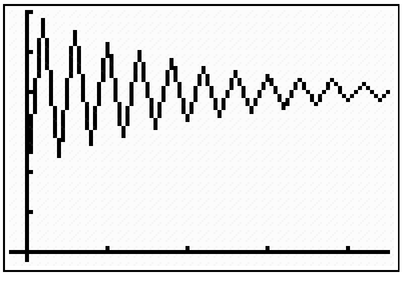
T³ VLAANDEREN

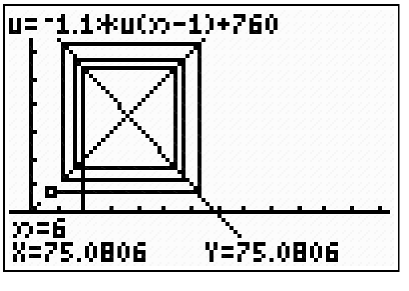
Cahiers T³ Europe
Vlaanderen nr. 19

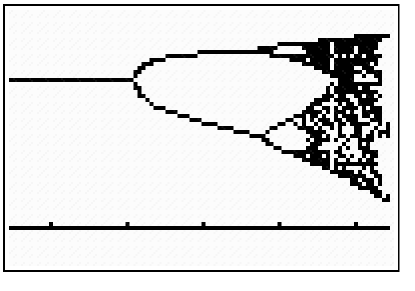
Discrete dynamische systemen

Recursievergelijkingen met de TI-84

Johan Deprez







KATHOLIEKE UNIVERSITEIT LEUVEN

Discrete dynamische systemen

Johan Deprez

HUBrussel, Universiteit Antwerpen, Katholieke Universiteit Leuven

Inhoud

1. Inleiding

Discrete dynamische systemen

In de afgelopen dertig jaar heeft het wiskundeonderwijs in Vlaanderen grondige veranderingen ondergaan. Eén van die veranderingen is de grotere aandacht voor toepassingen van wiskunde in andere domeinen. Een situatie die daarbij vaak voorkomt, is het beschrijven van een grootheid, zeg *x*, die tijdsafhankelijk is. Wiskundige modellen die dergelijke tijdsafhankelijke fenomenen beschrijven, zijn *dynamische* modellen. Bij *discrete* dynamische modellen wordt de tijd opgevat als een discrete veranderlijke, d.w.z. dat de tijd alleen gehele waarden aanneemt, bv. 0, 1, 2, 3, ... De grootheid *x* neemt dan waarden x_0, x_1, x_2, x_3, ... aan, m.a.w. de evolutie van de grootheid wordt beschreven door een *rij van getallen*.

Bij het opstellen van wiskundige modellen vertrekt men vaak niet van de veranderlijke grootheid zelf, maar van informatie over de manier waarop die grootheid verandert, d.w.z. van $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, $x_3 - x_2$, ... Op basis van deze informatie moet men dan achteraf de gepaste rij proberen te vinden. Bij de groei van een populatie kan men bijvoorbeeld vertrekken van de hyposthese dat de groei evenredig is met de grootte van de populatie, d.w.z. dat $x_n - x_{n-1} = kx_{n-1}$ voor alle $n \geq 1$, waarbij *k* een (al dan niet gekend) getal is. Een equivalente vorm is $x_n = (1+k)x_{n-1}$. We zien dat de hypothese wiskundig uitgedrukt wordt door een *recursievergelijking*. De rijen die voldoen aan deze recursievergelijking zijn de meetkundige rijen met reden $1+k$. Wiskundig modelleren komt in het discrete geval vaak neer op het opstellen van een gepaste recursievergelijking, het oplossen van deze recursievergelijking en het bestuderen van het verloop van de oplossing.

Dat is wat we in dit cahier zullen doen. We zullen voor een aantal fenomenen uit de realiteit een recursievergelijking opstellen, oplossen en het verloop van de oplossing(en) bestuderen. Nu en dan zullen we ook recursievergelijkingen en het verloop van hun oplossingen bestuderen zonder verwijzing naar een concreet fenomeen uit de realiteit. Daarom hebben we in de titel van dit cahier de neutralere term *discrete dynamische systemen* gebruikt i.p.v. discrete dynamische modellen.

We zullen in dit cahier merken dat de TI-84 bijzonder goed overweg kan met recursievergelijkingen en rijen. Ook als we de recursievergelijking analytisch niet kunnen oplossen, kunnen we de oplossing bestuderen m.b.v. de rekenmachine. Vooral in de tweede helft van het cahier leren we de rekenmachine als een onmisbare bondgenoot kennen. We komen hier bij een tweede grote verandering in het wiskundeonderwijs, namelijk de groeiende rol van elektronische hulpmiddelen in de handen van de leerlingen. Het feit dat computers en rekenmachines goed met recursievergelijkingen overweg kunnen, is een van de redenen waarom dit onderwerp (niet alleen in het onderwijs, maar ook in het wetenschappelijk onderzoek) de laatste decennia meer aandacht krijgt.

Bij continue dynamische modellen worden ‘gewone’ functies $x(t)$ gebruikt i.p.v. rijen en worden de recursievergelijkingen vervangen door differentiaalvergelijkingen. Die drukken een verband uit tussen een ‘gewone’ functie en haar afgeleide(n). Voor leerlingen uit het secundair onderwijs zijn differentiaalvergelijkingen conceptueel een stuk moeilijker dan recursievergelijkingen. Ook het oplossen is moeilijker, althans in het begin. Daarom is het minder evident om leerlingen uit het secundair onderwijs kennis te laten maken met wiskundig modelleren in het continue geval.

Eindtermen en leerplannen

Eén van de eindtermen wiskunde voor aso (decretale specifieke eindterm nummer 18 om precies te zijn; alleen van toepassing voor studierichtingen met pool wiskunde) draagt als titel *discrete wiskunde* en luidt als volgt:

> *De leerlingen kunnen telproblemen of problemen met betrekking tot discrete veranderingsprocessen wiskundig modelleren en oplossen.*

Telproblemen worden van oudsher behandeld in ons onderwijs. Het andere onderwerp uit de eindterm, discrete veranderingsprocessen, was nieuw. In de leerplannen voor het gemeenschapsonderwijs en die van het onderwijs van de steden en gemeenten blijft de discrete wiskunde beperkt tot de telproblemen (wat perfect kan wegens de ‘of’ in de eindterm). In het vrij onderwijs heeft men er voor geopteerd om het nieuwe onderwerp discrete veranderingsprocessen op te nemen bij de verplichte leerstof voor de 6-urencursus. De doelstellingen in dat verband zijn:

- De leerlingen kunnen de convergentie of divergentie van een rij met voorbeelden illustreren. (DI1)
- De leerlingen kunnen limieten van eenvoudige rijen bepalen. (DI2)
- De leerlingen kunnen problemen met betrekking tot discrete veranderingsprocessen wiskundig modelleren en oplossen. (DI3)

Er is in de 6-urencursus daarnaast ook een keuzeonderwerp iteratie voorzien dat hier heel nauw bij aanleunt. Discrete veranderingsprocessen en/of iteratie komen ook voor als keuzeonderwerp in andere leerplannen voor het vrij onderwijs (4-uurscursus, sommige leerplannen uit tso/kso). Het onderwerp is bovendien ook bruikbaar voor vrije-ruimte-doeleinden of als facultatieve uitbreiding.

Basis en uitbreiding

De kern van dit cahier bestaat uit de paragrafen 2 t.e.m. 6. Hierin behandelen we de meest eenvoudige discrete dynamische systemen, namelijk deze die beschreven worden door lineaire recursievergelijkingen van de eerste orde met constante coëfficiënten en constant rechterlid, d.w.z. recursievergelijkingen van de vorm $x_n = ax_{n-1} + b$, met *a* en *b* reële getallen. In de paragrafen 2, 3 en 4 behandelen we alle basisbegrippen en -eigenschappen a.d.h.v. een aantal voorbeelden. In paragraaf 5 vatten we al onze bevindingen samen en formuleren we ze in algemene termen. Paragraaf 6 sluit dit deel af met oefeningen waarmee het geleerde verwerkt kan worden.

De volgende paragrafen vormen uitbreidingen van dit basismateriaal. Ze staan los van elkaar en kunnen dus onafhankelijk van elkaar gebruikt worden.

- In paragraaf 7 verhogen we de dimensie van één naar twee (of meer): we gaan over van één recursievergelijking (die één rij beschrijft) naar een stelsel van twee (of meer) gekoppelde recursievergelijkingen (dat twee of meer rijen tegelijk beschrijft). Hoewel dit betekent dat de materie ingewikkelder wordt, komen we hiermee vreemd genoeg toch op terrein dat relatief bekend is in het secundair onderwijs. Bij matrices worden dergelijke meerdimensionale discrete dynamische systemen immers vaak behandeld, zonder evenwel die naam te gebruiken. Een voorbeeld zijn de zogenaamde Lesliemodellen, waarbij de evolutie van een populatie bestudeerd wordt, gestructureerd volgens leeftijd. In paragraaf 7 werken we dit verder uit, maar dan wel a.d.h.v. een voorbeeld waarbij de overgangsmatrix een migratiematrix is.
- In paragraaf 8 keren we terug naar dimensie één, maar verhogen we de orde van de recursievergelijking. Dat betekent dat we ons in het rechterlid niet beperken tot de onmiddellijk voorafgaande term, maar dat ook termen voorkomen die verder teruggaan in de rij. We bespreken een voorbeeld, namelijk de recursievergelijking $t_n = t_{n-1} + t_{n-2}$, die de rij van Fibonacci beschrijft. Deze paragraaf is los van de voorgaande paragraaf te behandelen (op een klein onderdeeltje na, dat je dan weg kunt laten).
- In paragraaf 9 laten we het lineaire karakter van de recursievergelijking los. Ook hier behandelen we één voorbeeld, namelijk de recursievergelijking die (discrete) logistische groei beschrijft. We stellen in deze paragraaf een wiskundig model op voor de groei van de bevolking van de Verenigde Staten. Paragraaf 9 staat volledig los van de voorgaande twee paragrafen. Paragraaf 10.b kan gezien worden als een vervolg op paragraaf 9.
- Het limietgedrag van lineaire recursievergelijkingen is zeer overzichtelijk, maar daardoor wat saai. Niet-lineaire recursievergelijkingen hebben wat dat betreft veel meer verrassingen in petto. Deze opwindende wereld verkennen we in paragraaf 10. We doen dat voor twee voorbeelden (die nogal gelijklopend zijn). In deze paragraaf zien we hoe de typische onderwerpen die met iteratie verbonden zijn (aantrekkende en afstotende vaste punten, ...) opduiken bij discrete dynamische systemen. Paragraaf 10.a staat volledig los van de voorgaande paragrafen. In paragraaf 10.b wordt het limietgedrag onderzocht van de logistische

recursievergelijking. Ook deze paragraaf staat los van de voorgaande paragrafen, al is het natuurlijk wel leuker als je de leerlingen eerst verteld hebt waar deze recursievergelijking vandaan komt (bijvoorbeeld a.d.h.v. paragraaf 9).

Een compilatie

Veel T^3-cahiers worden na hun ontstaan als cursustekst bij T^3-sessies gebruikt. Met dit cahier is het eerder omgekeerd gegaan. Ik heb in de afgelopen jaren les gegeven over dit onderwerp aan studenten, er verschillende workshops, lezingen, ... voor wiskundeleraren over gegeven, en er (soms samen met anderen) teksten rond geschreven. Het T^3-cahier is een compilatie van het materiaal dat bij die gelegenheden gemaakt is. In de bibliografie vind je een overzicht van dit materiaal, dat in tekstvorm of onder de vorm van slides beschikbaar is ([2], [4-13]). Je zal in dit cahier dus materiaal aantreffen dat in het verleden al verspreid is. Nu is het verwerkt tot één samenhangend geheel. En natuurlijk zijn sommige delen toch nog nieuw uitgewerkt voor dit cahier.

I.v.m. het gebruik van de TI-84

We maken in dit cahier gebruik van de TI-84 Plus. We veronderstellen dat het basisgebruik van de rekenmachine gekend is. Wat specifiek is voor het werken met rijen en recursievergelijkingen leggen wel uit. We zijn uitgegaan van een machine die aan het begin van het cahier een reset ondergaan heeft.

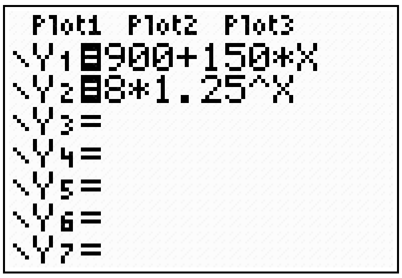
2. Met andere ogen kijken naar een klassieker

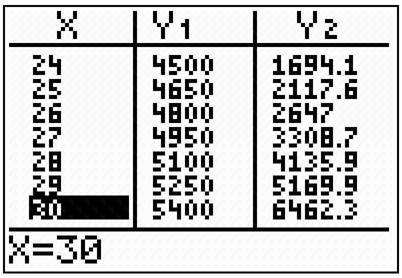
De klassieker...

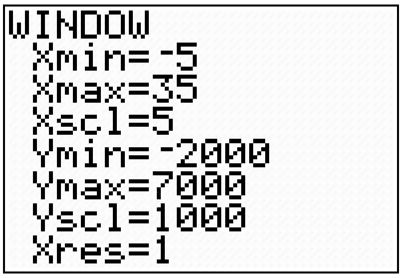
In het Vlaamse wiskundeonderwijs is het volgende probleem (of varianten hiervan) bekend:

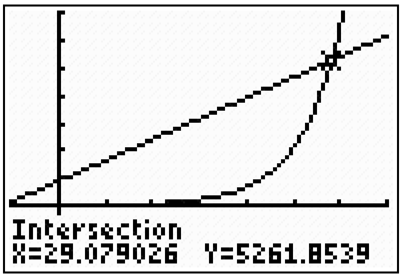
> Voor de aanleg van een brug over een spoorweg moet zand aangevoerd worden. Op de plaats waar het zand gewonnen wordt, is er een kleine vijver van 900 m^2, die door de graafwerken vergroot wordt. Men wil er een grote vijver van maken die dienst zal doen voor waterrecreatie. Elke week wordt de vijver 150 m^2 groter. Bij het begin van de werken merkt een arbeider van de graaffirma op dat een bepaalde soort waterplanten 8 m^2 van de oppervlakte van de vijver inneemt. Tijdens de volgende weken blijkt deze oppervlakte elke week met een kwart (van de oppervlakte die op dat ogenblik reeds ingenomen is) toe te nemen. De arbeider maakt zich ongerust en merkt op dat hier iets aan gedaan moet worden. De vijver zal anders vlug volledig overdekt zijn met waterplanten. Maar zijn baas ziet voorlopig geen gevaar: "De vijver wordt toch elke week 150 m^2 groter." Wie heeft gelijk: de arbeider of zijn baas?

Het probleem wordt gewoonlijk opgelost m.b.v. functies. Als we de oppervlakte van de vijver (in m^2) voorstellen door V en de tijd (in weken, vanaf het ogenblik dat de vijver 900 m^2 groot is) door t, dan wordt de groei van de oppervlakte van de vijver beschreven door de eerstegraadsfunctie met vergelijking $V = 900 + t \cdot 150$. De groei van de waterplanten wordt beschreven door de exponentiële functie met vergelijking $W = 8 \cdot 1.25^t$, waarbij W de oppervlakte voorstelt die ingenomen is door de waterplanten. Met behulp van een tabel of de grafieken van deze functies vinden we dan al snel dat de arbeider gelijk heeft.









In deze aanpak bekijken we de tijd als een continue veranderlijke, d.w.z. dat de tijd hier alle (positieve) reële waarden kan aannemen, niet alleen gehele waarden. We gebruiken het woord ‘continu’ hier zoals dat in de toegepaste wiskunde en de statistiek gebruikelijk is. Het gaat over de continuïteit van een veranderlijke, niet over de continuïteit van een functie.

... met andere ogen bekeken

Bij nader inzien is het toch niet helemaal evident dat we dit doen. In de opgave staat bijvoorbeeld dat de vijver elke week 150 m^2 groter wordt. We krijgen dus alleen informatie over de toename over een gehele week. Hoe de groei in de loop van de week verloopt, vinden we niet terug in de opgave. De eerstegraadsfunctie die we gebruiken om de groei van de vijver te modelleren, doet daarentegen uitschijnen dat de groei volkomen regelmatig verloopt: elke dag, elk uur, elke minuut, ... groeit de oppervlakte van de vijver even snel. Dat zal in de realiteit natuurlijk niet het geval zijn. Denk maar aan het verschil tussen weekdagen en weekend, aan dag en nacht, aan lunchpauzes, ... De eerstegraadsfunctie geeft dus geen volledig correcte weergave van wat in de realiteit gebeurt. Nu is dat natuurlijk eigen aan het gebruik van een wiskundig model, dat omwille van de eenvoud de realiteit steeds slechts bij benadering weergeeft. Maar de kwestie wijst ons in dit geval wel de weg naar discrete modellen voor de groei van de vijver en de waterplanten.

