

5.3.6 Een enquête

Op de website www.dpbbrugge.be/wiskunde vind je onder ‘Varia’ de werktekst ‘Gezond op school met wiskunde’.

We kiezen bijvoorbeeld de werktekst: **‘Begin de dag met een gezond ontbijt’**.
Deze kunnen we gebruiken in het kader van het mathematiseren en oplossen van problemen.

De tekst gaat over het feit dat jongeren soms onvoldoende tijd nemen om te ontbijten. Blijkbaar ontbijt 1 op 10 jongeren tussen 15 en 18 jaar zelfs nooit. Hoe ouder men is, hoe minder vaak er een dagelijks ontbijt wordt genomen.
In het aso neemt twee derde van de leerlingen elke dag een ontbijt. In het tso zijn dat er iets meer dan de helft en in het bso amper de helft.

In het kader van het HBSC-project (Health Behaviour in School-aged Children - www.jongeren-en-gezondheid.ugent.be), onderzocht men aan de Universiteit Gent hoeveel jongeren regelmatig of dagelijks een ontbijt nemen. Hieronder staan de resultaten.

aantal dagen ontbijt

		op schooldagen						in het weekend		
		geen	1 dag	2 dagen	3 dagen	4 dagen	5 dagen	geen	1 dag	2 dagen
jongens	11-12	6	1	3	3	3	84	4	9	86
	13-14	10	2	4	5	3	76	8	11	81
	15-16	15	2	4	5	3	71	11	14	76
	17-18	20	3	4	6	4	63	17	20	63
	Totaal	13	2	4	5	3	74	10	14	77
meisjes	11-12	7	2	3	5	4	80	3	9	89
	13-14	11	2	4	5	4	73	4	10	85
	15-16	18	4	5	7	5	61	10	17	73
	17-18	21	3	4	6	4	61	13	23	63
	Totaal	14	3	4	6	4	69	8	15	78

aantal dagen ontbijt

		op schooldagen						in het weekend		
		geen	1 dag	2 dagen	3 dagen	4 dagen	5 dagen	geen	1 dag	2 dagen
jongen	aso	10	2	3	4	4	77	8	14	78
	tso	19	3	4	5	3	65	15	20	65
	bso	29	3	4	7	3	55	23	19	58
	Totaal	18	3	4	5	4	67	15	18	68
meisje	aso	13	3	3	5	6	70	8	17	75
	tso	21	4	6	7	4	58	14	24	62
	bso	33	4	5	10	4	44	18	24	57
	Totaal	20	3	5	7	5	61	12	21	67

Opdracht
Organiseer een enquête over het ontbijtgedrag op jouw school en vergelijk de resultaten met de cijfers uit de bovenstaande tabellen.

6. Problem solving: gemengde oefeningen

In deze paragraaf reiken we een aantal voorbeelden aan die kunnen gebruikt worden in de lessen ‘mathematiseren en oplossen van problemen’. Hierbij maken we geen onderscheid meer tussen richtingen met minder sterke of sterkere wiskunde. Het is aan de leraar om uit te maken of de aangereikte voorbeelden in zijn/haar klas aan bod kunnen komen.

Net zoals in de wiskundig minder sterke richtingen kan er in andere richtingen voor gekozen worden om in een aantal lessen bepaalde heuristieken in de kijker te plaatsen.
Verder kan men opteren om tijdens bepaalde lessen de leerlingen te confronteren met een reeks kleinere opdrachten, maar het is uiteraard aangewezen om hen af en toe ook wat grotere opdrachten te laten oplossen.

Hieronder volgen enkele voorbeelden. Hopelijk werken ze inspirerend om ook zelf goed doordachte opdrachten voor de leerlingen te maken. Zoals reeds vermeld in 5.2 kan zeker inspiratie gevonden worden in wiskundetijdschriften, leer- en leerwerkboeken, in de Kangoeroe-, JWO- en VWO-vragen, in syllabi van nascholingen, op websites, onder andere http://www.examenbundel.nl …
Op de website van examenbundel kiest men voor leerlingen met 2-3 uren wiskunde best voor VMBO. Voor leerlingen met 3-4 uren wiskunde opteert men best voor HAVO. Voor leerlingen met meer dan 5 uren is – naast HAVO – ook VWO de moeite waard.

Waar de gelegenheid zich voordoet, wordt er functioneel gebruik gemaakt van de grafische rekenmachine.

De oplossingen zijn te vinden in paragraaf 7. Bij sommige oplossingen hebben we de verschillende stappen van het stappenplan expliciet vermeld. Uiteraard hoeft dat niet steeds zo strict opgeschreven te worden. In de praktijk vloeit de ene stap immers spontaan over in de andere. Belangrijk is wel dat we onze leerlingen leren gestructureerd te werken.

6.1. Een aantal kleinere opdrachten

1 Muntstukken

In een zak zitten 26 euromunten. Als ik 20 munten uit de zak pak, dan zit er minstens één munt van 1 eurocent bij. Ook zitten er minstens twee munten van 2 eurocent bij en minstens vijf munten van 5 eurocent.
Hoeveel zijn de 26 munten in de zak bij elkaar waard?

2 Gokspelletje

Aan het begin van een gokspelletje hadden Alex, Bart en Chris geld in de verhouding 11 : 8 : 5.
Aan het einde van het spel was dezelfde hoeveelheid geld verdeeld in de verhouding 4 : 3 : 2.
Welke uitspraak is waar?
a) Alex verloor, Bart verloor en Chris won.
b) Alex won, Bart verloor en Chris won.
c) Alex won, Bart verloor en Chris speelde quitte.
d) Alex verloor, Bart speelde quitte en Chris won.
e) Alle antwoorden a) t.e.m. d) zijn niet juist.

3 Kilometerteller

De kilometerteller van een auto geeft aan dat de auto 2010 km gereden heeft. Het is een kilometerteller met zes wieltjes en geen cijfer achter de komma, dus de stand van de teller is 002010. Deze kilometerteller slaat echter het cijfer 4 over en springt dus direct van 3 naar 5, bij elk van de wieltjes.
Hoeveel kilometer heeft de auto werkelijk gereden?

4 Magisch vierkant

In een magisch vierkant is de som van de drie getallen in elke rij, de som van de drie getallen in elke kolom en de som van de drie getallen in elk van de twee diagonalen steeds hetzelfde getal.
In het magisch vierkant hieronder zijn vier van de negen getallen gegeven. Wat is de waarde van N?

	N	
11		15
12		10

5 Naar de sportclub

Wouter gaat lopend van zijn huis naar zijn sportclub. Hij had ook zijn racefiets kunnen nemen; daarmee gaat de tocht zeven keer zo snel. Maar die liet hij thuis staan. Na 1 km is hij op een punt aangekomen dat het in tijd niets uitmaakt of hij verder doorloopt of juist naar huis terugloopt om alsnog met zijn racefiets te gaan.
Hoeveel km is hij op dat moment nog verwijderd van zijn sportclub?

6.2. Met de fiets naar school

We behandelen vier probleemsituaties rond eenzelfde thema: Johan gaat elke dag met de fiets naar school. Bij het naar school fietsen 's morgens rijdt hij echter niet zo snel dan 's avonds wanneer hij weer naar huis fietst. De gemiddelde snelheid, berekend over de beide ritten, zal uiteraard afhangen van de snelheden behaald op elke rit afzonderlijk.
De probleemsituaties zijn gerangschikt volgens stijgende moeilijkheidsgraad.

Situatie 1
Johan woont op 4 km van school en gaat elke dag met de fiets naar school.
'S Morgens heeft hij niet veel zin om naar school te gaan. Daarom fietst hij met een constante snelheid van slechts 16 km/h naar school.
Na de schooluren wil hij zo snel mogelijk thuis zijn. Dan trapt hij harder op de trappers en fietst met een constante snelheid van 24 km/h naar huis.
Welke gemiddelde snelheid heeft Johan gehaald op beide ritten samen?

Situatie 2
Johan gaat elke dag met de fiets naar school.
'S Morgens heeft hij niet veel zin om naar school te gaan. Daarom fietst hij met een constante snelheid van slechts 16 km/h naar school.
Na de schooluren wil hij zo snel mogelijk thuis zijn. Dan trapt hij harder op de trappers en fietst met een constante snelheid van 24 km/h naar huis.
Welke gemiddelde snelheid heeft Johan gehaald op beide ritten samen?

Situatie 3
Johan gaat elke dag met de fiets naar school.
'S Morgens fietst hij met een constante snelheid van 16 km/h naar school.
Tegen welke snelheid moet hij na de schooluren terug naar huis rijden opdat zijn gemiddelde snelheid over de beide ritten 20 km/h zou bedragen?

Situatie 4
Johan fietst 's morgens met een constante snelheid van 16 km/h naar school. We vragen ons af of de gemiddelde snelheid over de heen- en terugrit onbeperkt groot kan worden, als Johan tijdens de terugrit steeds sneller zou kunnen rijden (desnoods met een supersonische machine die gigantische snelheden kan ontwikkelen!).
Indien dit niet kan, zou er dan een grens kunnen bepaald worden waarboven de gemiddelde snelheid in geen geval kan gaan?

6.3. Lopen en zwemmen

Bart bevindt zich aan de oever van een rivier met heel traag stromend water. De rivier is 30 meter breed.

Hij wil zo snel mogelijk de overkant bereiken op een plaats die 100 meter verder gelegen is (vanaf de plaats aan de overkant die recht tegenover hem ligt).

Bart loopt gemiddeld tegen 200 m/min en zwemt gemiddeld tegen 50 m/min.

Bereken zijn minimale tijd nodig om zijn doel te bereiken.