Groei van de vijver

We beschouwen de tijd nu als een discrete veranderlijke. We laten de tijd nu dus alleen (positieve) gehele waarden aannemen. Om dat te benadrukken, gebruiken we de letter n i.p.v. t. Dus: n is het aantal weken na het begintijdstip. Met V_n geven we de oppervlakte van de vijver (in m^2) weer n weken na het begintijdstip. Het gegeven dat de oppervlakte in het begin 900 m^2 bedraagt, geven we in formulevorm weer als een *beginvoorwaarde*

$$V_0 = 900 \,.$$

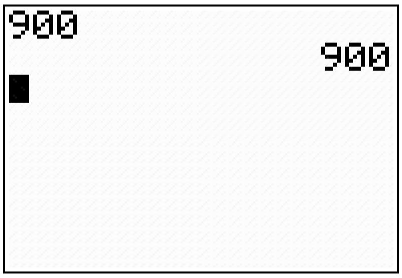
Het gegeven dat de oppervlakte elke week met 150 m^2 toeneemt, kan vertaald worden in de *recursievergelijking*

$$V_n = V_{n-1} + 150 \,,$$

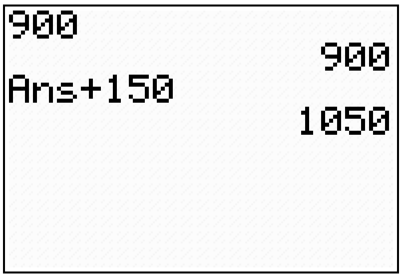
die geldt voor alle $n \geq 1$ in $\mathbb{N}$. De beginvoorwaarde en recursievergelijking bepalen de rekenkundige rij met algemene term $V_n = 900 + n \cdot 150$ of, in meer gebruikelijke schrijfwijze: $V_n = 900 + 150n$. De rekenkundige rij is een discreet wiskundig model van de groei van de vijver.

Berekeningen op het basisscherm

Met behulp van de grafische rekenmachine kunnen we de opeenvolgende waarden voor de oppervlakte van de vijver gemakkelijk genereren op het basischerm door te steunen op de beginwaarde en de recursievergelijking. We beginnen met het ingeven van de beginwaarde V_0:

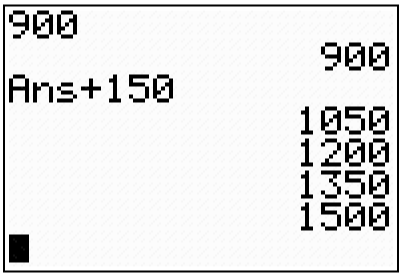


Het lijkt op het eerste gezicht wat vreemd om dit te doen, maar dadelijk zal blijken dat deze start wel degelijk erg nuttig is. Nu laten we de rekenmachine 150 optellen bij de beginwaarde, wat ons V_1 geeft.



De ‘Ans’ hoeven we niet zelf in te typen. De rekenmachine voegt dit in zodra we het plusteken intoetsen. Bij de berekening wordt ‘Ans’ vervangen door het laatst berekende antwoord, dat hier 900 is.

Als we nu [ENTER] drukken zonder een nieuwe invoer op te geven, wordt het laatst ingegeven commando opnieuw uitgevoerd. We tellen dus 150 op bij het laatst berekende antwoord (nu 1050, en niet meer 900!). Zo vinden we dus V_2. Als nog herhaaldelijk [ENTER] drukken, wordt het commando steeds opnieuw uitgevoerd, met telkens het resultaat van de vorige berekening in de rol van ‘Ans’. Zo krijgen we dus V_3, V_4, V_5, ...



Groei van de waterplanten

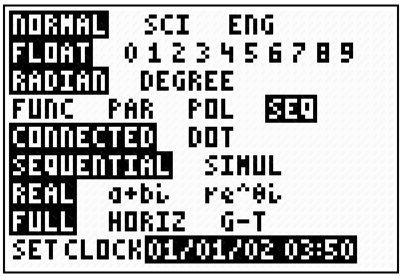
De gegevens over de groei van de waterplanten kunnen we vertalen in de beginvoorwaarde en recursievergelijking

$$W_0 = 8 \text{ en } W_n = W_{n-1} \cdot 1.25,$$

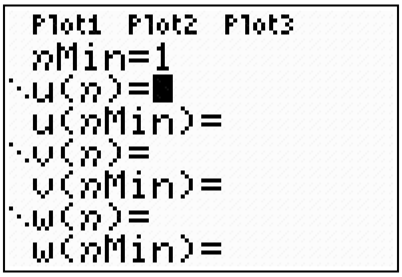
die de meetkundige rij met algemene term $W_n = 8 \cdot 1.25^n$ bepalen. Hierbij stelt W_n de oppervlakte (in m^2) voor die ingenomen wordt door de waterplanten *n* weken na het begintijdstip.

Tabel en grafiek

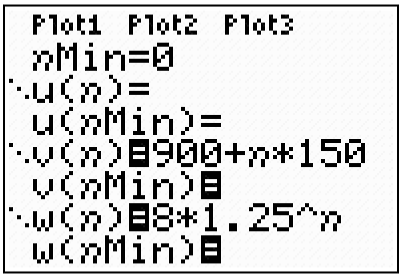
Ook van deze discrete modellen kunnen we m.b.v. de grafische rekenmachine een tabel en grafiek maken. We moeten de machine daarvoor eerst in SEQ-modus zetten: druk [MODE], verplaats de cursor met de pijltjes naar SEQ op de vierde lijn en druk [ENTER] om de instelling van FUNC te veranderen in SEQ.



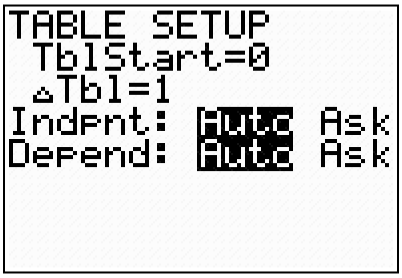
In SEQ-modus ziet het Y=-scherm er anders uit: in plaats van ruimte voor 10 functies, is er ruimte voor drie rijen, met standaardbenamingen u, v en w.

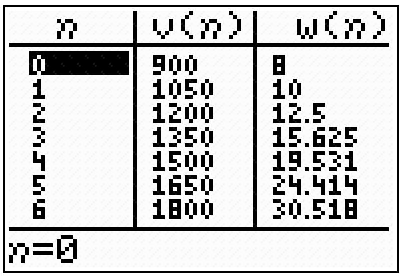


Omdat de v en w passen bij de benamingen die we de veranderlijken gegeven hebben, maken we gebruik van deze twee rijen. We geven aan dat de beginterm van de rij rangnummer 0 heeft door *n*Min gelijk te stellen aan 1. Bij v en w geven we de algemene term in, zoals op onderstaande schermafdruk te zien is. Het symbool *n* krijg je door de toets [X,T,θ,*n*] te gebruiken. Deze toets heeft dus een ander effect in SEQ-modus dan in FUNC-modus! Bemerk de schrijfwijze die door de rekenmachine gehanteerd wordt: V_n en W_n worden genoteerd als v(*n*) en w(*n*), dus met haakjes i.p.v. met een onderindex. Voor de beginwaarden v(*n*Min) en w(*n*Min) mag je niets invullen.

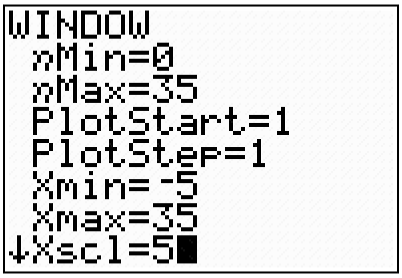


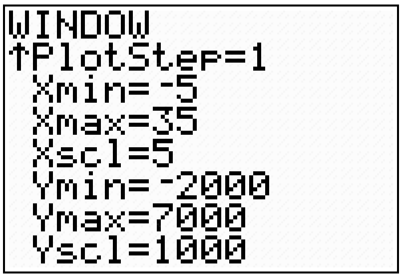
We maken een tabel door via [2nd] [TBL SET] goede instellingen in te geven en [2nd] [TABLE] te drukken.

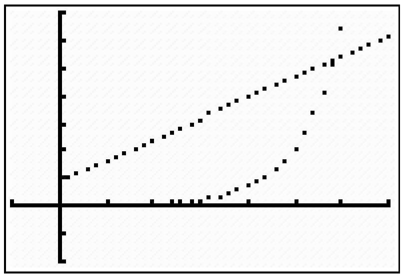




Nu willen we de grafieken laten maken. We merken dat ook het WINDOW-venster gewijzigd is. Aangezien het rangnummer *n* uitgezet wordt op de horizontale as geven we voor *n*Min en *n*Max min of meer hetzelfde in als voor XMin en XMax (we zullen in een van de volgende paragrafen een grafische voorstelling van een rij zien waarbij het van belang is dat we wel iets verschillends kunnen invullen). We zien beide grafieken op de onderstaande schermafdruk rechts.

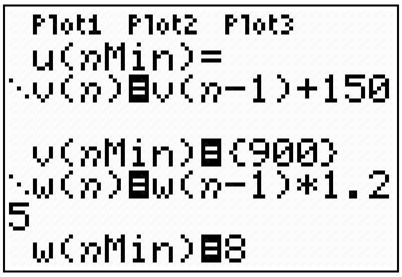


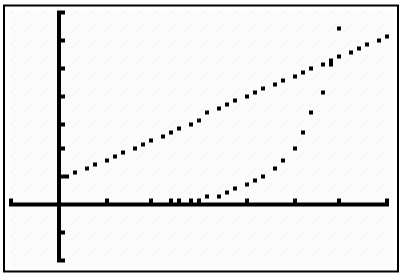




Recursievergelijking en grafiek

We hebben de grafiek gemaakt door in het Y=-scherm de algemene term in te geven. Het kan ook door gebruik te maken van de recursievergelijking en beginvoorwaarde. Dat zie je in de onderstaande schermafdrukken (de accolades rond de beginwaarde worden automatisch door de rekenmachine geplaatst en hoef je dus niet in te geven). De symbolen v en w moet je ingeven m.b.v. de kleine letter v en w die je vindt linksboven de toetsen [8] en [9], dus via [2nd] [v] en [2nd] [w] en *niet* via [ALPHA] [V] en [ALPHA] [W].





Gelijkmatig en versneld stijgen

Tot slot van deze paragraaf staan we er nog even bij stil hoe we de uitkomst van dit vraagstukje kunnen begrijpen en in verband kunnen brengen met het verloop van beide rijen. Beide oppervlaktes nemen toe, wat betekent dat beide rijen stijgend zijn. De oppervlakte van de vijver neemt gelijkmatig toe, elke week even veel. De rij die de evolutie van de oppervlakte van de vijver beschrijft, is *gelijkmatig* stijgend. De andere rij neemt *niet* gelijkmatig toe. De verschillen tussen opeenvolgende termen worden steeds groter. De oppervlakte van de waterplanten neemt dus steeds sneller toe. Het gaat over een *versneld* stijgende rij. Dat verklaart waarom de oppervlakte van de waterplanten de oppervlakte van de vijver uiteindelijk ‘inhaalt’, ook al loopt de oppervlakte van de waterplanten aanvankelijk meer en meer ‘achterstand’ oploopt.

3. Medicijnspiegel

a. Evolutie van de hoeveelheid medicijn in het bloed

In het voorgaande voorbeeld werden rekenkundige en meetkundige rijen herhaald in de context van lineaire en exponentiële groei. Tevens werd aangegeven hoe je met rijen omgaat met de grafische rekenmachine. We leerden de [ANS]-toets gebruiken in combinatie met de recursieve vergelijking om termen van de rij te berekenen op het basisscherm. We toonden hoe je een tabel en grafiek van een rij kunt maken vertrekkend van de algemene term of van de recursievergelijking en beginvoorwaarde.

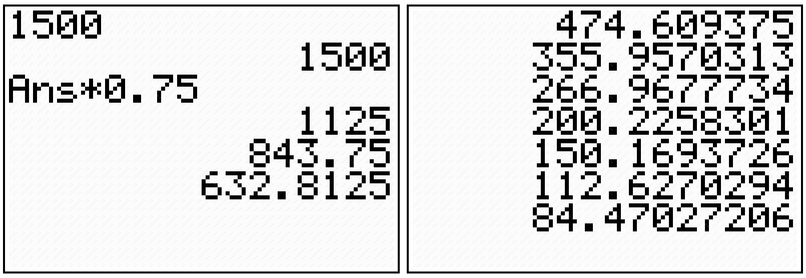
Nu werken we met een voorbeeld waarin de recursievergelijking wat ingewikkelder is. We doen dit a.d.h.v. een werktekst. De antwoorden op de vragen vind je in cursief tussen de vragen. De werktekst zonder de antwoorden vind je in WORD-formaat op de T^3-website. Natuurlijk hoef je deze leerstof niet per se in de vorm van een werktekst te behandelen en kan je de werktekst ook gerust gebruiken als inspiratie voor een onderwijsleergesprek hierover.

Medicijnspiegel

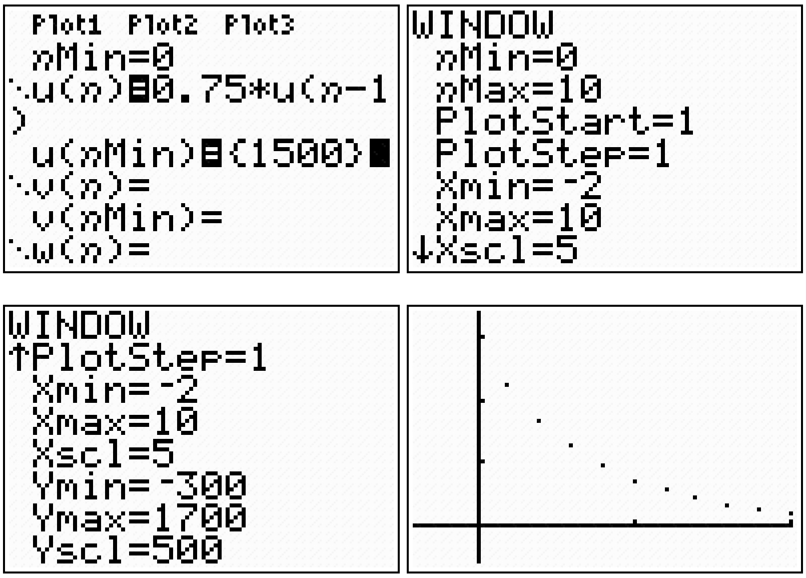
Bij Jelle wordt een langdurige ziekte vastgesteld. Hij moet hiervoor een bepaald medicijn innemen. Eén dosis bevat 1500 mg van de werkzame stof. Kort na de inname is de werkzame stof volledig opgenomen in het bloed. Gedurende de volgende dagen verdwijnt ze langzaam uit het bloed: elke dag vermindert de hoeveelheid werkzame stof in het bloed met 25%.

1. Noem h_n de hoeveelheid werkzame stof in het bloed *n* dagen na de inname. Geef een recursievergelijking met beginvoorwaarde voor de rij h_0, h_1, h_2, ... Over welk type van rij gaat het? Bereken de hoeveelheid werkzame stof in het bloed na 1, 2, 3, ..., 10 dagen. Maak ook een grafiek van de rij. Geef tot slot de algemene term.

   (De beginvoorwaarde is $h_0 = 1500$ *en de recursievergelijking is* $h_n = 0.75h_{n-1}$. *Het gaat over een meetkundige rij. De hoeveelheid werkzame stof in het bloed na* 1, 2, 3, ..., 10 *dagen wordt getoond in de onderstaande schermafdrukken:*



   De onderstaande schermafdrukken tonen de grafiek.



   De algemene term van de rij is $h_n = 1500 \cdot 0.75^n$ *.)*

Natuurlijk volstaat het niet dat Jelle één keer een dosis van het medicijn inneemt. Hij zal gedurende een aantal maanden elke dag een dosis moeten innemen. Nu worden er dus twee fenomenen met elkaar gecombineerd: tussen twee innames door verdwijnt een gedeelte van de werkzame stof geleidelijk uit het bloed en bij de inname van een nieuwe dosis loopt de hoeveelheid werkzame stof in het bloed op korte tijd zeer snel op.

Noem H_n de hoeveelheid werkzame stof in het bloed *n* dagen na de eerste inname, net na de inname van een nieuwe dosis.

2. Bepaal H_0, H_1 en H_2.

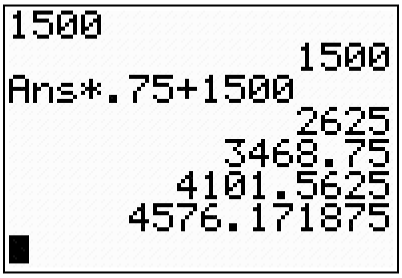
   (Het is duidelijk dat $H_0 = 1500$*. Tijdens de dag die volgt op de eerste inname neemt de hoeveelheid werkzame stof in het bloed af tot* $0.75 \cdot 1500\,mg = 1125\,mg$*. Dan neemt Jelle een nieuwe dosis van het medicijn, waardoor de hoeveelheid werkzame stof in zijn bloed op zeer korte tijd met* $1500\,mg$ *toeneemt tot* $2625\,mg$*. Zo vinden we dat* $H_1 = 2625$*. De tweede dag evolueert de hoeveelheid werkzame stof in het bloed op dezelfde manier: eerst een geleidelijke afname tot* 75% *van de oorspronkelijke hoeveelheid en daarna een zeer snelle toename met* $1500\,mg$ *zodat* $H_2 = 0.75 \cdot 2625 + 1500 = 3468.75$*.)*

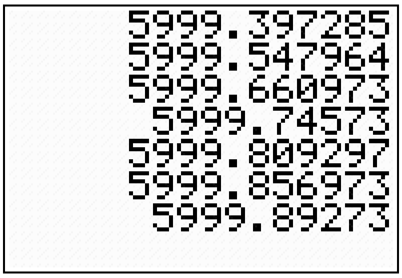
3. Geef een recursievergelijking van de rij H_0, H_1, H_2, ...