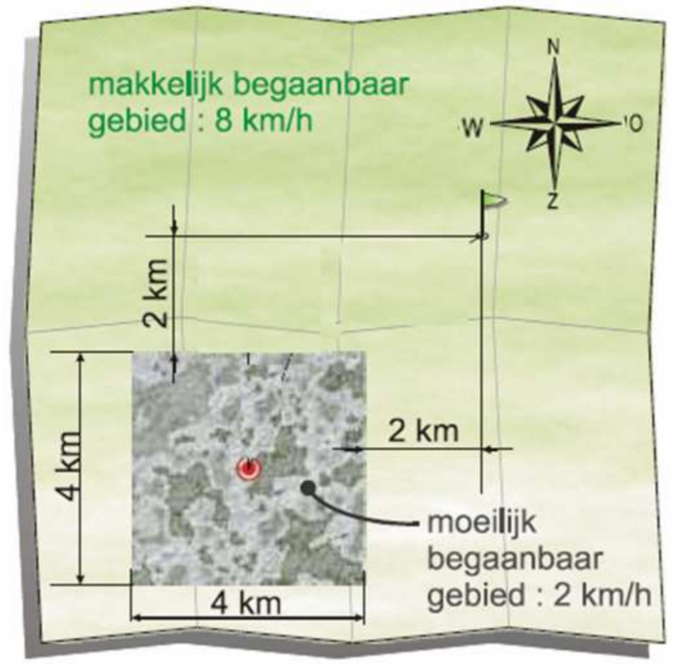
6.4. Militair dilemma

Tijdens een militaire oefening wordt een groep soldaten gedropt juist in het midden van een vierkante zone. Dit gebied is zeer onherbergzaam.

De opdracht luidt om zich naar de eindbestemming te begeven die zich ten noordoosten bevindt, in makkelijk begaanbaar gebied: zie plannetje hiernaast.

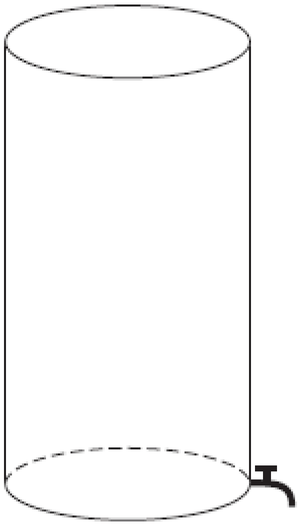
De legerleiding houdt er rekening mee dat er in het onherbergzame gebied gevorderd kan worden aan 2 km/h, terwijl er in de makkelijk begaanbare zone vooruit gegaan kan worden aan 8 km/h.

Wat is de snelste route?



6.5. Pompen of niet?

Een cilindervormig vat met een hoogte van 3,2 meter heeft een inhoud van 8 000 liter en is helemaal gevuld met water. Onderaan het vat is er een kraan.



Aan die kraan kan men een pomp aansluiten die per minuut 60 liter water uit het vat pompt.

Men kan echter ook gewoon de kraan opendraaien zonder de pomp aan te sluiten. Dit laatste heeft men al eens gedaan en men heeft daarbij om de 10 minuten de hoogte van het water opgetekend.
Dit waren de resultaten:

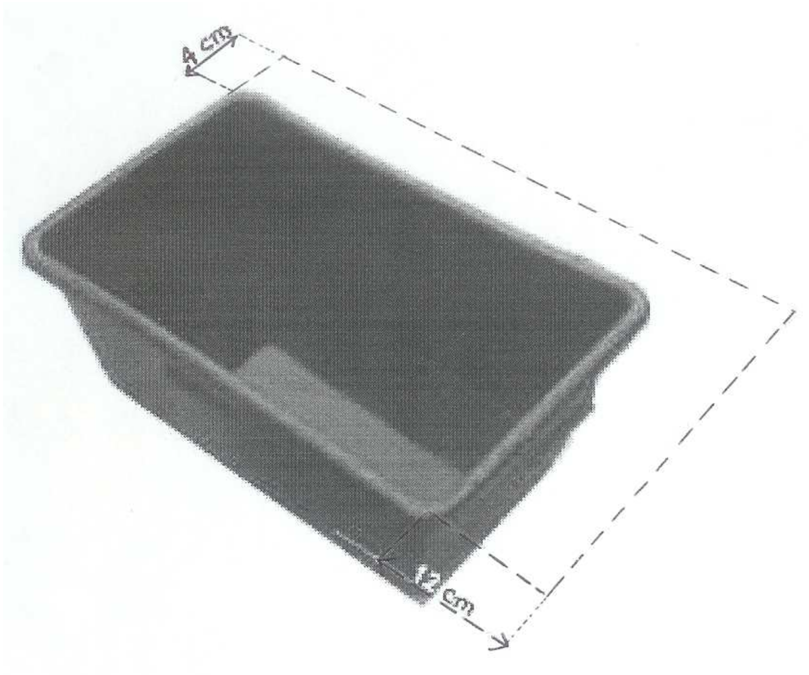
t	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	
h	320	289	259	231	205	180	157	135	115	97	

t	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
h	80	65	51	39	29	20	13	7	3	1	0

t stelt de tijd (in minuten) voor vanaf het moment waarop de kraan wordt opengedraaid.
h stelt de hoogte (in cm) voor van de waterspiegel.

Men wil nu het vat zo snel mogelijk leegmaken. Zoek de kortst mogelijke tijd.

6.6. Afmetingen van een bak



Deze bak heeft bovenaan een opening van 21,6 dm².

Hij is tijdens enkele regendagen blijven buiten staan en er staat nu 15 liter water in.
Hij was echter 4 cm te smal en 12 cm te kort om 20 liter te kunnen opvangen.

Kun jij de lengte en de breedte vinden van de bak uit bovenstaande afbeelding?

6.7. Geluidssnelheid in de atmosfeer

Men gaat er vaak vanuit dat de geluidssnelheid in lucht 340 meter per seconde is. Dat is niet helemaal waar. In werkelijkheid hangt de snelheid van het geluid af van de temperatuur. Bij windstil weer wordt het verband bij benadering weergegeven door de volgende formule: $v = 331.\sqrt{1+\frac{T}{273}}$.

Hierbij is *v* de snelheid van het geluid in meter per seconde bij een temperatuur van *T* graden Celcius.

In de atmosfeer neemt de temperatuur tot op 10 km hoogte lineair af tot – 50°C.
Grote afstanden moeten met een passagiersvliegtuig snel afgelegd kunnen worden. Dat kan alleen als het vliegtuig hoog vliegt omdat dan de luchtweerstand klein is. Voor passagiersvliegtuigen mag de snelheid echter hoogstens 90 % van de geluidssnelheid zijn.

Bereken tot op welke hoogte een passagiersvliegtuig kan vliegen als hij een snelheid wil maken van 975 km per uur. We gaan er hierbij van uit dat de gemiddelde temperatuur op zeeniveau tijdens de vlucht 15°C is.

6.8. Minimale lengte van een ladder

Naast een huis staat een 4 meter hoge schutting op 1 meter afstand van dit huis.

Hoe lang moet een ladder tenminste zijn om tegen de muur van het huis te kunnen komen?

7. Problem solving: oplossingen

7.1. Een aantal kleinere opdrachten

1 Muntstukken

- Minstens één munt van 1 eurocent bij iedere greep van 20 munten betekent dat er minstens zeven munten van 1 eurocent bij de 26 munten moeten zitten.
- Minstens twee munten van 2 eurocent bij iedere greep van 20 munten betekent dat er minstens acht munten van 2 eurocent bij de 26 moeten zitten.
- Minstens vijf munten van 5 eurocent bij iedere greep van 20 munten betekent dat er minstens elf munten van 5 eurocent bij de 26 moeten zitten.
- Omdat er in totaal 26 munten zijn, moeten er dus precies zeven munten van 1 cent, acht van 2 cent en elf van 5 cent zijn. Die zijn samen 78 eurocent waard.

<u>Conclusie: in de zak zit er 78 eurocent.</u>

2 Gokspelletje

- Alex had aan het begin het $\frac{11}{24}$ deel van al het geld en op het einde het $\frac{4}{9}$ deel.
- Bart had aan het begin het $\frac{8}{24}$ deel van al het geld en op het einde het $\frac{3}{9}$ deel.
- Chris had aan het begin het $\frac{5}{24}$ deel van al het geld en op het einde het $\frac{2}{9}$ deel.

Om de verhoudingen te kunnen vergelijken, zorgen we ervoor dat de breuken dezelfde noemer krijgen; de kleinst mogelijke noemer is 72. Dan geldt:

- Alex ging van $\frac{33}{72}$ naar $\frac{32}{72}$ van het totaal.
- Bart bleef op $\frac{24}{72}$.
- Chris ging van $\frac{15}{72}$ naar $\frac{16}{72}$ van het totaal.

<u>Conclusie: antwoord d) is het goede antwoord.</u>

3 Kilometerteller

- Na 9 kilometer verspringt het tweede wieltje van rechts van 0 naar 1. Na nog 9 kilometer verspringt dit wieltje van 1 naar 2. Enzovoort, maar 4 slaat hij over.
- Nadat het tweede wieltje van rechts dus negenmaal is versprongen, dus na 9 x 9 kilometer, verspringt het derde wieltje van rechts van 0 naar 1, enzovoort.
- Na 9 x 9 x 9 = 729 kilometer verspringt het vierde wieltje van rechts van 0 naar 1 en na nog 729 kilometer van 1 naar 2.
- Dus in de stand 002010 is het aantal afgelegde kilometers gelijk aan 2 x 729 + 1 x 9 = 1467.

<u>Conclusie: in werkelijkheid heeft de auto 1467 kilometer gereden.</u>

4 Magisch vierkant

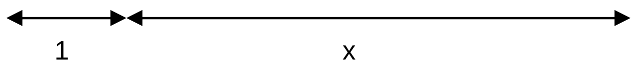
In de figuur hebben we de vakjes A, B, C en D ook aangegeven.

A	N	B
11	C	15
12	D	10

- Omdat de som van de getallen in de linkerkolom gelijk moet zijn aan de som van de getallen in de diagonaal van linksboven naar rechtsonder, geldt: A + 11 + 12 = A + C + 10.
  Hieruit volgt dat C = 13.
- Nu vinden we op dezelfde manier dat 12 + D + 10 = N + C + D = N + 13 + D.
  Hieruit volgt dan dat N = 9.

<u>Conclusie: N = 9.</u>

5 Naar de sportclub



De tijd die Wouter over de eerste kilometer gedaan heeft, noemen we voor het gemak een ‘kwartier’. We stellen x de afstand (in km) die hij nog van de sportclub verwijderd is. Doorlopen kost hem dus nog x ‘kwartier’.

Teruggaan naar huis en dan op de fiets kost eerst weer 1 ‘kwartier’ lopen en dan $\frac{1+x}{7}$ ‘kwartier’ fietsen; de fiets gaat immers zeven keer zo snel.

Bijgevolg moet gelden: $x = 1 + \frac{1+x}{7} \Leftrightarrow 7x = 7 + 1 + x$

$$\Leftrightarrow 6x = 8$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

<u>Conclusie: Wouter is nog 1,333 km verwijderd van de sportclub.</u>

<u>Merk op:</u> we hebben hier verondersteld dat Wouter een ‘kwartier’ nodig heeft om één km te gaan. Deze veronderstelling doet geen afbreuk aan de correctheid van onze oplossing.
Vergelijk bovenstaande oplossingsmethode met de ‘algemenere’ oplossingsmethode hieronder:

We stellen x weer de afstand (in km) die hij nog van de sportclub verwijderd is.
Stel *v* de stapsnelheid (in km/h) van Wouter. Dan is zijn fietssnelheid 7*v*.
Uit ‘ $\text{tijd} = \frac{\text{afstand}}{\text{snelheid}}$ ’ vinden we nu:

- Nodige tijd (in uur) als hij zou verder stappen: $\frac{x}{v}$.
- Nodige tijd (in uur) als hij terug naar huis gaat en dan fietst: $\frac{1}{v} + \frac{1+x}{7v}$.

Nu moet gelden dat $\frac{x}{v} = \frac{1}{v} + \frac{1+x}{7v}$. En als we nu beide leden vermenigvuldigen met *v*, bekomen we exact dezelfde vergelijking als in onze redenering met het ‘kwartier’ …

7.2. Met de fiets naar school

Oplossing situatie 1

Exploreren

Misschien denk je dat de gemiddelde snelheid gelijk is aan 20 km/h. Dit is echter fout.
Om dit in te zien, stel je je best de volgende vragen:

1) Hoe lang duurt de rit van huis naar school?
2) Hoe lang duurt de rit van school naar huis?
3) Hoe lang duren de heen- en terugrit samen?
4) Wat is de gemiddelde snelheid over de heen- en terugrit samen?

Mathematiseren

1) Met behulp van de formule $t = \frac{s}{v}$ kunnen we de duur van de heenrit berekenen: $\frac{4\,\text{km}}{16\,\text{km/h}}$.
2) Analoog voor de duur van de terugrit: $\frac{4\,\text{km}}{24\,\text{km/h}}$.
3) De som van beide uitkomsten is de totale duur.
4) Dan is $v = \frac{s}{t}$ met s = 8 km en t de totale duur, de gemiddelde snelheid over de heen- en terugrit samen.

Berekenen

1) Duur heenrit: $\frac{4\,\text{km}}{16\,\text{km/h}} = \frac{1}{4}\text{uur} = 15 \text{ minuten}$.
2) Duur terugrit: $\frac{4\,\text{km}}{24\,\text{km/h}} = \frac{1}{6}\text{uur} = 10 \text{ minuten}$.
3) Duur van heen- en terugrit samen: 25 minuten.
4) Johan rijdt 8 km in 25 minuten. De gemiddelde snelheid is dus $\frac{8\,\text{km}}{25\,\text{min}} = 0{,}32$ km/min = 19,2 km/h.

Controleren

Indien de gemiddelde snelheid 20 km/h was geweest (wat je misschien aanvankelijk wel dacht), dan zou de totale duur van de heen- en terugrit gelijk geweest zijn aan $\frac{8\,\text{km}}{20\,\text{km/h}} = \frac{2}{5}\text{uur} = 24 \text{ minuten}$, wat dus niet klopt. Is de gemiddelde snelheid 19,2 km per uur, dan komt de totale duur wel overeen met bovenstaande berekeningen: $\frac{8\,\text{km}}{19{,}2\,\text{km/h}} = \frac{5}{12}\text{uur} = 25 \text{ minuten}$.

Conclusie: de gemiddelde snelheid bedraagt 19,2 km/h.

Oplossing situatie 2

Exploreren

Het probleem lijkt hier heel wat moeilijker dan in de eerste situatie: de afstand van huis naar school is immers niet gegeven!

Uit de oplossing van situatie 1 weten we dat de gemiddelde snelheid gelijk is aan 19,2 km/h indien de afstand van school naar huis 4 km bedraagt.

We gaan nu eens na wat de gemiddelde snelheid is als die afstand 8 km bedraagt:

- Duur heenrit: $\frac{8\,\text{km}}{16\,\text{km/h}} = \frac{1}{2}\,\text{uur} = 30\ \text{minuten}$.
- Duur terugrit: $\frac{8\,\text{km}}{24\,\text{km/h}} = \frac{1}{3}\,\text{uur} = 20\ \text{minuten}$.
- Duur van heen- en terugrit samen: 50 minuten.
- Johan rijdt 16 km in 50 minuten.

  Zijn gemiddelde snelheid bedraagt dus $\frac{16\,\text{km}}{50\,\text{min}} = 0{,}32$ km/min = 19,2 km/h.

En wat is die gemiddelde snelheid als de afstand van huis naar school bijvoorbeeld 6 km bedraagt?

- Duur heenrit: $\frac{6\,\text{km}}{16\,\text{km/h}} = \frac{3}{8}\,\text{uur} = 22{,}5\ \text{minuten}$.
- Duur terugrit: $\frac{6\,\text{km}}{24\,\text{km/h}} = \frac{1}{4}\,\text{uur} = 15\ \text{minuten}$.
- Duur van heen- en terugrit samen: 37,5 minuten.
- Johan rijdt 12 km in 37,5 minuten.

  Zijn gemiddelde snelheid bedraagt dus $\frac{12\,\text{km}}{37{,}5\,\text{min}} = 0{,}32$ km/min = 19,2 km/h.

We vinden telkens een gemiddelde snelheid van 19,2 kilometer per uur. Is dit nu toevallig of zou die gemiddelde snelheid steeds gelijk blijven?

Mathematiseren

Stellen we nu even de afstand van huis naar school gelijk aan s.

- Duur heenrit: $\frac{s\,\text{km}}{16\,\text{km/h}} = \frac{s}{16}\,\text{uur}$.
- Duur terugrit: $\frac{s\,\text{km}}{24\,\text{km/h}} = \frac{s}{24}\,\text{uur}$.
- Duur van heen- en terugrit samen: $\left(\frac{s}{16} + \frac{s}{24}\right)$ uur.

- Johan rijdt 2s kilometer in $\left(\frac{s}{16}+\frac{s}{24}\right)$ uur.

  Zijn gemiddelde snelheid bedraagt dus $\dfrac{2s}{\frac{s}{16}+\frac{s}{24}}$ km/h.

<u>Berekenen</u>

$$\frac{2s}{\frac{s}{16}+\frac{s}{24}}=\frac{2s}{\frac{3s}{48}+\frac{2s}{48}}=\frac{2s}{\frac{5s}{48}}=2s.\frac{48}{5s}=\frac{96}{5}=19{,}2$$

<u>Controleren</u>

Als de gemiddelde snelheid 19,2 km/h bedraagt, dan rijdt Johan in totaal $\frac{2s}{19{,}2}$ uur.

De heenrit duurt $\frac{s}{16}$ uur en de terugrit $\frac{s}{24}$ uur.

Nu is $\frac{s}{16}+\frac{s}{24}=\frac{3s}{48}+\frac{2s}{48}=\frac{5s}{48}=\frac{s}{9{,}6}=\frac{2s}{19{,}2}$. Dit is inderdaad de totale tijdsduur.

<u>Conclusie:</u>
De gemiddelde snelheid bedraagt steeds 19,2 km/h (ongeacht de afstand tussen thuis en school).

<u>Merk op: het harmonisch gemiddelde</u>

Tijdens het controleren van de oplossing in situatie 2, stelden we vast dat $\frac{s}{16}+\frac{s}{24}=\frac{2s}{19{,}2}$.
We kunnen beide leden delen door s wat meteen aantoont dat de gemiddelde snelheid niet afhankelijk is van de afstand. We bekomen: $\boxed{\frac{1}{16}+\frac{1}{24}=\frac{2}{19{,}2}}$.

Deze laatste formule is een speciaal geval van de definitie van 'harmonisch gemiddelde':

Het harmonisch gemiddelde h van n getallen $\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_n}$ ***voldoet aan:*** $\boldsymbol{\frac{1}{h}=\frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$

Het harmonisch gemiddelde van 2 getallen x_1 *en* x_2 *voldoet dus aan:*

$\frac{1}{h}=\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)$ *of nog:* $\boxed{\frac{2}{h}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}$.

Als x_1 *en* x_2 *respectievelijk de snelheden voorstellen tijdens de heen- en terugrit, dan is h de gemiddelde snelheid behaald op de heen- en terugrit samen.*

Oplossing situatie 3

Exploreren

Uit situatie 2 weten we dat de afstand tussen thuis en school geen invloed heeft op de gemiddelde snelheid. De gemiddelde snelheid is het ‘harmonisch gemiddelde’ van de snelheden tijdens de heen- en terugrit.
Uit situaties 1 en 2 weten we dat zijn snelheid bij de terugrit in ieder geval meer dan 24 km/h moet bedragen.

Mathematiseren

Stellen we de snelheid tijdens de terugrit gelijk aan v kilometer per uur.
Dan voldoet v aan de formule: $\frac{1}{16}+\frac{1}{v}=\frac{2}{20}$.

Berekenen

$$\frac{1}{16}+\frac{1}{v}=\frac{2}{20} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{v}=\frac{2}{20}-\frac{1}{16} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{v}=\frac{8}{80}-\frac{5}{80} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{v}=\frac{3}{80} \quad \Leftrightarrow \quad v=\frac{80}{3}\approx 26{,}667$$

Controleren

Stellen we even dat de afstand van huis naar school 4 km bedraagt. Dan bekomen we:

- Duur heenrit: $\frac{4\,\text{km}}{16\,\text{km/h}}=\frac{1}{4}\,\text{uur}$.
- Duur terugrit: $\frac{4\,\text{km}}{\frac{80}{3}\,\text{km/h}}=\frac{3}{20}\,\text{uur}$.
- Duur van heen- en terugrit samen: $\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{20}\right)$ uur = 0,4 uur.
- De gemiddelde snelheid bedraagt dus : $\frac{8\,\text{km}}{0{,}4\,\text{uur}}$ = 20 km/h.