   (De recursievergelijking is $H_n = 0.75 \cdot H_{n-1} + 1500$*. Bemerk dat deze recursievergelijking gezien kan worden als een combinatie van de recursievergelijking van een rekenkundige rij en die van een meetkundige rij: we vermenigvuldigen de voorgaande term steeds met eenzelfde getal en tellen er daarna telkens eenzelfde getal bij op.)*

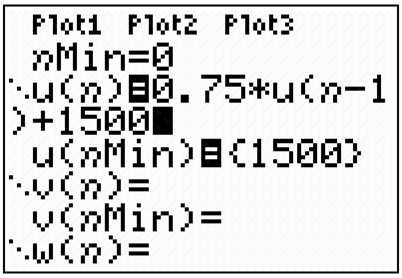
4. Onderzoek de evolutie van de hoeveelheid werkzame stof in het bloed.

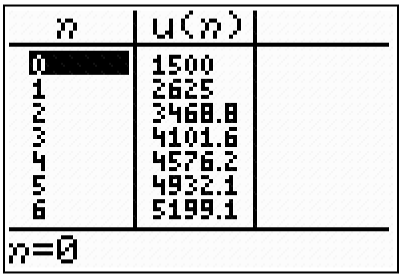
   (We tonen verschillende manieren om de evolutie te onderzoeken. Je kan bijvoorbeeld termen van de rij genereren op het basisscherm. De linkse schermafdruk toont de start. De rechtse toont de hoeveelheid werkzame stof in het bloed na ongeveer een maand.

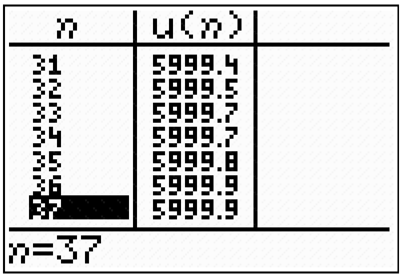




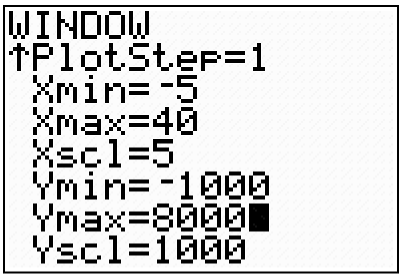
   Een andere mogelijkheid is het maken van een tabel:

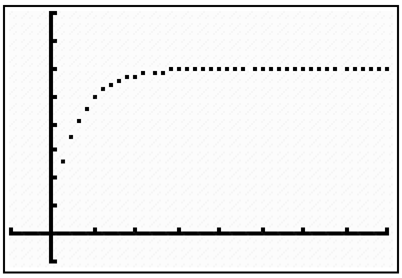






   De onderstaande schermafdrukken tonen de grafiek:



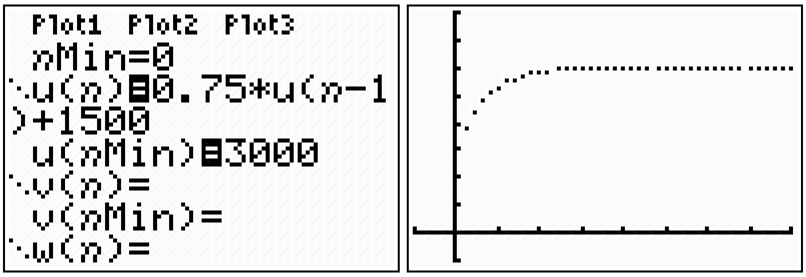


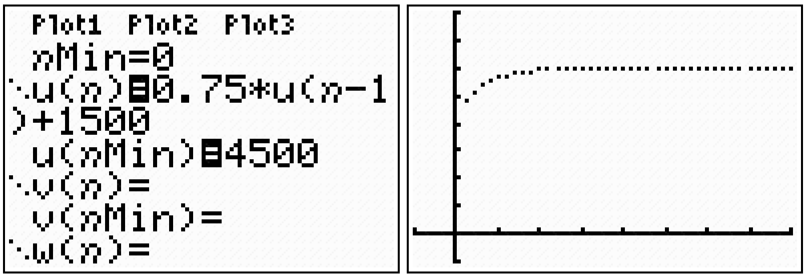
   We stellen vast dat de rij stijgend is. De toenames nemen echter stelselmatig af. Daarom spreken we over een vertraagd stijgende rij. Op langere termijn blijkt de hoeveelheid werkzame stof in het bloed te stabiliseren rond 6000 *mg. De rij heeft dus limietwaarde* 6000*.)*

5. We hebben Jelle bij het begin van de kuur één dosis van het medicijn laten innemen. Hoe evolueert de hoeveelheid werkzame stof als Jelle bij het begin van de kuur ineens twee, drie,

vier, vijf, ... dosissen inneemt? Alleen de dosis op de eerste dag verandert; de volgende dagen neemt hij gewoon één dosis in.

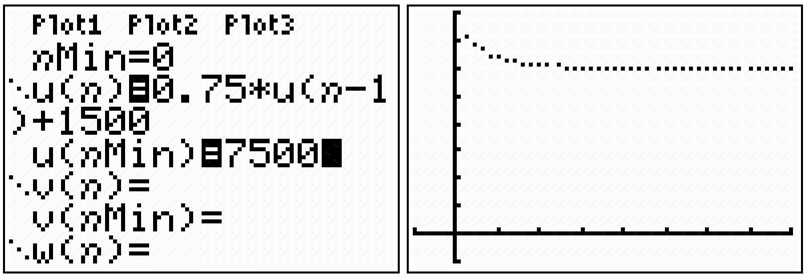
(De onderstaande schermafdruk toont het verloop als Jelle bij het begin 2 *of* 3 *dosissen inneemt:*





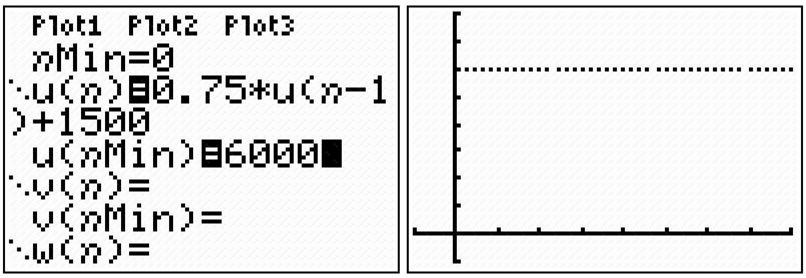
We stellen vast dat het verloop niet drastisch wijzigt: de rij is nog steeds vertraagd stijgend en de limietwaarde blijft 6000. *Alleen de beginwaarde verandert in* 3000, *respectievelijk* 4500. *De limietwaarde lijkt onafhankelijk te zijn van de beginwaarde.*

Hieronder zien we het verloop wanneer Jelle de eerste dag 5 *dosissen inneemt:*



Het verloop is nu vertraagd dalend. Ook nu blijft de limietwaarde 6000.

De laatste schermafdruk toont het verloop wanneer Jelle de eerste dag 4 *dosissen inneemt:*



In dit geval blijft de hoeveelheid werkzame stof in het bloed constant. We kunnen dit ook gemakkelijk begrijpen: op één dag verdwijnt er 25% *van de* 6000 *mg werkzame stof uit het bloed en dat is precies gelijk aan de hoeveelheid die er op het einde van de dag bijkomt door de inname van een nieuwe dosis. Er is hier m.a.w. sprake van een evenwicht tussen de twee processen.*

We kunnen nu ook beter het verloop begrijpen in de andere gevallen. Zolang de hoeveelheid werkzame stof in het bloed kleiner is dan 6000 *mg, verdwijnt er in de loop van de dag minder medicijn uit het bloed dan er bijkomt door de nieuwe inname. De hoeveelheid werkzame stof in het bloed neemt daardoor dag na dag toe. Naarmate de hoeveelheid medicijn in het bloed echter* *dichter nadert tot* 6000 *mg, wordt het verschil kleiner tussen wat uit het bloed verdwijnt en wat ingenomen wordt. Als de hoeveelheid werkzame stof in het bloed groter is dan* 6000 *mg, verdwijnt er in de loop van de dag meer medicijn uit het bloed dan er bijkomt door de nieuwe inname, waardoor de hoeveelheid werkzame stof in het bloed dus kleiner wordt.)*

b. Evenwicht en limietwaarde

Evenwicht en limietwaarde, rol van de beginwaarde

In de werktekst stelden we vast dat, wat de beginwaarde ook is, de hoeveelheid werkzame stof in het bloed na verloop van tijd nagenoeg gelijk wordt aan de evenwichtswaarde. Als de beginwaarde niet gelijk is aan 6000, zal geen enkele term in de rij exact gelijk zijn aan 6000, maar het verschil wordt zo klein dat het in de praktijk geen belang meer heeft. Daarom zeggen we dat de hoeveelheid werkzame stof in het bloed naar een evenwicht evolueert.

Stabiel evenwicht

Veronderstel dat iemand het medicijn al heel lang inneemt. We mogen er m.a.w. van uitgaan dat de evenwichtssituatie bereikt is. Neem aan dat hij op een bepaalde dag vergeet het medicijn in te nemen. Of dat hij een bepaalde dag twee dosissen inneemt. Vanaf de volgende dag neemt hij opnieuw getrouw de dagelijkse portie in. Dan zal de hoeveelheid werkzame stof in het bloed terug evolueren naar het evenwicht. Met andere woorden: als het systeem eerst in evenwicht is en daarna uit evenwicht gebracht wordt, dan keert het terug naar de evenwichtssituatie. We spreken daarom over een *stabiel* evenwicht.

Dynamisch evenwicht

We zouden kunnen denken dat er in de evenwichtssituatie niets meer verandert. Dat is echter niet het geval. Integendeel, in de loop van de dag verdwijnt er nog altijd een gedeelte van de werkzame stof uit het bloed en bij de inname van de volgende dosis schiet de hoeveelheid werkzame stof in het bloed plots weer omhoog. Alleen is het zo dat er evenveel bijkomt als er verdwijnt, namelijk 1500 mg. Het zijn dus niet dezelfde moleculen werkzame stof die in het bloed blijven, maar alleen de *hoeveelheid* medicijn in het bloed blijft gelijk (tenminste in het discrete model, zie verder). We zeggen daarom dat er sprake is van een *dynamisch* evenwicht.

Berekenen van het evenwicht (en de limietwaarde)

Het evenwicht kan op de volgende manier snel berekend worden. We zoeken een getal E waarvoor geldt dat de (constante) rij met algemene term $H_n = E$ voldoet aan de recursievergelijking $H_n = 0.75H_{n-1} + 1500$. Invullen geeft dat E moet voldoen aan de 'evenwichtsvergelijking' $E = 0.75E + 1500$. Hieruit vinden we gemakkelijk dat $E = 6000$.

Veronderstel nu dat het evenwicht bij een andere (bv. zwaardere) persoon op 7500 mg moet liggen. We kunnen dat proberen te bereiken door de dagelijkse dosis aan te passen. De evenwichtsvergelijking wordt nu $E = 0.75E + d$, waarbij d de dagelijkse dosis is. Met $E = 7500$ vinden we $d = 1875$. Een andere mogelijkheid zou er in kunnen bestaan te zorgen voor een vertraagde uitscheiding. Dan kunnen we de dagelijkse dosis eventueel behouden. Met p het percentage werkzame stof dat dagelijks uit het bloed verdwijnt, wordt de evenwichtsvergelijking dan

$$E = \left(1 - \frac{p}{100}\right)E + 1500\,.$$

Met $E = 7500$ geeft dit $p = 20$.

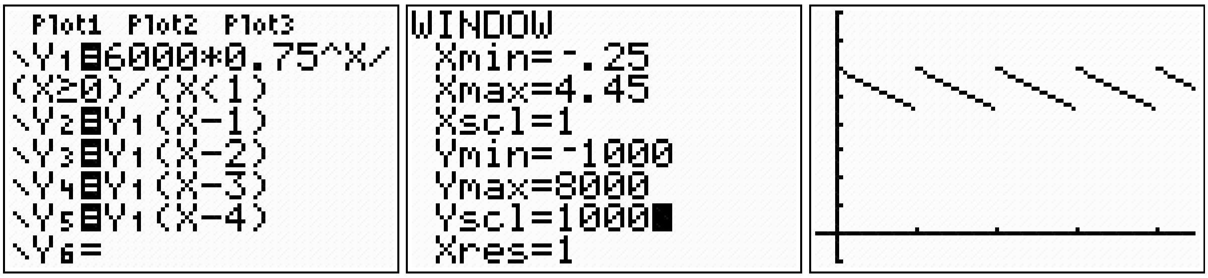
Limietwaarde onafhankelijk van de beginwaarde

In het voorbeeld van de medicijnspiegel stellen we vast dat de limietwaarde gelijk is aan de evenwichtswaarde. De evenwichtswaarde kunnen we berekenen uit de evenwichtsvergelijking. In de evenwichtsvergelijking speelt de beginwaarde van de rij geen rol. De evenwichtsvergelijking is uitsluitend gebaseerd op de recursievergelijking. Dat verklaart waarom de limietwaarde onafhankelijk is van de beginwaarde.

Evenwicht?

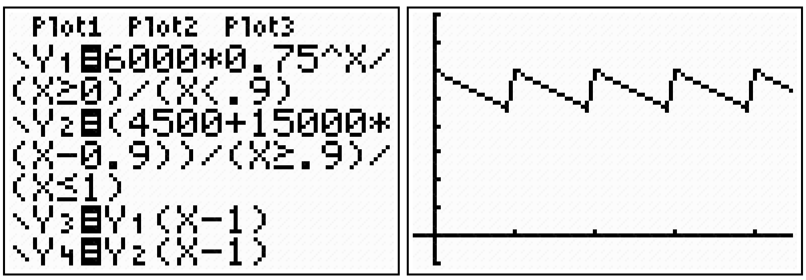
In het geval van beginwaarde 6000 hebben we vastgesteld en beredeneerd dat er een evenwicht optreedt. Dat is echter alleen het geval in het *discrete* model. In dat discrete model beschrijven we de hoeveelheid werkzame stof in het bloed *onmiddellijk na de inname (en opname in het bloed) van een nieuwe dosis*. Tussen twee innames door daalt de hoeveelheid werkzame stof in het bloed telkens. In het onderstaande continue model van de situatie bij evenwicht is deze tussentijdse daling mee opgenomen:

$$f(t) = \begin{cases} 6000 \cdot 0.75^{t} & \text{als } 0 \le t < 1 \\ 6000 \cdot 0.75^{t-1} & \text{als } 1 \le t < 2 \\ 6000 \cdot 0.75^{t-2} & \text{als } 2 \le t < 3 \\ \ldots \end{cases}$$



We geven eerst wat technische uitleg i.v.m. het ingeven van de vergelijking van de functie. Je merkt dat er niet met één functie gewerkt wordt maar met verschillende functies. Dat is niet zo essentieel, maar wel handig. Zo hoeven we de ongelijkheden immers slechts één keer in te typen. Laten we nu kijken naar de eerste functie die ingegeven is. Je merkt dat er twee keer gedeeld wordt door een 'ongelijkheid'. Het intypen van het ongelijkheidsteken gebeurt via [2nd] [TEST] TEST. Een dergelijke ongelijkheid kan op de TI-84 twee waarden aannemen, afhankelijk van de waarde van *t*. Voor *t*-waarden waarvoor de ongelijkheid klopt, wordt de ongelijkheid vervangen door 1 en voor *t*-waarden waarvoor de ongelijkheid niet klopt door 0. Het resultaat is dat we delen door 1 voor *t*-waarden met $0 \le t < 1$ en door 0 anders. Voor *t*-waarden met $0 \le t < 1$ krijgen we dus gewoon de functiewaarde. Voor andere *t*-waarden is de functiewaarde niet bepaald.

Herinner je dat het woord 'continu' in de context van wiskundige modellen op een andere manier gebruikt wordt dan bij de studie van functies: het continue wiskundige model *f* is geen continue functie! De afname tijdens de dag wordt gemodelleerd a.d.h.v. een dalende exaponentiële functie en de zeer snelle opname van de nieuwe dosis in het bloed door een 'sprong' in de grafiek. In de onderstaande schermafdrukken is de zeer snelle opname anders gemodelleerd, namelijk door een zeer steil lijnstuk. De resulterende functie is nu wel continu.