Conclusie:

Om een gemiddelde snelheid van 20 kilometer per uur te bekomen, moet de snelheid gedurende de terugrit 26,7 kilometer per uur bedragen.

Oplossing situatie 4

Exploreren

Stellen we de snelheid tijdens de terugrit gelijk aan v km/h.

- We gaan na welke snelheid Johan tijdens de terugrit moet ontwikkelen om een gemiddelde snelheid van 30 km/h te bereiken.
  $\frac{1}{16}+\frac{1}{v}=\frac{2}{30} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{v}=\frac{2}{30}-\frac{1}{16} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{v}=0{,}0041666667 \quad \Leftrightarrow \quad v=240$.
  Blijkbaar moet de snelheid tijdens de terugrit al 240 kilometer per uur bedragen!!!

- En welke snelheid zou Johan tijdens de terugrit moeten ontwikkelen om een gemiddelde snelheid van 40 km/h te bereiken?
  $\frac{1}{16}+\frac{1}{v}=\frac{2}{40} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{v}=\frac{2}{40}-\frac{1}{16} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{v}=-0{,}0125 \quad \Leftrightarrow \quad v=-80$.
  We bekomen hier een negatieve snelheid, wat uiteraard onmogelijk is. Dat betekent dat een gemiddelde snelheid van 40 kilometer per uur niet te verwezenlijken is!

De gemiddelde snelheid kan dus niet onbeperkt groot worden! De maximale gemiddelde snelheid zal liggen tussen 30 km/h en 40 km/h.

Mathematiseren

Stellen we de snelheid (in km/h) tijdens de terugrit gelijk aan v en de gemiddelde snelheid gelijk aan v_m . Dan geldt: $\frac{1}{16}+\frac{1}{v}=\frac{2}{v_m}$.

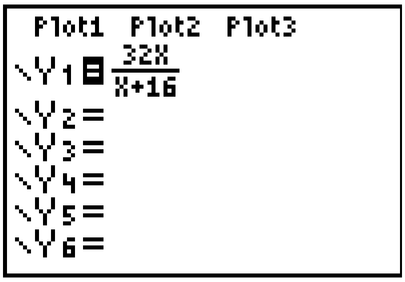
We zullen nagaan welke waarden v_m aanneemt als v steeds groter wordt.

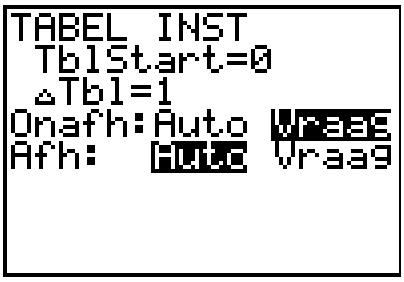
Berekenen

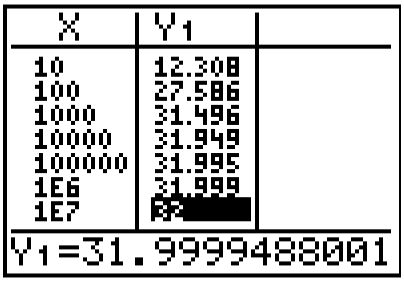
$$\frac{1}{16}+\frac{1}{v}=\frac{2}{v_m} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{v}{16v}+\frac{16}{16v}=\frac{2}{v_m} \quad \Leftrightarrow \frac{v+16}{16v}=\frac{2}{v_m} \quad \Leftrightarrow \quad v_m=2.\frac{16v}{v+16} \quad \Leftrightarrow \quad v_m=\frac{32v}{v+16}$$

We moeten nu nagaan welke waarden v_m zal aannemen als v steeds groter wordt.

Anders gezegd: we onderzoeken de functiewaarden van de functie $y=\frac{32x}{x+16}$ voor steeds groter wordende x-waarden. We doen hiervoor beroep op de grafische rekenmachine:







Blijkbaar worden de functiewaarden niet groter dan 32.

Controleren

We concentreren ons nog eens op de uitdrukking: $\frac{1}{16}+\frac{1}{v}=\frac{2}{v_m}$.

Het linkerlid moet zeker groter zijn dan $\frac{1}{16}$; het rechterlid dus ook.

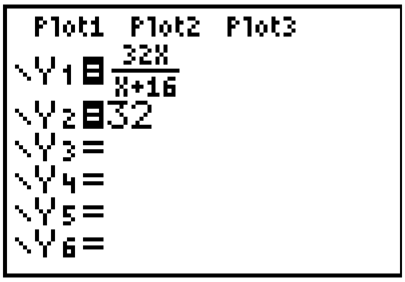
Bijgevolg moet $\frac{2}{v_m}>\frac{1}{16}$. Hieruit volgt dat v_m kleiner blijft dan 32.

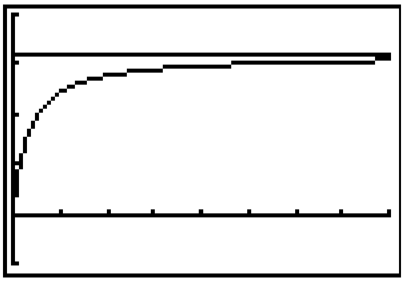
Conclusie:

Als de snelheid tijdens de heenrit 16 kilometer per uur bedraagt, dan blijft de gemiddelde snelheid steeds onder 32 kilometer per uur.

Merk op:

De rechte y = 32 is een horizontale asymptoot van de functie $y=\frac{32x}{x+16}$:





7.3. Lopen en zwemmen

Exploreren

- Het verband tussen snelheid v, tijd t en afstand s is: $v = \frac{s}{t}$. Hieruit volgt dat $t = \frac{s}{v}$.

- Het water in de rivier stroomt heel traag. We mogen er dus van uitgaan dat de snelheid van het water de zwemsnelheid van Bart nauwelijks zal beïnvloeden.

- Misschien zijn we geneigd te denken dat hij best eerst 100 meter loopt en daarna dan recht de rivier overzwemt. Dan zwemt hij immers de kortst mogelijke afstand.

  Zijn tijd nodig om te lopen, is dan gelijk aan: $\frac{100\ m}{200\ m/\text{min}} = \frac{1}{2}\ \text{min}$.

  Zijn tijd nodig om te zwemmen, is dan gelijk aan: $\frac{30\ m}{50\ m/\text{min}} = \frac{3}{5}\ \text{min}$.

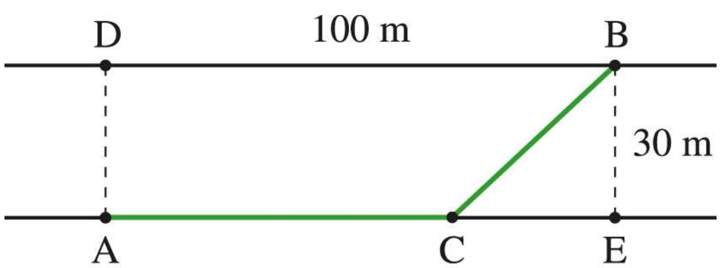
  Zijn totale tijd bedraagt dan: $\frac{1}{2}\ \text{min} + \frac{3}{5}\ \text{min} = \frac{11}{10}\ \text{min} = 66\ \text{sec}$.

- Misschien kan hij opteren voor de kortste weg; dit is dan de hele tijd rechtdoor vanaf het startpunt tot de eindbestemming. Maar dat zou betekenen dat Bart de hele tijd moet zwemmen. Wellicht zal dat niet de beste tijd opleveren.

  We rekenen deze tijd toch even na. Met behulp van de stelling van Pythagoras vinden we dat de af te leggen zwemafstand (in m) gelijk is aan $\sqrt{100^2 + 30^2} = 104{,}4030651$.

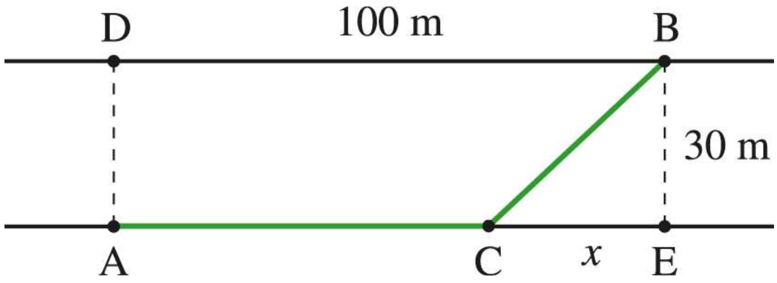
  De tijd nodig om deze afstand te zwemmen: $\frac{104{,}4030651\ m}{50\ m/\text{min}} = 2{,}088061302\ \text{min} \approx 125{,}3\ \text{sec}$.

Wellicht zal de snelste tijd bereikt worden door een combinatie van lopen en zwemmen.
We stellen dit even voor op een figuur:



Stel dat Bart zich in punt A bevindt, dan moet hij proberen zo snel mogelijk punt B te bereiken. Dat zal hij doen door een combinatie van lopen en zwemmen: hij loopt eerst van A tot C en vanaf C zwemt hij dan recht naar B.

Mathematiseren



- We stellen $|CE| = x$.

  Dan geldt: $|AC| = 100 - x$ en $|BC| = \sqrt{30^2 + x^2}$ (met de stelling van Pythagoras).

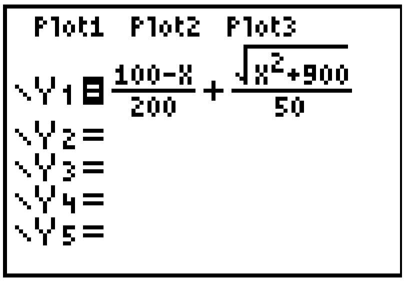
- De tijd (in minuten) nodig om te lopen van *A* naar *C* is: $\dfrac{100 - x}{200}$.