Als we de daling mee willen modelleren, hoeven we niet per se een beroep te doen op een continu model. We kunnen natuurlijk ook werken met een discreet model met een kleinere tijdstap.

c. Expliciete vergelijking

Expliciete vergelijking

We zoeken een expliciete vergelijking voor H_n. De volgende uitdrukkingen drukken de eerste termen van de rij uit in functie van H_0:

$$H_1 = 0.75 \cdot H_0 + 1500$$

$$\begin{aligned} H_2 &= 0.75 \cdot H_1 + 1500 \\ &= 0.75 \cdot (0.75 \cdot H_0 + 1500) + 1500 \\ &= 0.75^2 \cdot H_0 + (0.75 + 1) \cdot 1500 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_3 &= 0.75 \cdot H_2 + 1500 \\ &= 0.75 \cdot (0.75^2 \cdot H_0 + (0.75 + 1) \cdot 1500) + 1500 \\ &= 0.75^3 \cdot H_0 + (0.75^2 + 0.75 + 1) \cdot 1500 \end{aligned}$$

Het patroon in deze uitdrukkingen leidt tot de volgende formule voor H_n:

$$H_n = 0.75^n \cdot H_0 + (0.75^{n-1} + 0.75^{n-2} + \ldots + 0.75 + 1) \cdot 1500 .$$

Met behulp van de formule voor de som van een meetkundige rij kunnen we de som tussen de haakjes eenvoudiger schrijven:

$$H_n = 0.75^n \cdot H_0 + \frac{1 - 0.75^n}{1 - 0.75} \cdot 1500 .$$

Uitwerking hiervan geeft:

$$H_n = (H_0 - 6000) \cdot 0.75^n + 6000 .$$

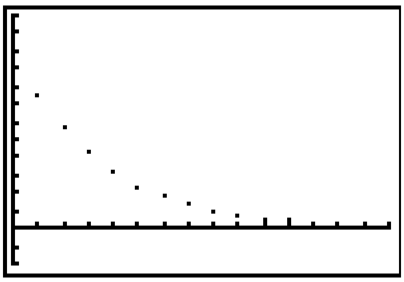
Met $H_0 = 1500$ vinden we tot slot:

$$H_n = -4500 \cdot 0.75^n + 6000 .$$

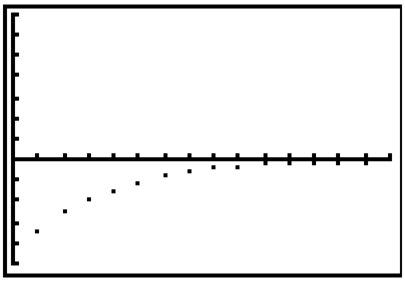
De grafiek verklaard

In de voorgaande paragrafen hebben we het verloop van deze rij kunnen vaststellen a.d.h.v. de grafiek. Met behulp van de uitdrukking die we nu gevonden hebben, kunnen we het verloop van de rij nu ook begrijpen:

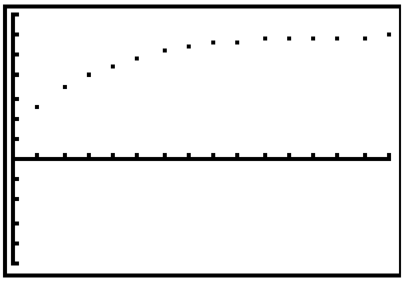
- De rij $t_n = 0.75^n$ kent een vertraagd dalend verloop, met beginwaarde 1 en limietwaarde 0.



- Toevoegen van de factor -4500 betekent dat we de grafiek eerst moeten spiegelen t.o.v. de horizontale as en daarna verticaal moeten uitrekken met factor 4500 (waarbij we natuurlijk de schaal op de verticale as aanpassen). De beginwaarde is -4500, de limietwaarde blijft 0 en de rij verloopt nu vertraagd stijgend.



- Als we ten slotte de term 6000 toevoegen, moet de grafiek over 6000 eenheden omhoog schuiven. Beginwaarde en limietwaarde verhogen met 6000 tot 1500 en, respectievelijk, 6000. Het vertraagd stijgende verloop blijft behouden.



d. Algemene oplossing van de recursievergelijking

Algemene oplossing

Om de evolutie van de hoeveelheid medicijn in het bloed te kennen wanneer de beginwaarde een ander getal dan 1500 is, hoeven we in

$$H_n = (H_0 - 6000) \cdot 0.75^n + 6000$$

voor H_0 enkel dat andere getal in te vullen. Voor elke beginwaarde krijgen we een andere rij. Het enige wat verandert, is de coëfficiënt van 0.75^n. Alle rijen die we op deze manier vinden, hebben een expliciete vergelijking van de vorm

$$H_n = C \cdot 0.75^n + 6000\,,$$

waarbij *C* een getal voorstelt.

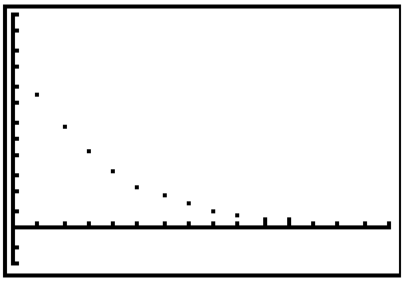
De waarde van *C* hangt af van de beginwaarde: $C = H_0 - 6000$. Sommige waarden van *C* corresponderen met een negatieve beginwaarde of met een onrealistisch hoge beginwaarde en kunnen dus niet de evolutie van de hoeveelheid medicijn in het bloed voorstellen. Maar puur wiskundig gezien voldoen al deze rijen aan de recursievergelijking, wat ook de waarde van *C* is. Het zijn m.a.w. allemaal oplossingen van de recursievergelijking. De recursievergelijking heeft dus oneindig veel oplossingen. Omdat we al deze oplossingen kunnen voorstellen d.m.v. één formule spreken we over de *algemene oplossing* (in het enkelvoud!) van de recursievergelijking.

Elke oplossing met een concrete waarde van *C* noemen we een *particuliere oplossing* van de recursievergelijking.

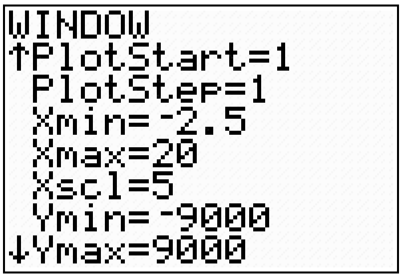
Verloop van de algemene oplossing

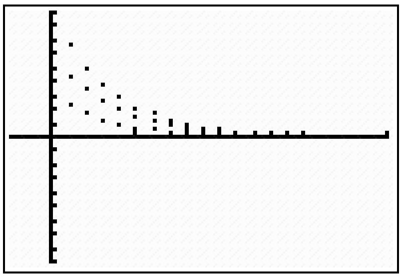
Het verloop van de algemene oplossing kunnen we op een gelijkaardige manier vinden als dat van de particuliere oplossing in de vorige paragraaf.

- Het startpunt van de redenering is hetzelfde: de rij $t_n = 0.75^n$ kent een vertraagd dalend verloop, met beginwaarde 1 en limietwaarde 0.

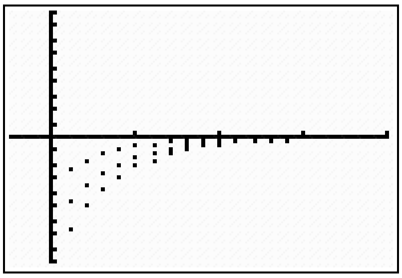


- Nu voegen we de factor *C* toe. Het effect daarvan hangt af van de waarde van *C*. We moeten de grafiek verticaal vermenigvuldigen met factor $|C|$. Naargelang van de waarde van *C* wordt de grafiek uitgerekt ($|C| > 1$) of samengedrukt ($|C| < 1$) in meerdere of mindere mate. De onderstaande schermafdruk toont de grafieken voor $C = 3000$, $C = 6000$ en $C = 9000$.





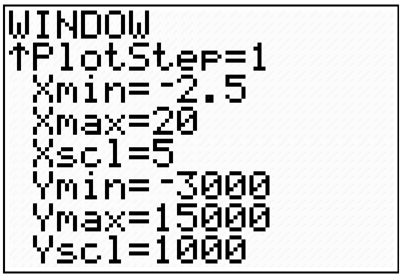
Als *C* negatief is, moeten we de grafiek bovendien ook spiegelen t.o.v. de horizontale as. De onderstaande schermafdruk toont de grafieken voor $C = -3000$, $C = -6000$ en $C = -9000$.

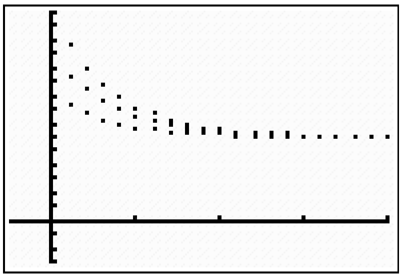
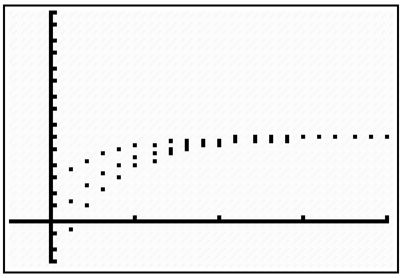


Het geval $C = 0$ is een uitzondering. De grafiek bestaat dan uit punten op de horizontale as.

Als $C > 0$ verloopt de rij vertraagd dalend, als $C < 0$ vertraagd stijgend en als $C = 0$ is de rij constant. De limietwaarde is 0, ongeacht de waarde van *C*.

- Als we ten slotte de term 6000 toevoegen, moet de grafiek over 6000 eenheden omhoog schuiven. De onderstaande schermafdrukken tonen de grafiek voor $C = 3000$, $C = 6000$ en $C = 9000$ (links) en $C = -3000$, $C = -6000$ en $C = -9000$ (rechts). Als $C = 0$ zijn alle termen van de rij gelijk aan 6000.



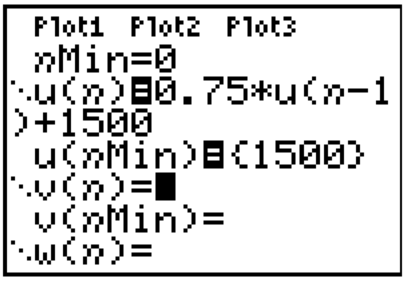



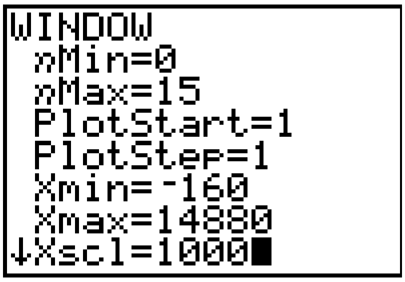
Als $C > 0$ verloopt de rij vertraagd dalend, als $C < 0$ vertraagd stijgend en als $C = 0$ is de rij constant. De limietwaarde is 6000, ongeacht de waarde van *C*.

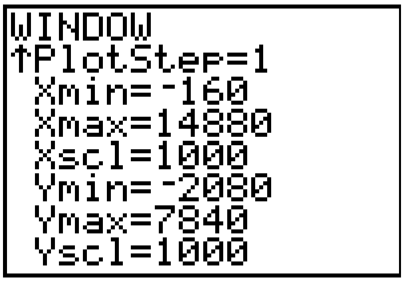
e. Een alternatieve grafische voorstelling

Webdiagram

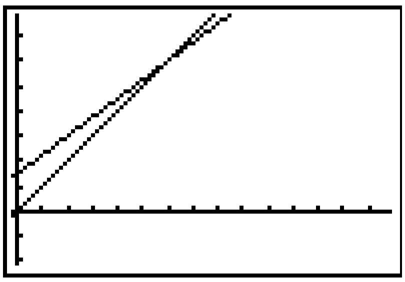
Naast de ‘gewone’ grafische voorstelling uit de voorgaande paragraaf wordt voor (sommige) rijen ook een andere grafische voorstelling gebruikt, die gebaseerd is op de recursievergelijking van de rij. Het gaat over een zogenaamd webdiagram. We maken zo’n webdiagram m.b.v. de grafische rekenmachine. De rekenmachine moet (uiteraard) in SEQ-modus staan. Verder stellen we via [2nd] [FORMAT] de machine in op webdiagram (zie de linkse schermafdruk bovenaan). In het Y=-scherm geven we de recursievergelijking en beginvoorwaarde in. Het tekenvenster stellen we in zoals aangegeven in de onderstaande schermafdrukken.







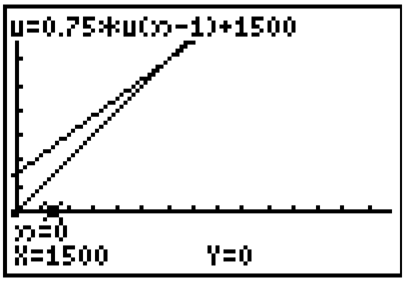
Als we op [GRAPH] drukken, krijgen we de onderstaande ‘grafiek’ te zien.



In feite is de grafiek nog niet afgewerkt. Voorlopig zien we alleen twee rechten. De rechte die door de oorsprong gaat, is de eerste bissectrice (met vergelijking $y = x$). De andere rechte heeft vergelijking

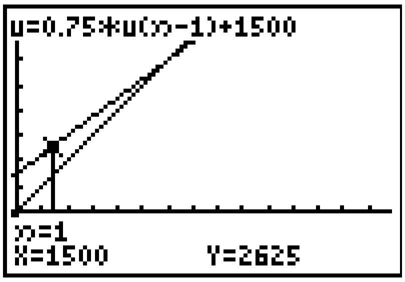
$y = 0.75x + 1500$. Bemerk dat deze vergelijking afgeleid is van de recursievergelijking $H_n = 0.75H_{n-1} + 1500$, waarbij H_n vervangen is door *y* en H_{n-1} door *x*.

Met behulp van [TRACE] beginnen we de webgrafiek verder op te bouwen. Na één keer drukken, ziet het scherm er als volgt uit.



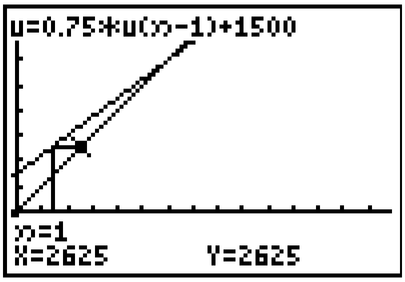
Bovenaan is de recursievergelijking verschenen. Onderaan wordt een waarde voor *n*, *x* en *y* gegeven en op de horizontale as duidt de cursor het punt met coördinaten $(1500, 0)$ aan, corresponderend met de getoonde *x*- en *y*-waarde. De beginwaarde $H_0 = 1500$ correspondeert hier dus met de *x*-coördinaat van het punt dat door de cursor aangeduid wordt.

Als we nu op het pijltje naar rechts drukken, wordt de grafiek verder opgebouwd.



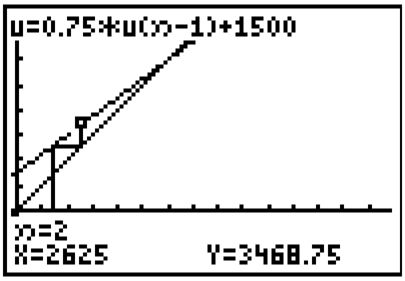
Vanuit het punt op de horizontale as is een verticaal lijnstukje getekend tot aan de rechte die gebaseerd is op de recursievergelijking. De *x*- en *y*-waarde die onderaan getoond worden, zijn de coördinaten van het snijpunt van dit verticale lijnstuk en de rechte, dat door de cursor aangeduid wordt. We controleren dit door 1500 in te vullen voor *x* in de vergelijking $y = 0.75x + 1500$. Deze *y*-coördinaat is echter ook gelijk aan H_1! De berekening die we moeten maken om H_1 te vinden, is immers net dezelfde: in de recursievergelijking $H_n = 0.75H_{n-1} + 1500$ vullen we 1 in voor *n* en 1500 voor H_0.

Als we nogmaals op het pijltje naar rechts drukken, wordt een horizontaal lijnstukje toegevoegd vanuit het punt uit de vorige stap tot aan de eerste bissectrice.



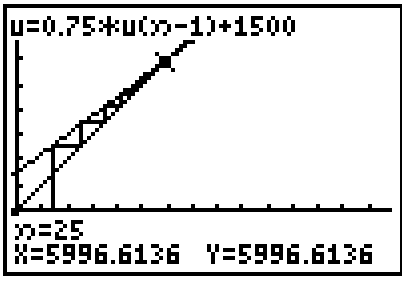
De *y*-coördinaat van de cursor verandert niet en omdat de cursor zich op de eerste bissectrice bevindt is de *x*-coördinaat gelijk aan de *y*-coördinaat. In deze stap wordt dus nog niet H_2 berekend, maar wordt H_1 overgebracht naar de *x*-coördinaat. Dat verklaart waarom de getoonde waarde van *n* gelijk blijft aan 1.

Nogmaals op het pijltje naar rechts drukken, voegt een nieuw verticaal lijntje toe, van de eerst bissectrice tot aan de rechte die met de recursievergelijking correspondeert.