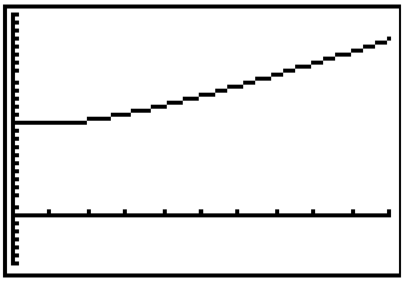
  De tijd (in minuten) nodig om te zwemmen van *C* naar *B* is: $\dfrac{\sqrt{x^2 + 900}}{50}$.

  De totale tijd (in minuten) is bijgevolg: $\dfrac{100 - x}{200} + \dfrac{\sqrt{x^2 + 900}}{50}$.

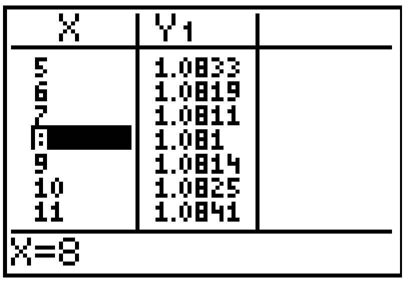
- We moeten nu *x* zoeken zodat $\dfrac{100 - x}{200} + \dfrac{\sqrt{x^2 + 900}}{50}$ zo klein mogelijk wordt.

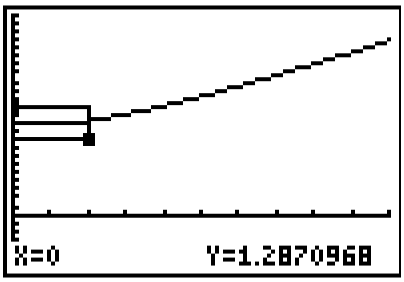
Berekenen

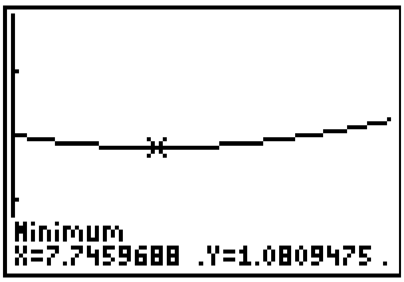




Op deze grafiek is het niet duidelijk te zien waar het minimum zich bevindt, maar uit de tabel maken we op dat dit minimum zich zal voordoen voor een *x*-waarde niet ver van 8.
We zoomen daarom wat in om het minimum precies te kunnen bepalen.





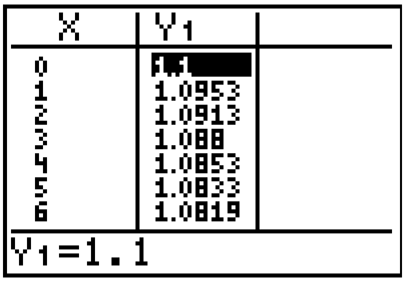


We stellen vast dat we een minimum bereiken als x gelijk aan 7,7459688. Dat wil zeggen dat Bart eerst $100\ m - 7{,}75\ m = 92{,}25\ m$ moet lopen alvorens te beginnen zwemmen.
Zijn minimumtijd bedraagt $1{,}080947502 \text{ min} \approx 64{,}9 \text{ sec}$.

Controleren

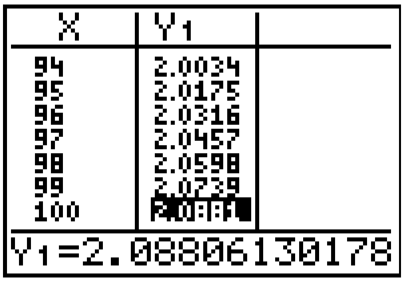
We bekijken nog even de twee ‘speciale’ gevallen die we tijdens het exploreren hebben besproken.
Opteert Bart voor 100 m lopen en dan recht de rivier overzwemmen, dan is x = 0.
Kiest hij voor de kortste weg (dus de hele tijd zwemmen), dan is x = 100.

Onze gevonden resultaten tijdens het exploreren, worden bevestigd door de grafische rekenmachine:



X	Y1
0	1.1
1	1.0953
2	1.0913
3	1.088
4	1.0853
5	1.0833
6	1.0819

Y1=1.1



X	Y1
94	2.0034
95	2.0175
96	2.0316
97	2.0457
98	2.0598
99	2.0739
100	2.0881

Y1=2.08806130178

Conclusie:

Om zo snel mogelijk zijn doel te bereiken, moet Bart eerst 92,25 meter lopen en daarna de rivier overzwemmen.
Zijn minimumtijd bedraagt 64,9 seconden.

7.4. Militair dilemma

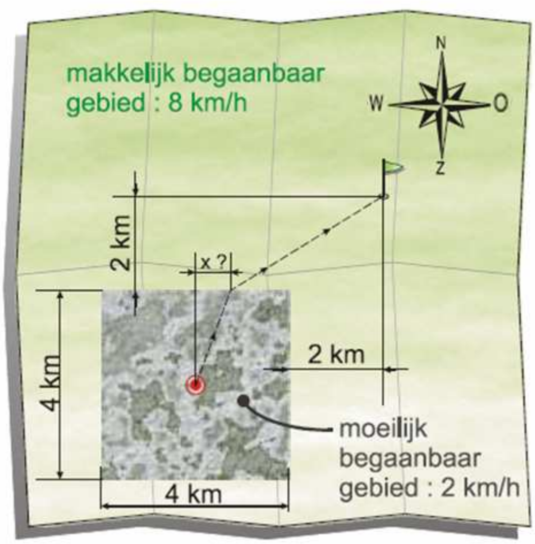
Exploreren

- Misschien zijn we geneigd te denken dat de militairen best een zo kort mogelijke afstand afleggen in het onherbergzame gebied, want daar vorderen ze immers het traagst.
  Dat zou dan betekenen dat ze vanuit het centrum noordwaarts trekken en bijgevolg slechts 2 km hoeven te stappen in het onherbergzame gebied. Daarvoor hebben ze dan juist 1 uur nodig.
  Dan moeten ze nog in noordoostelijke richting verder stappen op de goed begaanbare grond. Met de stelling van Pythagoras vinden we dat ze dan nog $\sqrt{4^2+2^2}$ km, dit is ongeveer 4,472 km op de goed begaanbare grond moeten stappen. Aangezien ze daar kunnen vorderen aan een snelheid van 8 km/h, zullen ze hier ongeveer $\frac{4{,}472}{8}=0{,}559$ uur voor nodig hebben, dit is ongeveer 33,5 minuten.
  In totaal zouden de militairen dan ongeveer 1 uur 33,5 minuten stappen.

- Misschien kunnen we opteren voor de kortste weg; dit is dan de hele tijd rechtdoor vanaf het startpunt tot de eindbestemming. Met andere woorden: de hele tijd in noordoostelijke richting stappen.
  In beide gebieden zullen de militairen dan even veel kilometer afleggen, namelijk
  $\sqrt{2^2+2^2} \approx 2{,}8284$. De tijd hiervoor nodig is:
  * moeilijk begaanbaar: $\frac{2{,}8284}{2}$ uur $\approx 1{,}4142$ uur ≈ 1 uur 24 min 51 sec.
  * goed begaanbaar: $\frac{2{,}8284}{8}$ uur $\approx 0{,}35355$ uur ≈ 21 min 13 sec.
  In totaal zouden de militairen dan ongeveer 1 uur 46 minuten stappen.

Wellicht zal geen van beide voorstellen de snelste route zijn. Eigenlijk is de hamvraag: op welke plaats kun je het best het vierkante stuk grond verlaten, om over te stappen in beter begaanbaar gebied.

Afhankelijk van de onbekende afstand - die we gelijk stellen aan *x* – zal er een deel afgelegd moeten worden in slecht begaanbare grond en een deel in goed begaanbare.



Mathematiseren

- Met de stelling van Pythagoras vinden we de af te leggen weg (in km) in onherbergzaam gebied: $\sqrt{x^2+2^2}=\sqrt{x^2+4}$.
- Op goed begaanbare grond is die afstand: $\sqrt{(4-x)^2+2^2}=\sqrt{(4-x)^2+4}$.
- De respectievelijke tijden (in uur) die hiervoor nodig zijn, hangen telkens af van de snelheden.

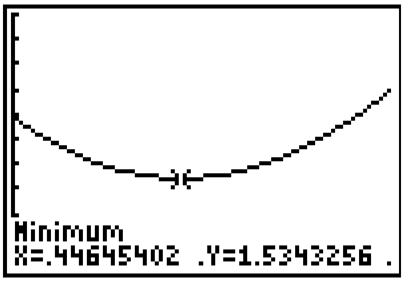
  * De tijd die nodig is om in het onherbergzame gebied te stappen: $\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{2}$.

  * De tijd die nodig is om op de goed begaanbare grond te stappen: $\dfrac{\sqrt{(4-x)^2+4}}{8}$.
- We moeten nu *x* zoeken zodat $\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{2}+\dfrac{\sqrt{(4-x)^2+4}}{8}$ zo klein mogelijk wordt.

Berekenen

```
 Plot1  Plot2  Plot3
\Y1 = √(X²+4)/2 + √((4-X)²...)/8
\Y2 =
\Y3 =
\Y4 =
\Y5 =
```

```
VENSTER
 Xmin=0
 Xmax=1
 Xschaal=.1
 Ymin=1.5
 Ymax=1.6
 Yschaal=.01
 Xres=1
```



We vinden een minimum voor *x* = 0,44645402 (km).
De tijd die hoort bij deze *x* is 1,5343256 uur. Dit is ongeveer 1 uur 32 min.

Controleren

We bekijken nog even de twee ‘speciale’ gevallen die we tijdens het exploreren hebben besproken.
Opteren we voor een zo kort mogelijke afstand in het onherbergzame gebied, dan is *x* = 0.
Kiezen we voor de kortste weg in totaal, dan is *x* = 2.
We laten de grafische rekenmachine een tabel geven voor x van 0 tot 2 met stapjes van 0,1:

X	Y1
0	1.559
.1	1.5491
.2	1.5418
.3	1.5369
.4	1.5346
.5	1.5347
.6	1.5371

X=0

X	Y1
.7	1.5418
.8	1.5487
.9	1.5577
1	1.5687
1.1	1.5816
1.2	1.5963
1.3	1.6127

X=.7

X	Y1
1.4	1.6307
1.5	1.6502
1.6	1.6711
1.7	1.6934
1.8	1.717
1.9	1.7418
2	1.7678

X=2

Hierop merken we dat:
- als *x* = 0, dan hebben ze ongeveer 1,559 uur nodig, dit is ongeveer 1 uur 33,5 minuten.
  Dat klopt met wat we tijdens het exploreren vonden.
- als *x* = 2, dan stappen ze ongeveer 1,7678 uur, dit is ongeveer 1 uur 46 minuten. Ook dat klopt!