De *y*-coördinaat van de cursor is nu gelijk aan H_2.

Als we op het pijltje naar rechts blijven drukken worden er afwisselend horizontale en verticale lijnstukjes toegevoegd die van de ene naar de andere rechte gaan.



De grafische voorstelling die op deze manier ontstaat wordt een *webdiagram* genoemd. In de volgende paragraaf zullen we merken waar de naam vandaag komt. Nu zou ‘trapdiagram’ een betere benaming zijn... De trap waarvan sprake heeft treden die steeds kleiner worden en die onbeperkt naderen tot het snijpunt van de twee rechten zonder het te overschrijden.

De termen van de rij corresponderen met de positie van de opeenvolgende verticale lijnen in het diagram. Je kan ook kijken naar de hoogte van de horizontale lijnen. Elke term van de rij correspondeert namelijk ook met een horizontale lijn, behalve de beginterm.

Verloop van de rij, limietwaarde, evenwichtswaarde en webdiagram

Het stijgende karakter van de rij wordt weerspiegeld in het omhoog lopen van de trap. De kleiner wordende treden tonen dat de rij steeds trager stijgt.

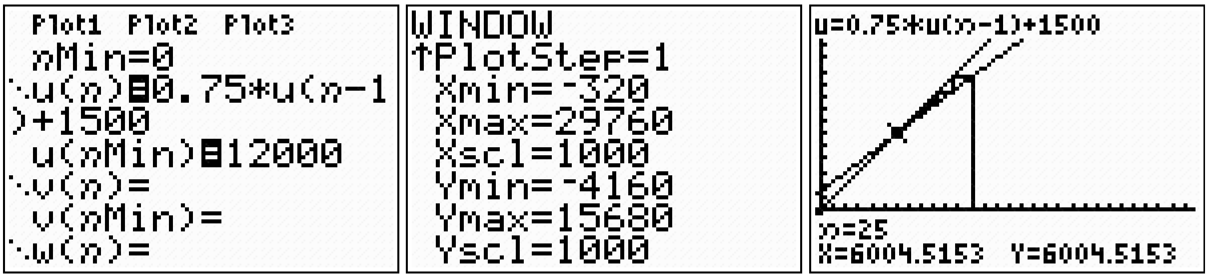
Op de figuur stellen we vast dat de treden van de trap onbeperkt naderen tot het snijpunt van de twee rechten. Dat snijpunt kunnen we eenvoudig berekenen door het stelsel

$$\begin{cases} y = 0.75x + 1500 \\ y = x \end{cases}$$

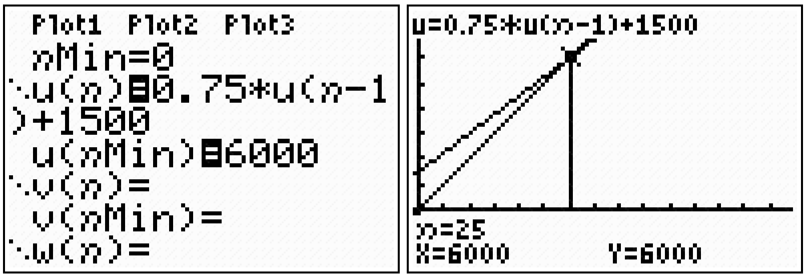
op te lossen. Via gelijkstelling van de rechterleden vinden we een vergelijking met *x* als enige onbekende: $x = 0.75x + 1500$. Op de naam van de onbekende na is dat de evenwichtsvergelijking uit paragraaf 3.b. De oplossing voor x is 6000, de limietwaarde of evenwichtswaarde van de rij. Het snijpunt van de twee rechten is bijgevolg $(6000, 6000)$. We vinden hier dus een nieuwe manier om de evenwichtswaarde te berekenen, namelijk via het snijpunt van de twee rechten in het webdiagram (of trapdiagram).

Andere beginwaarden

Als we de beginvoorwaarde veranderen, krijgen we een ander web- of trapdiagram. Als $H_0 = 3000$ of $H_0 = 4500$, verandert het trapdiagram heel weinig. Ook dan loopt de trap omhoog, worden de treden kleiner en kleiner en naderen ze onbeperkt tot het snijpunt van de twee rechten. Het enige verschil is dat de trap wat verder naar rechts start. Omdat het trapdiagram voor $H_0 = 7500$ geen duidelijke figuur geeft, maken we het trapdriagram voor $H_0 = 12\,000$ (in een aangepast tekenvenster). We stellen vast dat de trap nu naar onder loopt en kleiner wordende treden heeft die onbeperkt naderen tot het snijpunt van de twee rechten. Dat is in overeenstemming met wat we verwachten: een vertraagd dalende rij met limietwaarde 6000. Het trapdiagram voor $H_0 = 7500$ verschilt hier alleen van doordat het dichter bij het snijpunt start.



Als $H_0 = 6000$ krijgen we een heel andere figuur. Voor de onderstaande schermafdrukken hebben we gebruik gemaakt van het oorspronkelijke tekenvenster.



In dit geval herleidt de trap zich tot één punt, het snijpunt van de twee rechten. Dat is in overeenstemming met wat we weten: als $H_0 = 6000$, is de rij constant.

Iteratie; limietwaarde, evenwichtswaarde en vast punt van een functie

Voor het webdiagram maken we gebruik van twee rechten, de eerste bissectrice (met vergelijking $y = x$) en de rechte met vergelijking $y = 0.75x + 1500$ (gebaseerd op de recursievergelijking $H_n = 0.75H_{n-1} + 1500$). Deze tweede rechte kunnen we opvatten als de grafiek van de eerstegraadsfunctie f met vergelijking $f(x) = 0.75x + 1500$. De recursievergelijking kunnen we nu schrijven als $H_n = f(H_{n-1})$. De termen van de rij vinden we dan door de functie f herhaaldelijk toe te passen op de beginwaarde:

$$\begin{gathered} H_1 = f(H_0) \\ H_2 = f(f(H_0)) \\ H_3 = f(f(f(H_0))) \\ \ldots \end{gathered}$$

Het genereren van de termen van de rij is dus een *iteratief proces* (zie bv. [14, p. 47]). De limietwaarde (of de evenwichtswaarde) is de oplossing van de vergelijking $x = f(x)$, d.w.z. dat de limietwaarde of evenwichtswaarde dus een getal is dat door de functie f op zichzelf afgebeeld wordt. We zeggen dat de limietwaarde of evenwichtswaarde een *vast punt*, een *dekpunt* of een *stationair punt* van de functie f is. We merkten eerder op dat het hier gaat over een stabiel evenwicht: als we de hoeveelheid werkzame stof in het bloed uit evenwicht brengen, keert de hoeveelheid na verloop van tijd terug naar het evenwicht. Daarom noemen we het vaste punt een *aantrekkend* vast punt.

4. Een discreet, dynamisch marktmodel

Een statisch marktmodel

Bij een economie die steunt op het principe van de vrije markt, wordt de prijs van een product bepaald door vraag en aanbod. Bij een hoge prijs zullen veel producenten bereid gevonden worden om het goed te fabriceren, maar zullen slechts weinig consumenten het product willen aankopen. De aangeboden hoeveelheid zal dan groter zijn dan de gevraagde hoeveelheid. Als de prijs laag is, dan zal het aanbod laag zijn en de vraag hoog. In dit geval ontstaat er een tekort op de markt. De prijs die voor het product gevraagd wordt, is daarom de prijs waarbij de gevraagde hoeveelheid en de aangeboden hoeveelheid aan elkaar gelijk zijn. Deze prijs wordt de *evenwichtsprijs* genoemd. De hoeveelheid die verkocht wordt, is de *evenwichtshoeveelheid*.

Het verband tussen de prijs p van een zeker product en de hoeveelheid v die van dat product verkocht kan worden, wordt beschreven door de *vraagfunctie*. We zullen in deze paragraaf veronderstellen dat de vraagfunctie $v = 360 - 0.5p$ 1 als vergelijking heeft. Het verband tussen de hoeveelheid a die aangeboden wordt en de prijs p wordt beschreven door de *aanbodfunctie*. In deze paragraaf heeft de aanbodfunctie $a = -20 + 0.45p$ 2 als vergelijking. De evenwichtsprijs is de prijs waarbij de gevraagde hoeveelheid v en de aangeboden hoeveelheid a aan elkaar gelijk zijn en is dus de oplossing van de vergelijking $360 - 0.5p = -20 + 0.45p$ 3. Zo vinden we dat de evenwichtsprijs in dit voorbeeld gelijk is aan 400 geldeenheden. Bij wijze van controle berekenen we de gevraagde en de aangeboden hoeveelheid bij deze prijs. We vinden in beide gevallen een hoeveelheid van 160 eenheden.

Het *marktmodel* uit de vorige alinea's geeft een 'ideale' prijs van het product. Uitgaande van allerlei gegevens hebben we een *vergelijking* opgesteld met als oplossing een *getal*, namelijk de evenwichtsprijs. In dit model is de tijd buiten beschouwing gelaten. We krijgen dus geen zicht op een eventuele *evolutie* die de prijs doormaakt. We hebben te maken met een *statisch marktmodel*.

In de realiteit speelt de tijd om verschillende redenen echter vaak wel een rol en zal de prijs evolueren. Een marktmodel waarbij dit in rekening gebracht wordt, is een *dynamisch marktmodel*. In een dynamisch marktmodel hangt de prijs af van de tijd. We kunnen de tijd hierbij als een *discrete* of als een *continue* veranderlijke opvatten. In het eerste geval wordt de prijsevolutie beschreven door een *rij* en spreken we over een *discreet dynamisch marktmodel*. Dit is het standpunt dat we hier innemen.

In deze paragraaf werken we een discreet dynamisch marktmodel uit: uitgaande van allerlei gegevens stellen we een *recursievergelijking met beginvoorwaarde* op en lossen we deze op. De oplossing hiervan is een *rij* die de evolutie van de prijs beschrijft.

Gegevens van het discrete dynamische marktmodel

In het statische marktmodel uit de vorige paragraaf zochten we een onbekend *getal*, namelijk de (evenwichts)prijs van het goed. In een discreet dynamisch model is de onbekende een *rij* van prijzen (we willen namelijk weten hoe de prijs in de tijd evolueert). Daarom passen we de notatie voor de prijs aan. We noteren de prijs *na verloop van n tijdseenheden* als p_n. De beginterm van de rij geeft de prijs weer die *nu*, d.w.z. na verloop van 0 tijdseenheden, van kracht is. De beginterm is dus de term met rangnummer 0.

Ook de gevraagde en de aangeboden hoeveelheid variëren. De gevraagde hoeveelheid na verloop van n tijdseenheden noteren we als v_n en de aangeboden hoeveelheid na verloop van n tijdseenheden als a_n. We passen het verband tussen de vraag en de prijs dan ook als volgt aan:

$$v_n = 360 - 0.5p_n \quad 4$$

voor elk natuurlijk getal n. Deze vergelijking drukt een verband uit tussen de vraag en de prijs, beide na verloop van n weken. Voor het aanbod gaan we er van uit dat het aanbod op een bepaald ogenblik *niet* afhangt van de prijs op *hetzelfde* ogenblik, maar van de prijs *één tijdseenheid vroeger*. In ons model reageert het aanbod dus met een zekere 'vertraging' op de prijs. Bij veel producten moet de beslissing om iets te produceren immers reeds genomen worden enige tijd vóór het product te koop aangeboden wordt. We kunnen hier bijvoorbeeld denken aan het verbouwen van een landbouwgewas: de landbouwer neemt de beslissing om een bepaald gewas te telen immers één jaar vóór hij het product op de markt brengt. Als we uitgaan van deze hypothese, wordt het verband tussen aanbod en prijs gegeven door:

$$a_n = -20 + 0.45 p_{n-1} \quad 5$$

voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$. We veronderstellen nu dat de evenwichtsvoorwaarde uit het statische marktmodel (de aangeboden en de gevraagde hoeveelheid zijn aan elkaar gelijk, $a = v$) *op elk ogenblik* voldaan is, dit wil zeggen

$$a_n = v_n \quad 6$$

voor elke waarde van *n*. Dit betekent dat we aannemen dat de aangeboden hoeveelheid volledig van de hand gedaan wordt, desnoods aan een lagere prijs dan voorzien. De producent bewaart dus geen deel van zijn productie om pas later te verkopen (bijvoorbeeld omdat het een bederfbaar product betreft).

Tot slot veronderstellen we dat het product aanvankelijk aangeboden wordt tegen een prijs van 200 geldeenheden, d.w.z.

$$p_0 = 200.$$

A.d.h.v. de volgende werktekst onderzoeken we hoe de prijzen evolueren. We zoeken de rij van prijzen waarvoor alle bovenstaande onderstellingen geldig zijn en onderzoeken het verloop van deze rij.

Een discreet, dynamisch marktmodel

In een discreet, dynamisch marktmodel onderzoeken we hoe de prijs, de gevraagde en de aangeboden hoeveelheid evolueren in de tijd. We vatten de tijd hierbij op als een discrete grootheid, d.w.z. dat we de tijdstippen voorstellen door natuurlijke getallen en geen rekening houden met tussenliggende tijdstippen. De prijs, de gevraagde hoeveelheid en de aangeboden hoeveelheid op tijdstip *n* noteren we door p_n, respectievelijk v_n en a_n. Het product dat we onderzoeken heeft een lange productietijd. Daardoor is het aanbod op tijdstip *n* gebaseerd op de prijs op tijdstip $n-1$. Het gaat bovendien over een bederfbaar product zodat er geen voorraden opgebouwd worden. Meer bepaald worden de verbanden tussen p_n, v_n en a_n beschreven door de volgende vergelijkingen:

(1) vraagvergelijking: $v_n = 360 - 0.5 p_n$ voor alle natuurlijke getallen *n*.

(2) aanbodvergelijking: $a_n = -20 + 0.45 p_{n-1}$ voor alle natuurlijke getallen $n \geq 1$.

(3) evenwichtsvergelijking: $a_n = v_n$ voor alle natuurlijke getallen *n*.

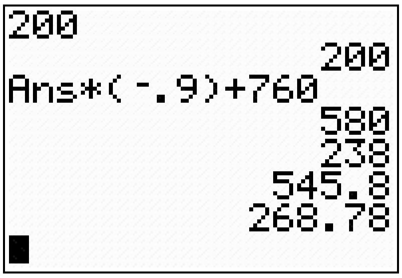
(4) beginwaarde: $p_0 = 200$.

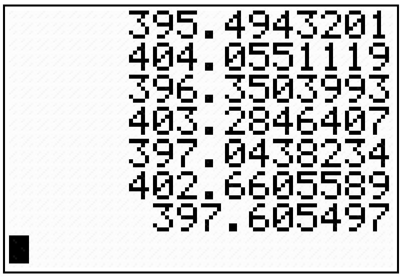
1. Stel met behulp van deze vergelijkingen een recursievergelijking op voor de rij van de prijzen, d.w.z. druk p_n uit in termen van p_{n-1} door de vraagvergelijking, aanbodvergelijking en evenwichtsvergelijking met elkaar te combineren.

   (Door (1) en (2) in te vullen in (3) en uit te werken, vinden we: $p_n = -0.9 p_{n-1} + 760$ 7.)

2. Onderzoek de evolutie van de prijs via berekeningen op het basisscherm. Probeer de prijsevolutie in woorden te beschrijven.

   (De onderstaande schermafdrukken tonen de berekeningen op het basisscherm.

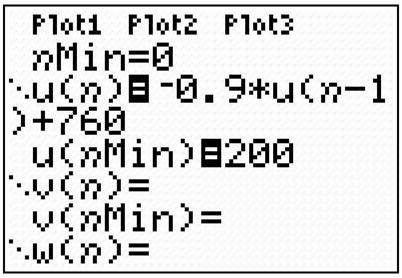


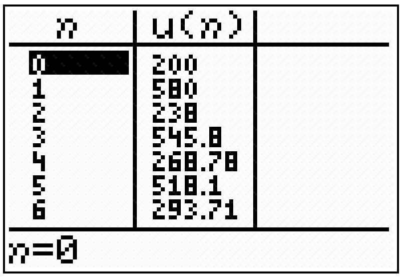


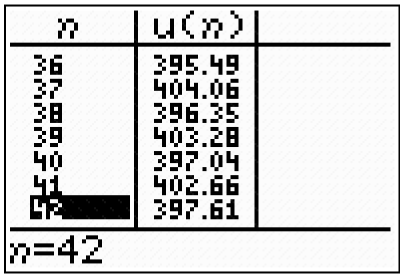
We stellen vast dat de prijs afwisselend stijgt en daalt. De prijs kent dus een schommelend verloop. Verder stellen we vast dat de schommelingen steeds kleiner worden. Daarom zeggen we dat de prijs gedempt schommelt. Tot slot merken we dat de prijs na verloop van tijd stabiliseert rond 400 *geldeenheden. Daarom kunnen we vermoeden dat de rij van de prijzen convergeert naar* 400.*)*

3. Maak een tabel en een 'gewone' grafiek van de evolutie van de prijzen.

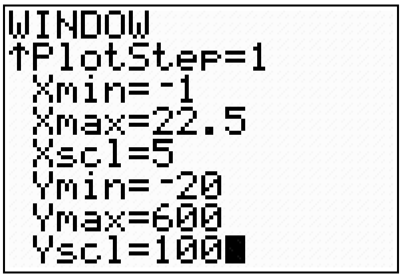
   (De onderstaande schermafdrukken tonen de tabel.