Conclusie:

Om de snelste route te hebben, moet het onherbergzame grondgebied verlaten worden op de positie *x* = 0,446 km. Dan zullen de militairen de eindbestemming bereiken na ongeveer 1 uur 32 minuten.

7.5. Pompen of niet?

Exploreren

MET POMP

- Als we uitsluitend de pomp gebruiken, dan is het vat leeg na $\frac{8000}{60}$ minuten of dus na 133,33 minuten; dit is na 2 uur 13 minuten 20 seconden.

- Als we pompen, dan daalt de waterspiegel met een constante snelheid. We passen de regel van drieën toe:

  8 000 liter heeft een hoogte van 320 cm.

  $\downarrow$: 8 000 $\qquad\qquad$ $\downarrow$: 8 000

  1 liter heeft een hoogte van $\frac{320}{8000}$ cm.

  $\downarrow$ x 60 $\qquad\qquad$ $\downarrow$ x 60

  60 liter heeft een hoogte van $\frac{320.60}{8000}$ cm = 2,4 cm.

  Bij het pompen daalt de waterspiegel dus 2,4 cm per minuut.

ZONDER POMP

- Gebruiken we de pomp niet, dan is het vat leeg na 200 minuten; dit is na 3 uur 20 minuten.

- We stellen echter vast dat de waterspiegel in het begin sneller daalt zonder pomp dan met pomp. Gedurende de eerste 10 minuten bijvoorbeeld, is de waterspiegel 31 cm gedaald; dit is 3,1 cm per minuut.
  Uiteraard vermindert de daalsnelheid van de waterspiegel naarmate er minder water in het vat zit. Dat is logisch; de druk neemt immers af.

Conclusie:
Om de kortste tijd te realiseren, laten we in het begin het water lopen zonder pomp en schakelen we na enige tijd de pomp in.

Werkwijze:
- We zullen de hoogte van de waterspiegel proberen te bepalen in functie van de tijd, met en zonder pomp.
- Dan gaan we op zoek naar het tijdstip waarop de daalsnelheid van de waterspiegel even groot is met als zonder pomp.

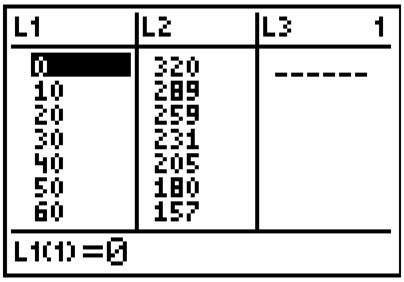
Mathematiseren

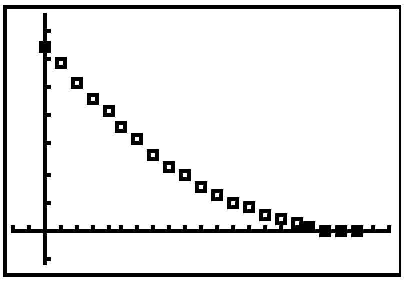
MET POMP

Uit de exploratie weten we dat bij het pompen de waterspiegel daalt met 2,4 cm per minuut.
Met pomp kan de hoogte h_1 (in cm) van de waterspiegel in functie van de tijd *t* (in minuten) bijgevolg weergegeven worden door de formule: $h_1(t) = 320 - 2{,}4t$.

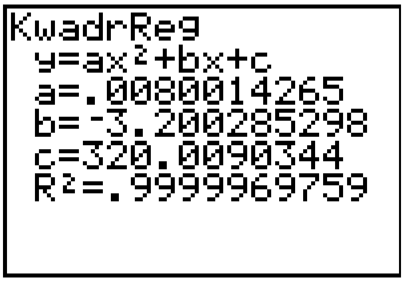
ZONDER POMP

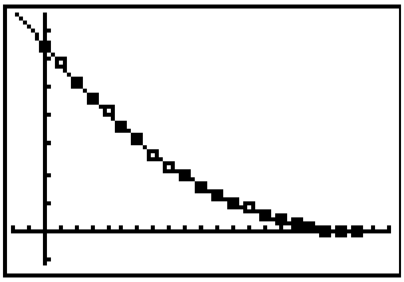
We plaatsen de gegeven tijden en de bijhorende hoogtes in lijsten en proberen via een gepast regressiemodel het verband tussen beide weer te geven.





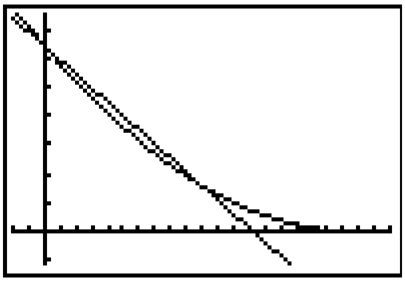
Op de puntenwolk zien we dat we het model wellicht goed zullen kunnen benaderen via kwadratische regressie.

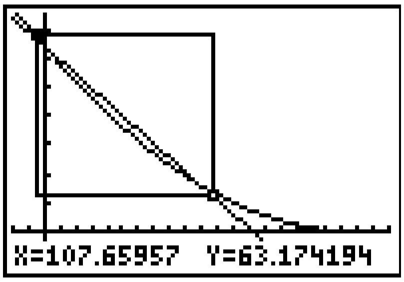


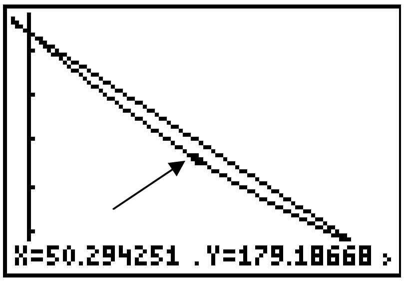


Zonder pomp kan de hoogte h_2 (in cm) van de waterspiegel in functie van de tijd *t* (in minuten) bijgevolg weergegeven worden door de formule: $h_2(t) = 0{,}008t^2 - 3{,}2t + 320$.

We laten de grafieken van h_1 en h_2 samen plotten en zoomen daarna wat in.







Tijdens het exploreren hebben we vastgesteld dat de waterspiegel in het begin sneller daalt zonder pomp dan met pomp. Deze vaststelling wordt hier door de grafieken bevestigd: in het begin daalt de grafiek van h_2 sneller dan de grafiek van h_1.
In de omgeving van de pijl (rond *t* = 50 dus) stellen we vast dat beide grafieken ongeveer even steil zijn en daarna daalt de grafiek van h_1 sneller dan de grafiek van h_2.

Berekenen

Om dat overgangspunt precies te kunnen bepalen, moeten we *t* zoeken waarvoor de afgeleiden van h_1 en h_2 aan elkaar gelijk zijn:

$$h'_1(t) = h'_2(t)$$
$$\Leftrightarrow \quad -2{,}4 = 0{,}016t - 3{,}2$$
$$\Leftrightarrow \quad 0{,}016t = 0{,}8$$
$$\Leftrightarrow \quad t = 50$$

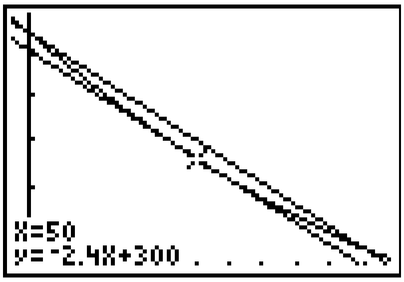
Dat betekent dus dat we gedurende de eerste 50 minuten zonder pomp werken en daarna met pomp.

Na 50 minuten staat het water nog 180 cm hoog. Immers: $h_2(50) = 180$.
Dan schakelen we de pomp in die de waterspiegel verder doet dalen met 2,4 cm per minuut.
We zullen nu nog 75 minuten moeten pompen. Immers: $\dfrac{180}{2{,}4} = 75$.
Het vat is dan leeg in 125 minuten; dit is in 2 uur 5 minuten.

Controleren

Vooreerst stellen we vast dat de bekomen tijd inderdaad zeker al korter is dan de tijden die we met en zonder pomp bekomen hebben tijdens het exploreren.

Voor alle zekerheid laten we nog even de raaklijn plotten aan de grafiek van h_2 voor *t* = 50.



We stellen vast dat de raaklijn inderdaad evenwijdig is met de grafiek van h_1 (zelfde richtingscoëfficiënt).

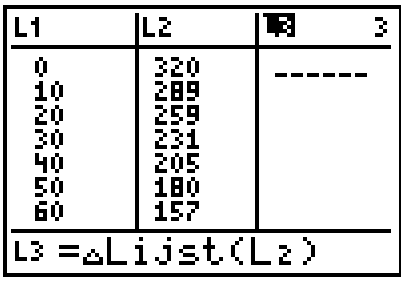
Conclusie:

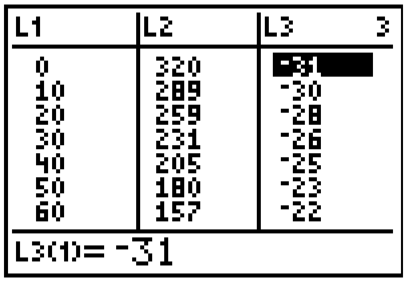
De kortst mogelijke tijd om het vat leeg te maken is 2 uur 5 minuten.
Om dit te bekomen gebruiken we gedurende de eerste 50 minuten geen pomp; daarna schakelen we de pomp in tot het vat leeg is.

Alternatieve werkwijze

We kunnen dit probleem ook oplossen zonder gebruik te maken van afgeleiden.

Stel L3 = Δ Lijst (L2)





Zonder pomp daalt de waterspiegel gedurende de eerste 10 minuten dus 31 cm, tussen de 10de en de 20ste minuut bedraagt de daling 30 cm, tussen de 20ste en 30ste minuut 28 cm, tussen de 30ste en 40ste minuut 26 cm en tussen de 40ste en 50ste minuut 25 cm.
In die periode daalt het water dus rapper zonder pomp dan met pomp.

Tussen de 50ste en 60ste minuut echter daalt de waterspiegel 23 cm. Dat gaat dus trager dan met de pomp.

Uit deze beschouwingen kunnen we opmaken dat het keerpunt wellicht rond de 50ste minuut zal liggen, wat overeenkomt met de vaststelling tijdens onze eerste werkwijze.

Het voordeel van deze alternatieve werkwijze is dat ze veel korter en eenvoudiger is.
Het nadeel echter is dat we hier niet helemaal zeker zijn over die 50ste minuut. Het had even goed enkele minuten minder of meer kunnen geweest zijn.

7.6. Afmetingen van een bak

1) Wat moet de oppervlakte van de opening bovenaan zijn om 20 liter te kunnen opvangen?

De opening zal in ieder geval groter moeten zijn.
We kunnen die bijvoorbeeld vinden door toepassing van de regel van drieën:

We hebben 15 liter als de oppervlakte 21,6 dm² is.

↓ : 3 ↓ : 3

We hebben 5 liter als de oppervlakte $\frac{21{,}6}{3}$ dm² is.

↓ x 4 ↓ x 4

We hebben 20 liter als de oppervlakte $\frac{21{,}6 \,.\, 4}{3}$ dm² = 28,8 dm² is.

2) Het is wellicht handiger om de lengte en de breedte in cm uit te drukken. Daarom zullen we de oppervlakten in cm² uitdrukken.

De oppervlakte van de afgebeelde bak is 2160 cm².
De grotere bak heeft een oppervlakte gelijk aan 2880 cm².

3) Stellen we x de lengte (in cm) van de afgebeelde bak. Dan is de breedte (in cm): $\frac{2160}{x}$.

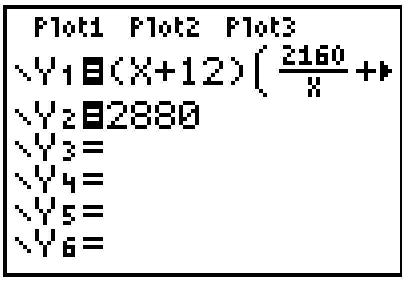
Dan zou de lengte van de grotere bak gelijk zijn aan x + 12 en de breedte $\frac{2160}{x} + 4$.

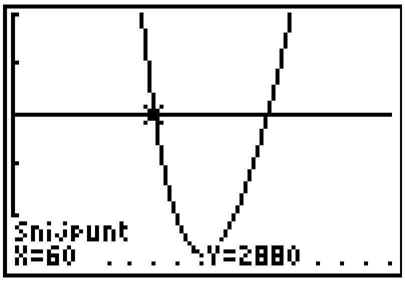
De oppervlakte (in cm²) is dan $(x+12)\left(\frac{2160}{x}+4\right)$ en die moet gelijk zijn aan 2880.

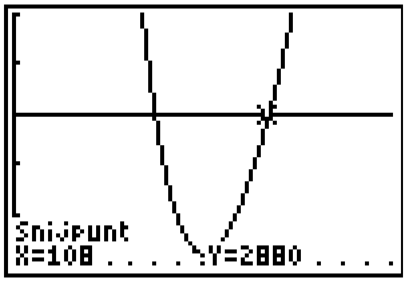
We moeten dus de vergelijking $(x+12)\left(\frac{2160}{x}+4\right) = 2880$ oplossen.

4) Om die vergelijking op te lossen kunnen we beroep doen op de GRM. Dit kan op verschillende manieren, bijvoorbeeld:

* door de snijpunten te zoeken van twee functies:







* door de vergelijking $(x+12)\left(\dfrac{2160}{x}+4\right)=2880$ te herwerken tot een tweedegraadsvergelijking en dan de nulwaarden te zoeken:

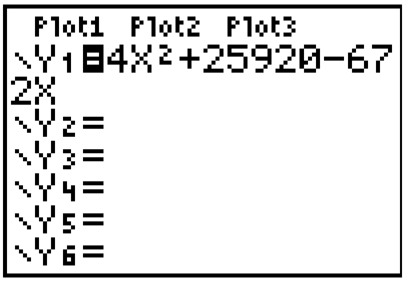
$$(x+12)\left(\frac{2160}{x}+4\right)=2880$$

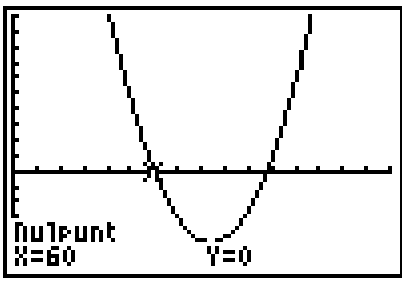
$$\Leftrightarrow\ 2160+4x+\frac{25920}{x}+48-2880=0$$

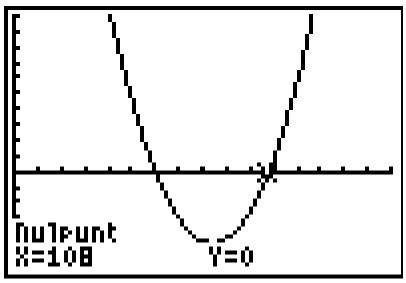
$$\Leftrightarrow\ 4x+\frac{25920}{x}-672=0$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{4x^2+25920-672x}{x}=0$$

$$\Leftrightarrow\ 4x^2+25920-672x=0$$







<u>Merk op</u>

We hadden die tweedegraadsvergelijking uiteraard ook manueel kunnen oplossen (oefening!)

5) We berekenen nu de afmetingen van de afgebeelde bak. Er zijn blijkbaar twee mogelijkheden:

* ofwel is de lengte 60 cm, dan is de breedte $\frac{2160}{60}$ cm = 36 cm

* ofwel is de lengte 108 cm, dan is de breedte $\frac{2160}{108}$ cm = 20 cm

De afgebeelde bak beantwoordt duidelijk aan de eerste mogelijkheid.

6) We controleren nog even onze gevonden resultaten.

Geval 1: lengte = 60 cm en breedte = 36 cm.

Dan is de oppervlakte van de opening: 60 cm . 36 cm = 2160 cm². Dat klopt met de gegevens!

De lengte van de grotere bak zou dan 72 cm zijn en de breedte 40 cm.
De oppervlakte is dan 72 cm . 40 cm = 2880 cm². Ook dat klopt!

Geval 2: lengte = 108 cm en breedte = 20 cm.

Dan is de oppervlakte van de opening: 108 cm . 20 cm = 2160 cm². Klopt!!

De lengte van de grotere bak zou dan 120 cm zijn en de breedte 24 cm.
De oppervlakte is dan 120 cm . 24 cm = 2880 cm². Klopt!!

Conclusie:

De lengte en breedte van de afgebeelde bak zijn respectievelijk 60 cm en 36 cm.

Een bak met een lengte van 108 cm en een breedte van 20 cm, voldoet ook aan de cijfergegevens, maar de vorm van die bak komt niet overeen met de vorm van de afgebeelde bak.

Merk op:

We hebben dit probleem opgelost door de lengte gelijk te stellen aan x.

Probeer nu eens het probleem op te lossen door de breedte gelijk te stellen aan x.

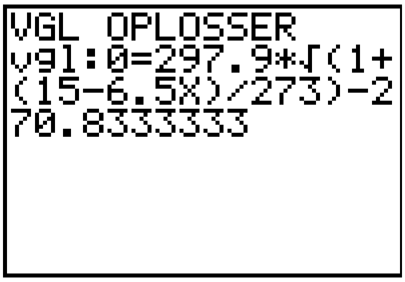
7.7. Geluidssnelheid in de atmosfeer

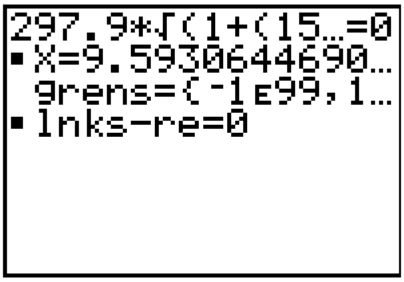
- Als de temperatuur op 0 km hoogte 15° C bedraagt e n op 10 km hoogte – 50° C, dan is ze 65° C gedaald op 10 km. Deze daling gebeurt lineair, d.w.z. dat ze dus met 6,5° C per km daalt. Het verband tussen de temperatuur *T* (in ° C) en de hoogte *h* (in km) kan dus weergegeven worden door de volgende formule: $T = 15 - 6{,}5.\,h$.

- Het verband tussen de snelheid van het geluid *v* (in m/sec) en de hoogte *h* (in km) is bijgevolg: $v = 331.\sqrt{1+\frac{15-6{,}5.h}{273}}$.

- Het verband tussen de maximale snelheid van het vliegtuig v_{vl} (in m/sec) en de hoogte *h* (in km) is dan: $v_{vl} = 0{,}9.331.\sqrt{1+\frac{15-6{,}5.h}{273}}$ of dus $v_{vl} = 297{,}9.\sqrt{1+\frac{15-6{,}5.h}{273}}$.

- 975 km/h = 270,8333333 m/sec.
  We moeten dus narekenen voor welke waarde van *h* geldt dat v_{vl} = 270,8333333.





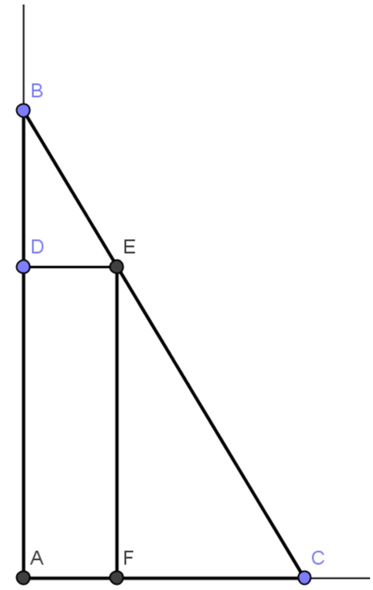
Het vliegtuig zal dus 9,6 km hoog moeten vliegen.