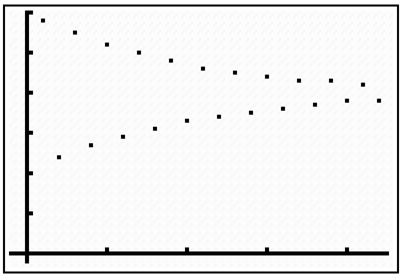




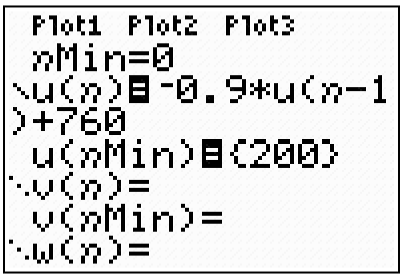


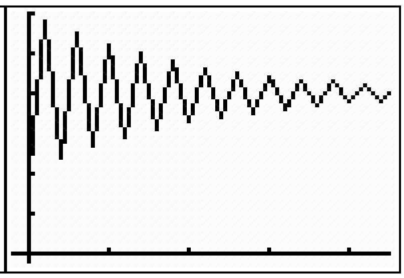
Voor het maken van de grafiek moeten we de rekenmachine terug instellen op het tekenen van de 'gewone' grafiek, in rekenmachineterminologie: de TIME-grafiek. Dat doen we m.b.v. [2nd] [FORMAT].





Het schommelende verloop van de rij komt niet goed naar voor in deze grafiek. Daarom laten we opeenvolgende punten van de grafiek verbinden met een lijnstukje. Dat doen we door in het Y=-scherm de cursor vóór u(n) *te plaatsen en met [ENTER] de drie puntjes te wijzigen in een lijnstukje.*





Op deze manier komt het schommelende verloop veel duidelijker naar voor.)

4. Gebruik de recursievergelijking om de evenwichtswaarde exact te berekenen. Controleer je berekening door de evolutie van de prijs te onderzoeken wanneer de beginwaarde gelijk is aan de evenwichtswaarde. Zie je een verband met het overeenkomstige statische marktmodel?

(De evenwichtswaarde E voldoet aan de vergelijking $E = -0.9E + 760$*. Zo vinden we dat de evenwichtswaarde gelijk is aan* 400*, de vermoedelijke limietwaarde. Als we de beginwaarde gelijk nemen aan* 400*, stellen we vast dat de prijs inderdaad constant blijft. De evenwichtswaarde uit het dynamische marktmodel is dezelfde als de evenwichtsprijs uit het statische marktmodel.)*

5. Onderzoek experimenteel of het hier over een stabiel evenwicht gaat.

   (We vullen voor de beginwaarde enkele andere waarden dan 400 *in en stellen vast dat de prijs telkens naar de evenwichtswaarde terugkeert.)*

6. Bepaal de expliciete vergelijking voor de prijs. Ga daarvoor tewerk zoals in paragraaf 3.c.

   (Eerst drukken we de eerste termen van de rij uit in functie van p_0 *:*

$$p_1 = -0.9 \cdot p_0 + 760$$

$$\begin{aligned} p_2 &= -0.9 \cdot p_1 + 760 \\ &= -0.9 \cdot (-0.9 \cdot p_0 + 760) + 760 \\ &= (-0.9)^2 \cdot p_0 + (-0.9 + 1) \cdot 760 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_3 &= -0.9 \cdot p_2 + 760 \\ &= -0.9 \cdot ((-0.9)^2 \cdot p_0 + (-0.9 + 1) \cdot 760) + 760 \\ &= (-0.9)^3 \cdot p_0 + ((-0.9)^2 + (-0.9) + 1) \cdot 760 \end{aligned}$$

Op basis van het patroon in deze uitdrukkingen vinden we de volgende formule voor p_n *:*

$$p_n = (-0.9)^n \cdot p_0 + ((-0.9)^{n-1} + (-0.9)^{n-2} + ... + (-0.9) + 1) \cdot 760 .$$

De som tussen de haakjes is een partieelsom van een meetkundige rij en kunnen we eenvoudiger schrijven, wat tot de volgende uitdrukking leidt:

$$p_n = (-0.9)^n \cdot p_0 + \frac{1 - (-0.9)^n}{1 - (-0.9)} \cdot 760 .$$

Uitwerking hiervan geeft:

$$H_n = (p_0 - 400) \cdot (-0.9)^n + 400 .$$

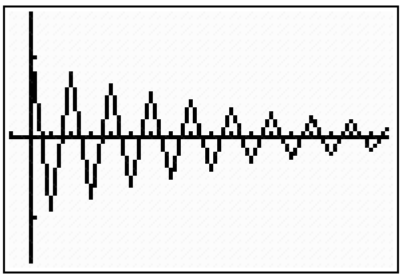
Met $p_0 = 200$ *vinden we tot slot:*

$$p_n = -200 \cdot (-0.9)^n + 400 \text{ .)}$$

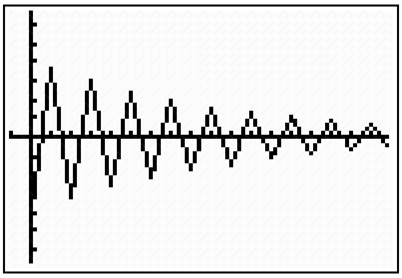
7. Bouw de grafiek op in stappen zoals in paragraaf 3.c.

   (We starten van een eenvoudige rij en bouwen de expliciete vergelijking stap voor stap op:

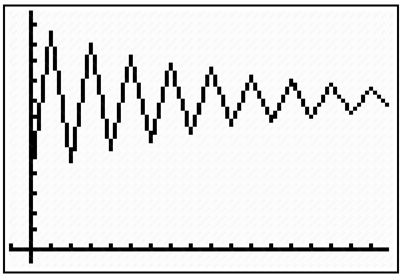
   - *De rij* $t_n = (-0.9)^n$ *kent een gedempt schommelend verloop (omdat het grondtal negatief is en in absolute waarde kleiner dan* 1*). De beginwaarde is* 1 *en de limietwaarde is* 0.



   - *Als we de factor* -200 *toevoegen, moeten we de grafiek eerst spiegelen t.o.v. de horizontale as en daarna verticaal uitrekken met factor* 200*. De beginwaarde is nu* -200*, de* *limietwaarde blijft 0 en de rij blijft gedempt schommelend verlopen. De onderstaande figuur toont de grafiek (waarbij we natuurlijk de schaal op de verticale as aangepast hebben).*



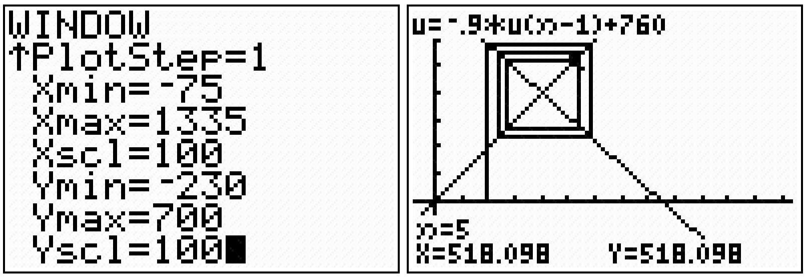
- *Tot slot voegen we de term* 400 *toe. De grafiek moet nu over* 400 *eenheden omhoog schuiven. De beginwaarde en de limietwaarde verhogen met* 400 *tot* 200 *en, respectievelijk* 400*. Het gedempt schommelende verloop blijft behouden.*



Op deze manier kunnen we het verloop van de grafiek goed begrijpen.)

8. Maak een webdiagram.

   (De onderstaande schermafdrukken tonen het resultaat. Vergeet de machine niet terug in te stellen op het tekenen van WEB-diagrammen m.b.v. [2nd] [FORMAT]. Let er ook op dat je gebruik maakt van de recursievergelijking en beginvoorwaarde en niet van de expliciete vergelijking.



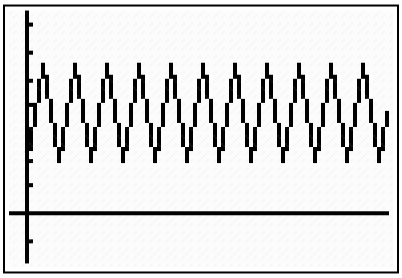
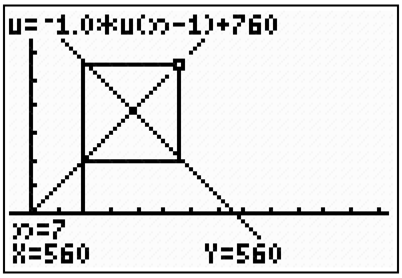
   Het webdiagram neemt nu niet de vorm aan van een trap, maar wel degelijk van een web. In dit webdiagram liggen opeenvolgende horizontale lijnstukjes afwisselend hoger en lager. Opeenvolgende verticale lijnstukjes liggen afwisselend verder en minder ver naar rechts. De horizontale en verticale lijnstukjes vormen een spiraal die naar binnen toe draait rond het snijpunt van de twee rechten.)

9. Geef de algemene oplossing van de recursievergelijking en bespreek het verloop ervan.

   (In $H_n = (p_0 - 400)\cdot(-0.9)^n + 400$ *vervangen we* $p_0 - 400$ *door C zodat we krijgen:* $H_n = C\cdot(-0.9)^n + 400$. *Als* $C \neq 0$*, gaat het over een gedempt schommelende rij met limietwaarde* 400*. Als* $C = 0$ *, is de rij constant.)*

10. Veronderstel dat de coëfficiënt 0.45 in de aanbodvergelijking verandert in 0.5. Hoe evolueert de prijs dan?

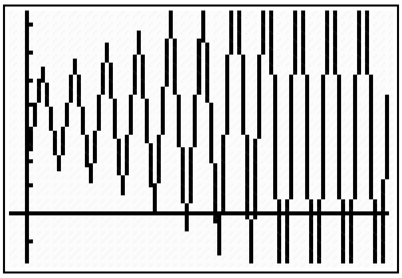
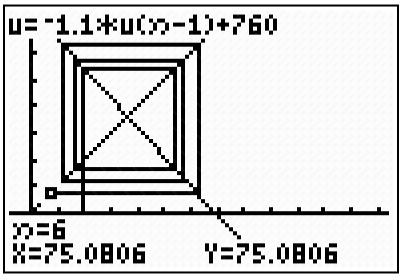
    (De recursievergelijking wordt $p_n = -p_{n-1} + 760$. *De onderstaande schermafdrukken tonen de TIME-grafiek en het webdiagram.*

De prijs kent nog steeds een schommelend verloop, maar de schommelingen blijven nu altijd even groot. We spreken over een gelijkmatig schommelend verloop. We kunnen het verloop ook op een andere manier beschrijven: er zijn twee waarden voor de prijs en de prijs is afwisselend gelijk aan de ene en de andere waarde. De prijs evolueert periodiek met periode 2.*)*

11. Veronderstel dat de coëfficiënt 0.45 in de aanbodvergelijking verandert in 0.55. Hoe evolueert de prijs dan?

    (De recursievergelijking wordt $p_n = -1.1 p_{n-1} + 760$. *De onderstaande schermafdrukken tonen de TIME-grafiek en het webdiagram.*

De prijs kent nog steeds een schommelend verloop, maar de schommelingen worden nu groter en groter. We spreken over een explosief schommelend verloop. In het wiskundige model wordt de prijs na verloop van tijd negatief. In de realiteit kan dat natuurlijk niet gebeuren. Het schommelende verloop zorgt er voor dat het webdiagram een web is. De spiraal gevormd door de horizontale en verticale lijnstukjes draait nu naar buiten toe, weg van het snijpunt van de twee rechten.)

12. Wat kan je vertellen over de limietwaarde en de evenwichtswaarde in de situaties uit vraag 10 en 11?

    (In vraag 10 *is er geen limietwaarde. In vraag* 11 *beschrijft het marktmodel de realiteit al na een aantal termen niet meer en heeft de vraag naar een limietwaarde vanuit dat oogpunt geen betekenis. Vanuit zuiver wiskundig standpunt heeft het wel zin om naar een limietwaarde te vragen, maar is er geen limiet.*

    In beide gevallen is er wél een evenwichtswaarde! Je kan ze bijvoorbeeld berekenen via het snijpunt van de twee rechten in het webdiagram. Dat geeft evenwichtswaarde 380 *in vraag* 10. *In vraag* 11 *is de evenwichtswaarde* $760/2.1 = 361.904... \approx 361.9$. *In beide gevallen gaat het over een labiel evenwicht: als de prijs uit evenwicht gebracht wordt, keert de prijs niet naar het evenwicht terug.)*

5. Lineaire recursievergelijkingen van de eerste orde met constante coëfficiënten en constant rechterlid

Lineaire recursievergelijkingen van de eerste orde met constante coëfficiënten en constant rechterlid

De recursievergelijkingen

$$V_n = V_{n-1} + 150\,,\; W_n = 1.25 W_{n-1}\,,\; H_n = 0.75 \cdot H_{n-1} + 1500 \text{ en } p_n = -0.9\, p_{n-1} + 760$$

die we in de vorige paragrafen ontmoetten, zijn van de vorm

$$t_n = a t_{n-1} + b\,,$$

met *a* en *b* getallen en *a* verschillend van 0. Recursievergelijkingen die we in deze vorm kunnen schrijven, noemen we *lineaire recursievergelijkingen van de eerste orde met constante coëfficiënten en constant rechterlid*.

Dat deze recursievergelijkingen *van de eerste orde* zijn, betekent dat we in het rechterlid slechts teruggaan tot de onmiddellijk voorgaande term t_{n-1}. Bij de recursievergelijking die de bekende rij van Fibonacci beschrijft, namelijk $t_n = t_{n-1} + t_{n-2}$, bevat het rechterlid niet alleen t_{n-1} maar ook t_{n-2}. Daarom is die recursievergelijking van de tweede orde.

Deze andere elementen uit de benaming verwijzen naar de equivalente vorm

$$t_n - a t_{n-1} = b$$

waarin we de lineaire recursievergelijkingen van de eerste orde met constante coëfficiënten en constant rechterlid kunnen schrijven. Het woord *lineair* verwijst naar het feit dat het linkerlid in de equivalente vorm een lineaire combinatie van t_n en t_{n-1} is. De coëfficiënten van deze lineaire combinatie zijn 1 en $-a$. De *coëfficiënten* zijn dus *constant*. Het *rechterlid b* is eveneens *constant*. Een voorbeeld van een niet-lineaire recursievergelijking is $t_n = (1+b)t_{n-1} - b t_{n-1}^2$ (met *b* een positief getal), die we verderop zullen bestuderen. Een lineaire recursievergelijking met variabele coëfficiënten is bijvoorbeeld $t_n - n t_{n-1} = 0$. De oplossing van deze recursievergelijking met beginwaarde $t_0 = 1$ is de rij met algemene term $t_n = n!$. Een voorbeeld van een lineaire recursievergelijking met constante coëfficiënten maar variabel rechterlid is $t_n - t_{n-1} = n$.

Algemene oplossing

Een berekening in de stijl van paragraaf 3.c. geeft de expliciete vergelijking van de oplossing met beginwaarde t_0:

$$t_n = \left(t_0 - \frac{b}{1-a}\right) \cdot a^n + \frac{b}{1-a}\,,$$

tenminste als $a \neq 1$. De algemene oplossing wordt kortweg geschreven als

$$t_n = C \cdot a^n + \frac{b}{1-a}\,,$$

waarbij *C* een willekeurig getal voorstelt. Als $a = 1$, zijn de oplossingen de rekenkundige rijen met expliciete vergelijking

$$t_n = t_0 + bn = C + bn \, .$$

Deze formules kunnen alleen gebruikt worden als de coëfficiënten en het rechterlid constant zijn!

Verloop

Het verloop van een oplossing hangt af van de waarde van *a, b* en *C*. In de vorige paragrafen hebben we nagenoeg alle mogelijkheden ontmoet:

- vertraagd/gelijkmatig/versneld stijgen of dalen;
- gedempt/gelijkmatig/explosief schommelen;
- constant.

Als $|a| < 1$ hebben alle oplossingen een gemeenschappelijke limietwaarde, namelijk $\frac{b}{1-a}$, en is die gelijk aan de evenwichtswaarde, die stabiel is. Zoals in paragraaf 3.e kunnen we aan de recursievergelijking de eerstegraadsfunctie f met vergelijking $f(x) = ax + b$ associëren, zodat $t_1 = f(t_0)$, $t_2 = f(f(t_0))$, $t_3 = f(f(f(t_0)))$, ... De evenwichtswaarde is een aantrekkend vast punt van *f*.

Als $|a| > 1$ is er geen limietwaarde (behalve in het triviale geval dat $C = 0$). Er is wel een evenwichtswaarde, ook $\frac{b}{1-a}$, die echter niet stabiel is. De evenwichtswaarde is een afstotend vast punt van *f*.

Ook als $a = -1$ is er geen limietwaarde (behalve in het triviale geval dat $C = 0$) en is er wel een evenwichtswaarde, namelijk $b/2$, die niet stabiel is. De oplossingen zijn periodiek met periode 2 (behalve als $C = 0$).

Als $a = 1$ en $b \neq 0$, hebben de oplossingen geen limietwaarde en geen evenwichtswaarde. Als $a = 1$ en $b = 0$, is elke oplossing constant. Dat betekent dat alle getallen dan evenwichtswaarden zijn.

Oplossen van recursievergelijkingen

De recursievergelijkingen uit de vorige paragrafen hebben we opgelost a.d.h.v. een redelijk lange berekening (cfr. paragraaf 3.c en opdracht 6 uit de werktekst in paragraaf 4). Nu we beschikken over algemene formules voor de algemene oplossing van een lineaire recursievergelijking van de eerste orde met constante coëfficiënten en constant rechterlid, kunnen we deze vergelijkingen sneller oplossen. We geven een voorbeeld.

Stel dat we de rij willen vinden die voldoet aan de recursievergelijking $t_n = 0.25 t_n + 3$ en waarvan de beginwaarde gegeven wordt door $t_0 = 2$. Dan bepalen we *eerst de algemene oplossing* door een van de bovenstaande formules toe te passen:

$$t_n = C \cdot 0.25^n + \frac{3}{1 - 0.25} = C \cdot 0.25^n + 4 \, .$$

Vervolgens bepalen we de waarde van *C* m.b.v. de gegeven beginwaarde:

$$t_n = C \cdot 0.25^0 + 4 = C + 4 \overset{eis}{=} 2 \, ,$$

waaruit we vinden dat $C = -2$. We besluiten dat $t_n = -2 \cdot 0.25^n + 4$.

Het homogene geval

Als de coëfficiënt b in de recursievergelijking 0 is, is het rechterlid in de equivalente vorm gelijk aan 0. In dat geval wordt de recursievergelijking homogeen genoemd. Voluit: een recursievergelijking die in de vorm $t_n = at_{n-1}$ of, equivalent, $t_n - at_{n-1} = 0$ geschreven kan worden, noemt men een homogene lineaire recursievergelijking van de eerste orde met constante coëfficiënt. De algemene formule blijft van toepassing, maar een van de twee termen in de oplossing verdwijnt. De algemene oplossing wordt gegeven door alle meetkundige rijen met reden a.

Een recursievergelijking waarvan de coëfficiënt b niet 0 is, wordt een volledige recursievergelijking genoemd. Bij het type dat we bestuderen, is er een mooi verband tussen de oplossing van de volledige recursievergelijking en de bijbehorende homogene recursievergelijking: de algemene oplossing van de volledige recursievergelijking is de algemene oplossing van de homogene recursievergelijking plus een (goed gekozen) constante (als $a \neq 1$).

6. Oefeningen

Opgaven

1. Bij het begin van het jaar 2000 telde België (afgerond) 10 280 000 inwoners. Als we migratie buiten beschouwing laten, neemt het aantal inwoners over elke periode van 20 jaar met 16% af. Het aantal inwoners na n periodes van 20 jaar stellen we voor door B_n.

   a. Geef een recursievergelijking voor B_n.

   b. Geef zo nauwkeurig mogelijk de benaming van het type van de recursievergelijking uit vraag a).

   Op basis van cijfers van het N.I.S. hebben we berekend dat er in een periode van 20 jaar een migratiesaldo is van (afgerond) 550 000 personen (het migratiesaldo is het verschil tussen het aantal inwijkelingen en het aantal uitwijkelingen). Dan wordt de evolutie van het aantal inwoners bepaald door de recursievergelijking $B_n = 0.84B_{n-1} + 550\,000$ (we gaan er voor de eenvoud van uit dat deze personen het land in één keer binnenkomen helemaal op het einde van de periode van 20 jaar, wat in realiteit natuurlijk niet het geval is).

   c. Geef de particuliere oplossing van deze recursievergelijking.

   d. Maak een webdiagram.

   e. Beschrijf het verloop van de particuliere oplossing in woorden.

   f. Hoeveel zou het migratiesaldo moeten bedragen opdat de bevolking constant gelijk zou blijven aan 10 280 000?

2. Op een perceel staan er nu 3000 kerstbomen. Een boomkweker moet beslissen hoeveel bomen er jaarlijks gekapt kunnen worden en hoeveel nieuwe aanplant er nodig is. Hij zal niet alle bomen in één keer kappen want dan heeft hij de eerstvolgende jaren geen opbrengst. Hij besluit elk jaar 10% van de bomen te kappen en er dan weer 450 aan te planten. Hij plant dus meer dan hij kapt om zijn opbrengst op termijn te verhogen. Op het perceel is namelijk plaats voor 5000 bomen. Noem het aantal bomen dat na n jaar op het perceel staat B_n.

   a. Laat zien dat je uit de tekst kunt halen dat B_n voldoet aan de recursievergelijking $B_n = 0.9B_{n-1} + 450$ met beginvoorwaarde $B_0 = 3000$.

   b. Maak een webdiagram.

   c. Bepaal de particuliere oplossing en beschrijf het verloop ervan in woorden.

   d. De achterkleinzoon neemt de zaak over. Hij heeft bedenkingen bij de handelswijze van zijn voorvaderen. Niet het hele perceel wordt benut. Er is immers plaats voor 5000 bomen. Kun je er voor zorgen dat het evenwicht op 5000 komt te liggen door

i. een verandering aan te brengen in het aantal nieuwe bomen dat aangeplant wordt (en verder alles ongewijzigd te laten)

ii. een verandering aan te brengen in het percentage dat gekapt wordt (en verder alles ongewijzigd te laten).

e. Door een ongeval kan de achterkleinzoon in een bepaald jaar slechts 400 nieuwe bomen aanplanten. Daardoor raakt het systeem tijdelijk uit evenwicht. De kleinzoon blijft echter bij zijn werkwijze. Hoe evolueert het aantal bomen?

3. Sjarel gaat met pensioen. Hij heeft zijn hele leven hard gewerkt en geregeld wat geld opzij gelegd. Op de dag dat hij met pensioen gaat, staat er op zijn spaarrekening 100 000 EUR. Deze rekening brengt maandelijks 0.25% intrest op (die bij het bedrag op de rekening gevoegd wordt). Elke maand (onmiddellijk na het toekennen van de intrest en voor de eerste keer nadat hij een maand op pensioen is) haalt Sjarel 1000 EUR van de rekening. Noem B_n het bedrag dat op de rekening staat nadat Sjarel voor de *n*-de maal geld van de rekening afgehaald heeft.

a. Welk bedrag staat er op de rekening nadat Sjarel voor de derde maal geld van de rekening gehaald heeft?

b. Toon aan dat $B_n = -300\,000 \cdot 1.0025^n + 400\,000$.

c. Geef een beschrijving in woorden van de evolutie van het bedrag dat op de rekening staat.

d. Wanneer kan Sjarel voor het laatst 1000 EUR van de rekening halen?

e. Hoeveel zou Sjarel minimaal gespaard moeten hebben (i.p.v. de opgegeven 100 000 EUR) opdat de rekening nooit leeg zou raken?

4. Een relatief nieuw product wordt verkocht op een markt met 50 000 potentiële klanten. We werken met een discreet model voor de evolutie van het aantal effectieve klanten en werken met tijdseenheden van een maand. Het aantal effectieve klanten binnen *n* maanden stellen we voor door a_n. We gaan ervan uit dat het aantal *nieuwe* klanten dat er in de loop van een maand bijkomt, evenredig is met het aantal potentiële klanten die het product nog *niet* bezaten in het begin van die maand. Op dit ogenblik zijn er 6 250 klanten die het product bezitten en binnen 2 maanden verwachten we dat er 22 000 klanten zullen zijn.

a. Druk a_n uit in functie van *n*.

b. Maak een grafiek van de rij die de evolutie van het aantal klanten beschrijft.

c. Het aantal *nieuwe* klanten in de *n*-de maand stellen we voor door b_n (de eerste maand loopt van tijdstip 0 tot tijdstip 1, de tweede van tijdstip 1 tot tijdstip 2, ...). Druk b_n uit in functie van *n*.

5. We beschrijven het verband tussen het nationale inkomen en het bedrag dat gespendeerd wordt aan consumptie in een bepaald land. We gaan uit van een heel eenvoudige (en onrealistische) situatie, namelijk dat er geen handel is met het buitenland. We vertrekken van een statisch model, d.w.z. een model waarin het inkomen *Y* en de consumptie *C* niet afhankelijk zijn van de tijd:

$$Y = C + 50 \text{ en } C = 0.4Y + 100 .$$

De eerste vergelijking drukt uit dat het consumeren van de inwoners inkomen oplevert voor andere inwoners van het land. Er is ook een bijkomende term, die bijvoorbeeld kan verwijzen naar overheidsinvesteringen. De tweede vergelijking drukt uit dat inwoners een deel van hun inkomen uitgeven aan consumptie (en de rest bijvoorbeeld sparen).

Het bijbehorende discrete dynamische model, waarbij inkomen en consumptie wél afhangen van de tijd, wordt gegeven door

$$Y_t = C_t + 50,\ C_{t+1} = 0.4Y_t + 100,\ C_0 = 300 .$$

Bemerk dat de tweede vergelijking uitdrukt dat de consumptie bepaald wordt door het inkomen in het voorgaande jaar!

a. Stel een recursievergelijking met beginvoorwaarde op voor het inkomen.

b. Bepaal de oplossing hiervan en beschrijf het verloop ervan in woorden.

c. Maak een webdiagram.

d. Stel een formule op voor de evolutie van de *consumptie*.

6. Van een zeker product gaat 5% van de exemplaren die in het begin van het jaar in gebruik zijn definitief kapot in de loop van het jaar. De helft hiervan wordt vervangen door een nieuw exemplaar. Daarbovenop worden in de loop van één jaar nog 50 nieuwe exemplaren van het product in gebruik genomen. Op dit ogenblik zijn er 440 exemplaren van het product in gebruik.

a. Wanneer zullen er voor het eerst minstens 800 exemplaren van het product in gebruik zijn?

b. Hoeveel exemplaren zullen er op heel lange termijn in gebruik zijn?

c. Maak een grafiek van het aantal exemplaren dat in gebruik is in functie van de tijd.

Met x_n stellen we het aantal exemplaren voor dat in het *n*-de jaar gefabriceerd moet worden (het eerste jaar loopt van nu tot binnen 1 jaar, het tweede jaar loopt van binnen 1 jaar tot binnen 2 jaar, …).

d. Geef een formule voor x_n.

e. Hoeveel exemplaren moeten er in het totaal in de loop van de eerste 20 jaar gefabriceerd worden?

7. In een zeker land worden gouden munten gebruikt. Men wil deze munten vervangen door munten in zilver. De Nationale Bank krijgt de opdracht om al haar betalingen te doen in zilveren muntstukken en alle binnenkomende gouden munten te behouden. Veronderstel dat er in het totaal 1 000 000 muntstukken in omloop zijn en veronderstel dat er elke dag in het totaal 10 000 muntstukken binnenkomen op de Nationale Bank en dat de Bank ook elke dag 10 000 muntstukken uitgeeft. Neem aan dat in die 10 000 binnenkomende muntstukken procentueel gezien evenveel zilveren muntstukken zitten als in de totale hoeveelheid muntstukken die in omloop zijn.

a. Hoeveel zilveren muntstukken zijn er in omloop één dag na de uitgifte?

b. Hoeveel zilveren muntstukken zijn er in omloop na twee en na drie dagen?

Noem z_n het aantal zilveren muntstukken dat in omloop is na *n* dagen.

c. Stel een recursievergelijking op voor z_n (d.w.z. druk z_n uit in functie van z_{n-1}).

d. Geef de beginvoorwaarde.

e. Los deze recursievergelijking met beginvoorwaarde op.

f. Hoe lang duurt het eer de helft van de munten vervangen is?

g. Wanneer zullen alle munten vervangen zijn?

8. Aan een oude boeddhistische monnik werd het volgende probleem voorgelegd. Een plankje is voorzien van drie verticale pinnen. Verder zijn er 25 ronde schijven, oplopend in grootte, met een gaatje in het midden. Op één van de pinnen is een toren gebouwd met deze schijven, waarbij de grootte van de schijven afneemt naarmate de schijf hoger ligt. Deze toren moet nu verplaatst worden in zo weinig mogelijk zetten naar één van de andere pinnen. Daarbij mag per zet maar één schijf verplaatst worden en mag een grotere schijf nooit boven een kleinere schijf geplaatst worden.

a. Voer de opdracht uit met 2 schijven i.p.v. 25. Hoeveel zetten zijn er nodig?

b. Doe hetzelfde voor 3 en voor 4 schijven.

Noem a_n het aantal zetten dat nodig is om een toren van *n* schijven te verplaatsen.

c. Toon aan dat het aantal zetten voldoet aan de volgende recursievergelijking met beginvoorwaarde: $a_n = 2a_{n-1} + 1,\ a_2 = 3$.

d. Gebruik dit om het aantal zetten te bepalen voor het oorspronkelijke probleem.

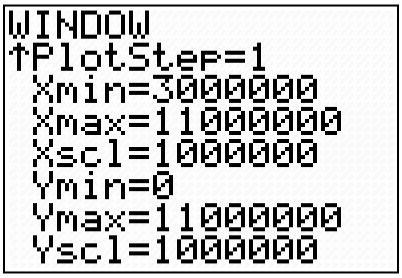
Oplossingen

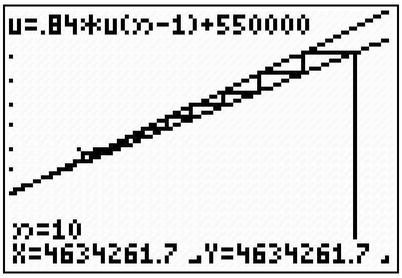
1. a. $B_n = 0.84B_{n-1}$

   b. Het gaat om een homogene lineaire recursievergelijking van de eerste orde met constante coëfficiënten.

   c. Toepassen van de formule uit de voorgaande paragraaf geeft $B_n = C \cdot 0.84^n + 3\,437\,500$ voor de algemene oplossing. Gebruik van de beginvoorwaarde geeft dat $C = 6\,842\,500$.

   d. zie onderstaande schermafdrukken



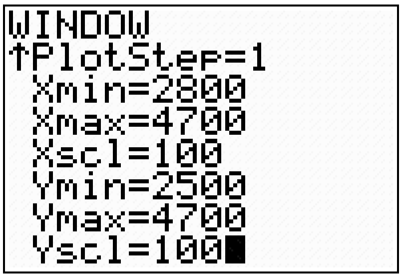


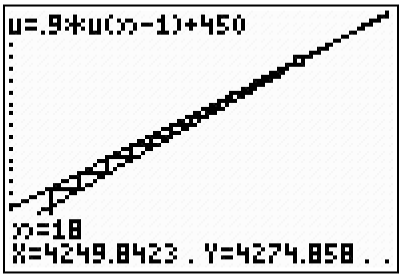
   e. De rij verloopt vertraagd dalend met limietwaarde 3 437 500.

   f. Als je de term 550 000 in de recursievergelijking door *x* vervangt en oplost, krijg je als particuliere oplossing $B_n = (10\,280\,000 - x/0.16) \cdot 0.84^n + x/0.16$. Deze rij is constant als $x/0.16 = 10\,280\,000$, d.w.z. als $x = 1\,644\,800$.

2. a.

   b. zie onderstaande schermafdrukken





   c. Met behulp van de formule uit de voorgaande paragraaf vinden we $B_n = C \cdot 0.9^n + 4500$ voor de algemene oplossing. M.b.v. de beginvoorwaarde vinden we $B_n = -1500 \cdot 0.9^n + 4500$ voor de particuliere oplossing. De rij verloopt vertraagd stijgend met limietwaarde 4500.

   d. i. Vervang 450 door x en druk uit dat $B_n = 5000$ een (constante) oplossing van de recursievergelijking moet zijn. Je vindt: $5000 = 0.9 \cdot 5000 + x$, waaruit $x = 500$. De achterkleinzoon moet dus jaarlijks 500 bomen planten.

   ii. Vervang 0.1 (10%) door x en druk uit dat $B_n = 5000$ een (constante) oplossing van de recursievergelijking moet zijn. Je vindt: $5000 = (1-x) \cdot 5000 + 450$, waaruit $x = 0.09$. De achterkleinzoon mag jaarlijks dus slechts 9% van de bomen kappen.

   e. Het evolueert opnieuw naar het evenwicht.