<u>Conclusie:</u>

Wil het vliegtuig een snelheid van 975 km/h halen, dan zal het 9,6 km hoog moeten vliegen.

7.8. Minimale lengte van een ladder

We stellen de gegeven situatie best even voor op een figuur.



De ladder stellen we voor door het lijnstuk [BC].

De ladder steunt tegen de schutting [EF] en rust tegen de muur van het huis in het punt B.

We weten dat |AD| = |EF| = 4 en |AF| = 1.

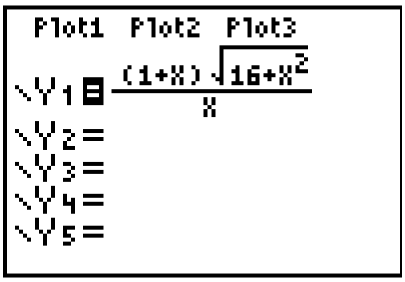
Gevraagd is de kleinst mogelijke waarde van |BC|.

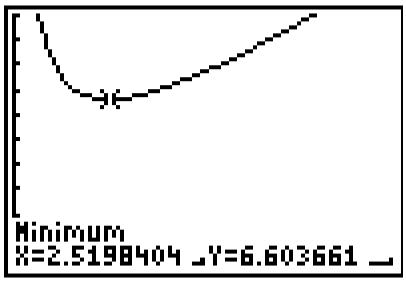
Als we C heel dicht bij F nemen, dan zullen we een heel lange ladder nodig hebben om de muur van het huis te kunnen bereiken, want die ladder zal heel steil moeten staan.

Nemen we C ver van F, dan zullen we eveneens een lange ladder nodig hebben. Het punt B zal dan wel niet hoog komen te liggen, maar de afstand |CE| zal dan heel lang zijn.

Conclusie: we zullen C moeten weten te vinden zodat |BC| zo klein mogelijk is. C zal dus niet al te dicht, maar ook niet al te ver van F mogen liggen.

- De driehoeken ΔABC en ΔFEC zijn gelijkvormig (hun overeenkomstige hoeken zijn immers even groot). Hieruit volgt dat $\dfrac{|BC|}{|EC|} = \dfrac{|AC|}{|FC|}$.
- Stellen we |FC| = x, dan is |AC| = 1 + x en met de stelling van Pythagoras in ΔFEC vinden we dat $|EC| = \sqrt{4^2 + x^2} = \sqrt{16 + x^2}$.
- Hieruit volgt nu dat $\dfrac{|BC|}{\sqrt{16 + x^2}} = \dfrac{1 + x}{x}$, of nog: $|BC| = \dfrac{(1 + x).\sqrt{16 + x^2}}{x}$.
  We moeten nu x bepalen zodat |BC| zo klein mogelijk is.
- We zoeken het minimum van de functie met voorschrift $f(x) = \dfrac{(1 + x).\sqrt{16 + x^2}}{x}$.





We vinden een minimum voor *x* = 2,5198404. De bijbehorende functiewaarde is 6,603661.

<u>Conclusie:</u>

De ladder moet minimaal 6,60 meter lang zijn.

Merk op: we hadden dit probleem ook nog op andere manieren kunnen oplossen.

ANDERE WERKWIJZE

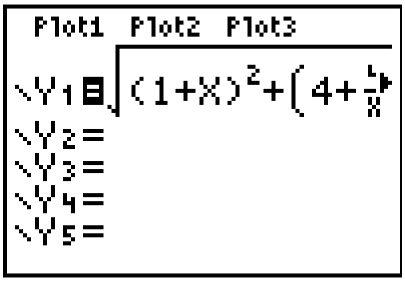
- De driehoeken ΔDBE en ΔFEC zijn gelijkvormig (hun overeenkomstige hoeken zijn immers even groot). Hieruit volgt dat $\dfrac{|DB|}{|FE|} = \dfrac{|DE|}{|FC|}$.

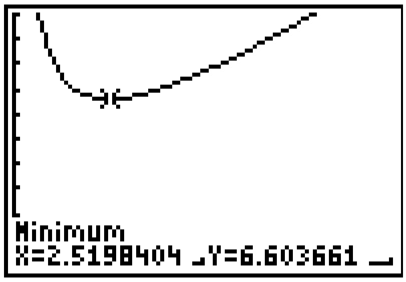
- Stellen we |FC| = x, dan is $\dfrac{|DB|}{4} = \dfrac{1}{x}$. Bijgevolg is $|DB| = \dfrac{4}{x}$.

- We passen nu de stelling van Pythagoras toe in ΔABC: $|BC| = \sqrt{(1+x)^2 + \left(4 + \dfrac{4}{x}\right)^2}$.

  We moeten nu x bepalen zodat |BC| zo klein mogelijk is.

- We zoeken het minimum van de functie met voorschrift $g(x) = \sqrt{(1+x)^2 + \left(4 + \dfrac{4}{x}\right)^2}$.





We vinden een minimum voor x = 2,5198404. De bijbehorende functiewaarde is 6,603661.
We komen dus tot dezelfde conclusie.

☞ *De grafieken van de functies g en f (zie eerste werkwijze) lijken dezelfde.*
Kan je aantonen dat f en g inderdaad aan elkaar gelijk zijn?

☞ *Uit de vorige twee werkwijzen hebben we ook nog de (weliswaar niet gevraagde) informatie dat de voet van een ladder van 6,60 meter lang, zich dan op 2,52 meter van de schutting moet bevinden.*

NOG EEN ANDERE WERKWIJZE

- Beschouwen we de rechte AC als de x-as en de rechte AB als de y-as.
  We weten dat de rechte BC het punt E(1,4) bevat, maar de richtingscoëfficiënt van die rechte kennen we niet. Stellen we deze gelijk aan m.

  De vergelijking van de rechte BC is dan $y-4=m(x-1)$, of nog: $y=mx-m+4$.

- Hieruit kunnen we nu de coördinaten van de punten B en C berekenen:

  * Als x = 0, dan is $y=-m+4$. Bijgevolg: $B(0,4-m)$ en dus is $|AB|=4-m$.

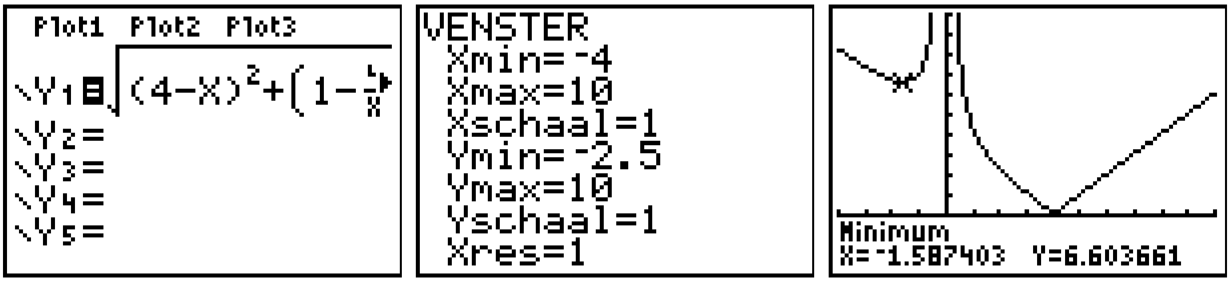
  * Als y = 0, dan is $x=\dfrac{m-4}{m}=1-\dfrac{4}{m}$. Bijgevolg: $C\left(1-\dfrac{4}{m},0\right)$ en dus is $|AC|=1-\dfrac{4}{m}$.

- We passen nu de stelling van Pythagoras toe in $\Delta\, ABC$: $|BC|=\sqrt{(4-m)^2+\left(1-\dfrac{4}{m}\right)^2}$.

  We moeten nu m bepalen zodat |BC| zo klein mogelijk is.

- We zoeken het minimum van de functie met voorschrift $h(x)=\sqrt{(4-x)^2+\left(1-\dfrac{4}{x}\right)^2}$.

  Opgepast: aangezien de rechte BC dalend is, moeten we dit minimum aan de linkerkant van de y-as zoeken!!



We vinden een minimum voor $x=-1{,}587403$. De bijbehorende functiewaarde is 6,603661.
We komen dus tot dezelfde conclusie.

Hier vinden we als bijkomende informatie dat de helling van de ladder $-1{,}59$ bedraagt.
Dat betekent dat de ladder dan een hoek maakt van ongeveer 58° met de grond (reken na!).

'Mathematiseren en oplossen van problemen' maakt deel uit van de verplichte leerplandoelstellingen in de derde graad kso/tso. Uiteraard komen er in elk leerstofonderdeel wiskunde veel vraagstukken of problemen aan bod, maar deze volstaan niet om dit onderwerp te realiseren. De bedoeling is de leerlingen te confronteren met problemen die voor hen niet meteen een routineoefening betekenen, maar wel een analyse (exploratie) vereisen. Het verwerken van allerlei problemen met behulp van wiskunde kan zo bij de leerlingen opvattingen en houdingen ontwikkelen over wiskunde. Zo kunnen ze zich realiseren dat wiskunde meer is dan een stel regels, maar effectief kan ingezet worden om problemen uit het dagelijkse leven op te lossen of tenminste om er inzicht in te verwerven.

Dit cahier biedt heel wat inspirerende opdrachten die in de lessen 'mathematiseren en oplossen van problemen' aan bod kunnen komen. Hierbij gaat de aandacht zowel naar studierichtingen met weinig uren wiskunde als naar studierichtingen met een sterke(re) wiskundige component.
De aangeboden opdrachten zijn problemen waarbij de leerlingen bewust gebruik leren maken van mogelijke oplossingsstrategieën (heuristieken) en waarbij ze de verschillende fasen van het oplossingsproces duidelijk leren expliciteren.
Waar de gelegenheid zich voordoet, maken we functioneel gebruik van de grafische rekenmachine.
Verder besteden we aandacht aan de opbouw van een leerlijn van het eerste tot het zesde jaar secundair en geven we concrete tips betreffende werkvormen en evaluatie.

Geert Delaleeuw is pedagogisch adviseur wiskunde, leraar wiskunde aan het Technisch Instituut Heilige Familie te Ieper en lid van de stuurgroep van T³ Vlaanderen.

maart 2013