3. a. Er is gegeven dat $B_0 = 100\,000$. Op het einde van de eerste maand wordt eerst intrest toegevoegd en daarna haalt Sjarel geld van zijn rekening, zodat

$$B_1 = B_0 \cdot 1.0025 - 1000 = 99\,250.$$

Op dezelfde manier vinden we dat

$$B_2 = B_1 \cdot 1.0025 - 1000 = 98\,498.125$$

en

$$B_3 = B_2 \cdot 1.0025 - 1000 = 97\,744.3703... \approx 97\,744.37\,.$$

b. De rij voldoet aan de recursievergelijking $B_n = B_{n-1} \cdot 1.0025 - 1000$. Met behulp van de formule uit de voorgaande paragraaf vinden we de algemene oplossing. $B_n = C \cdot 1.0025^n + 400\,000$. De beginvoorwaarde $B_0 = 100\,000$ laat toen om de constante te bepalen: $C = -300\,000$.

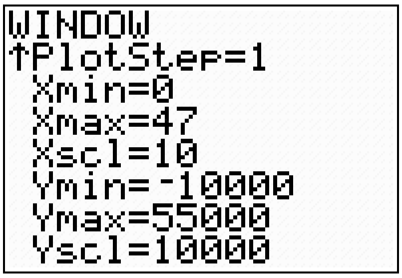
c. De rij is versneld dalend met limiet min oneindig (maar zover zal de bank het natuurlijk niet laten komen...).

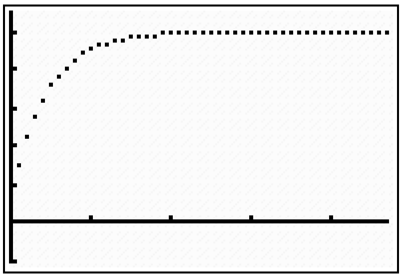
d. De vergelijking $B_n = 0$ heeft als oplossing $n = 115.21...$. Dat betekent dat er na de 115-de afhaling nog een licht positief saldo is, maar onvoldoende om na 116 maanden nog een afhaling te doen.

e. Alleen als de rij constant is (of stijgend, maar dat is hier niet aan de orde) raakt de rekening nooit leeg. In de algemene oplossing moet dan $C = 0$. Dat betekent dat de beginwaarde 400 000 EUR moet bedragen. In de praktijk zal het natuurlijk niet nodig zijn om zoveel geld op de rekening te hebben staan. Sjarel heeft immers niet het eeuwige leven...

4. a. De zin die stelt dat het aantal nieuwe klanten dat er in de loop van de maand bijkomt, evenredig is met het aantal potentiële klanten die het product nog *niet* bezaten in het begin van die maand, kan in formulevorm vertaald worden als $a_n - a_{n-1} = k(50\,000 - a_{n-1})$, met k een (positief) getal. We herschrijven dit als $a_n = (1-k)a_{n-1} + 50\,000k$. De algemene oplossing van deze recursievergelijking is $a_n = C(1-k)^n + 50\,000$. Met het gegeven dat $a_0 = 6250$, bepalen we C: $C = -43\,750$. Met het gegeven dat $a_2 = 22\,000$, bepalen we dan k: $k = 0.2$. Bijgevolg: $a_n = -43\,750 \cdot 0.8^n + 50\,000$.

b. zie onderstaande schermafdrukken





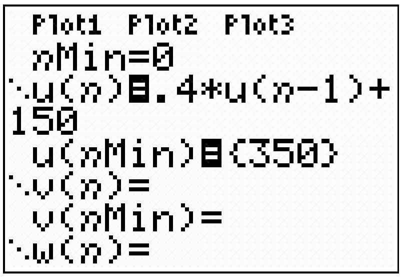
c. Het aantal nieuwe klanten is het verschil tussen het aantal klanten op het einde en in het begin van de maand:

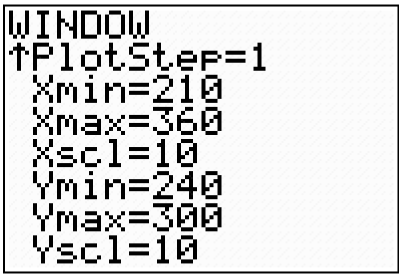
$$b_n = a_n - a_{n-1} = k(50\,000 - a_{n-1}) = 0.2 \cdot 43\,750 \cdot 0.8^{n-1} = 8750 \cdot 0.8^{n-1} = 10\,937.5 \cdot 0.8^n$$

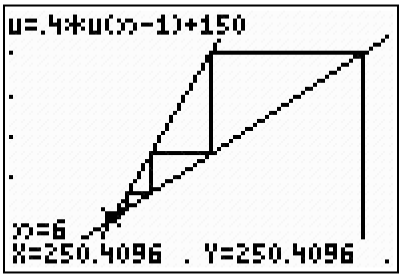
5. a. Herschrijf de tweede vergelijking als $C_t = 0.4Y_{t-1} + 100$ en combineer ze met de eerste vergelijking. Dit geeft: $Y_t = 0.4Y_{t-1} + 150$. De beginvoorwaarde vind je door de eerste en de derde vergelijking te combineren: $Y_0 = 350$.

b. Maak gebruik van de werkwijze uit de voorgaande paragraaf. Dat geeft: $Y_t = 100 \cdot 0.4^t + 250$. Het inkomen daalt vertraagd en bedraagt op lange termijn ongeveer 250 eenheden.

c. zie onderstaande schermafdrukken





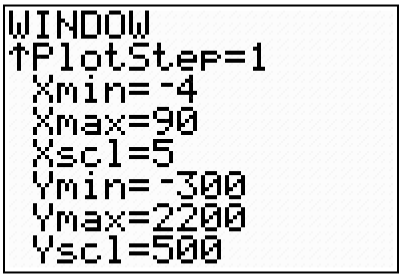


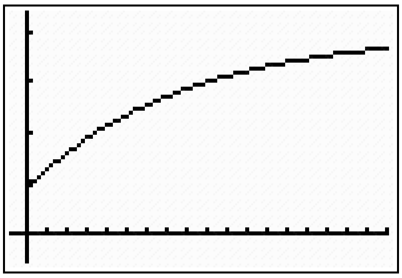
d. Combineer de gegeven vergelijking $Y_t = C_t + 50$ met de uitdrukking voor het *inkomen* uit oplossing b): $C_t = 100 \cdot 0.4^t + 200$.

6. a. We noteren met y_n het aantal exemplaren van het product dat in gebruik is. De recursievergelijking is dan $y_n = 0.975 y_{n-1} + 50$ en de beginwaarde is $y_0 = 440$. De particuliere oplossing is $y_n = -1560 \cdot 0.975^n + 2000$. Oplossen van de vergelijking $-1560 \cdot 0.975^n + 2000 = 800$ geeft $n = 10.36...$ Omdat de rij stijgend is, is $y_n \geq 800$ als $n \geq 11$. Het aantal exemplaren in gebruik, is dus voor het eerst minstens 800 binnen 11 jaar.

b. 2000

c. zie onderstaande schermafdrukken





d. Het aantal gefabriceerde exemplaren bestaat uit twee delen: een vast aantal van 50 exemplaren en een veranderlijk aantal, namelijk 2.5% van het aantal dat in het begin van het jaar in gebruik was. Het begin van het *n*-de jaar is tijdstip $n-1$. We vinden dus:

$$x_n = 50 + 0.025 y_{n-1} = 50 + 0.025 \cdot (-1560 \cdot 0.975^{n-1} + 2000) = -40 \cdot 0.975^n + 100 .$$

e. $\sum_{n=1}^{20} \left(-40 \cdot 0.975^n + 100\right) = -40 \sum_{n=1}^{20} 0.975^n + 20 \cdot 100 \approx 1380$

7. a. De eerste dag geeft de bank 10 000 zilveren muntstukken uit en zijn alle munten die bij de bank binnenkomen van goud. Er zijn op het eind van de eerste dag dus 10 000 zilveren muntstukken in omloop.

b. Ook de tweede dag geeft de bank 10 000 zilveren muntstukken uit. Bij de muntstukken die bij de bank binnenkomen zijn er nu echter ook een klein aantal zilveren munten. Elke dag wordt 1% van de munten die in omloop zijn binnengebracht bij de bank. Wegens de gemaakte veronderstelling worden die dag dan ook 1% van de zilveren munten die aan het begin van de dag in omloop waren op de bank binnengebracht. Dat betekent dat 100 van de binnengebrachte munten van zilver zijn. Er komen per saldo dus slechts 9900 nieuwe zilveren munten in omloop, wat het totaal na de tweede dag op 19 900 brengt. Een analoge redenering leert dat er na de derde dag 29 701 zilveren munten in omloop zijn.

c. De bank geeft 10 000 zilveren munten uit, maar krijgt 1% van de zilveren munten die reeds in omloop waren terug binnen: $z_n = z_{n-1} + 10\,000 - 0.01 z_{n-1} = 0.99 z_{n-1} + 10\,000$.

d. $z_0 = 0$

e. $z_n = 1\,000\,000 \left(1 - 0.99^n\right)$

f. 69 dagen

g. In theorie zullen de munten nooit allemaal vervangen zijn. Voor praktisch gebruik kan men bijvoorbeeld berekenen wanneer 99% van de munten vervangen zullen zijn. Dat is na 459 dagen.

8. a. Veronderstel dat je de twee schijven moet verplaatsen van pin A naar pin B. De overblijvende pin noemen we pin C. Verplaats eerst de kleinste schijf naar pin C. Breng daarna de grootste schijf over naar pin B. Verplaats tot slot de kleinste schijf naar pin B. Er zijn dus 3 zetten nodig.

b. Voor de toren van 3 schijven kan je als volgt tewerk gaan. Breng de bovenste twee schijven eerst over naar pin C. Uit het antwoord op vraag a) weten we dat dit 3 zetten vergt. Verplaats nu de grootste schijf naar pin B. Breng tot slot de kleinste twee schijven over van pin C naar pin B. Dat vergt weer 3 zetten. In het totaal hebben we dus $3+1+3=7$ zetten nodig.

Voor de toren met 4 schijven gaan we op een gelijkaardige manier tewerk. Eerst verplaatsen we de toren met de kleinste 3 schijven naar pin C, dan verplaatsen we de grootste schijf naar pin B en tot slot brengen we de toren met de kleinste 3 schijven over naar pin B. Dat vergt $7+1+7=15$ zetten.

c. We gaan tewerk zoals in vraag b. Eerst verplaatsen we de toren met de kleinste $n-1$ schijven naar pin C, dan verplaatsen we de grootste schijf naar pin B en tot slot brengen we de toren met de kleinste $n-1$ schijven over naar pin B. Dat vergt $a_{n-1}+1+a_{n-1}$ zetten. Dit geeft de recursievergelijking. De beginvoorwaarde volgt onmiddellijk uit het antwoord op vraag a.

d. De particuliere oplossing van de recursievergelijking is $a_n = 2^n - 1$. Het vereiste aantal zetten is dan $a_{25} = 2^{25} - 1 = 33\,554\,431$.

7. Matrixmodellen en stelsels van gekoppelde homogene lineaire recursievergelijkingen van de eerste orde

In deze paragraaf willen we laten zien dat het onderwerp recursievergelijkingen raakpunten heeft met een thema dat in veel klassen ondertussen een vaste stek verworven heeft: matrixmodellen voor migratie, groei van een populatie met leeftijdsklassen, … In de onderstaande werktekst starten we met een 2×2-matrixmodel voor migratie en merken we dat we dit kunnen opvatten als een stelsel van twee gekoppelde recursievergelijkingen dat twee rijen tegelijk beschrijft. Werken met een matrixmodel betekent m.a.w. dat we de dimensie van het model opdrijven van één naar twee (of meer).

We gaan er in de onderstaande werktekst van uit dat de leerlingen (en de lezers dus ook) reeds vroeger met overgangsmatrices hebben leren werken.

Recursief migreren

In een zeker gebied wonen 3 000 000 mensen. Het gebied bestaat uit een centraal gelegen grote stad met daaromheen een uitgestrekt platteland. Op dit ogenblik wonen er 1 000 000 mensen in de stad en 2 000 000 op het platteland. We geven deze beginsituatie weer m.b.v. de kolommatrix

$$X_0 = \begin{bmatrix} s_0 \\ p_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\,000\,000 \\ 2\,000\,000 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow s \\ \leftarrow p \end{matrix}$$

Mensen verhuizen van de stad naar het platteland en omgekeerd. De verhuisbewegingen, gemeten over periodes van 10 jaar, worden weergegeven door de onderstaande migratiematrix *P*:

$$\begin{array}{ccc} & \textit{van} & \\ & \begin{array}{cc} s & p \end{array} & \\ & \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} s \\ p \end{array} \ \textit{naar} \end{array}$$

De bevolking in stad en platteland na *n* periodes van 10 jaar geven we weer door

$$X_n = \begin{bmatrix} s_n \\ p_n \end{bmatrix}.$$

1. Laat aan de hand van een matrixberekening zien dat

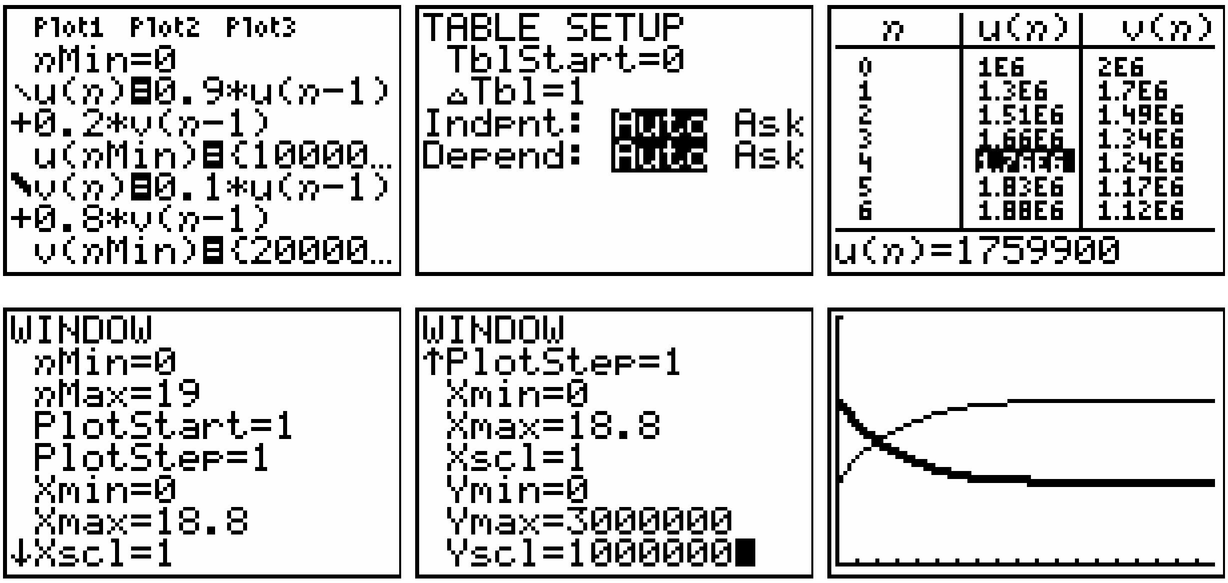
$$\begin{cases} s_n = 0.9 \cdot s_{n-1} + 0.2 \cdot p_{n-1} \\ p_n = 0.1 \cdot s_{n-1} + 0.8 \cdot p_{n-1} \end{cases}$$

   (Schrijf $X_n = P \cdot X_{n-1}$ *voluit.)*

De uitdrukking hierboven is een *stelsel van twee (gekoppelde) recursievergelijkingen:* de waarde van *s* en *p* na een aantal periodes wordt uitgedrukt in functie van de waarden van *s* en *p* één periode eerder. Om de waarde van *s* na *n* periodes te kennen, heb je zowel de waarde van *s* als die van *p* na $n-1$ periodes nodig.

2. Voer de twee recursieve voorschriften uit de vorige vraag in je rekenmachine in. Laat een tabel en een grafiek maken die de evolutie van de bevolking van de stad en het platteland weergeven. Beschrijf de evolutie van de bevolking in stad en platteland in woorden.

   (De onderstaande schermafdrukken tonen hoe het met de rekenmachine in zijn werk gaat. Vergeet niet te controleren of de grafiekoptie TIME ingesteld is. We zien dat de bevolking in de stad vertraagd toeneemt van 1 000 000 *in het begin naar* 2 000 000 *op lange termijn. De bevolking op het platteland daalt vertraagd van* 2 000 000 *in het begin naar* 1 000 000 *op lange termijn.)*



3. Waag, op basis van het antwoord op de vorige vraag, een 'gefundeerde gok' voor een expliciet voorschrift voor s_n. In je voorstel mogen nog parameters voorkomen.

   (Op basis van de limietwaarde (2 000 000)*, de beginwaarde* (1 000 000) *en het vertraagd stijgende verloop (en de ervaring die opgedaan is met recursievergelijkingen), lijkt* $s_n = -1\,000\,000 \cdot g^n + 2\,000\,000$*, met g een getal tussen* 0 *en* 1*, een verantwoorde gok.)*

4. Geef, gebruik makend van je antwoord op de vorige vraag, een expliciet voorschrift voor p_n.

(Maak gebruik van het feit dat de totale bevolking steeds uit 3 000 000 *personen bestaat. Je vindt* $p_n = 1\,000\,000 \cdot g^n + 1\,000\,000$*.)*

5. Bepaal de waarde van de onbekende parameter(s) in de uitdrukkingen uit vraag 3 en 4 door je ‘gefundeerde gok’ in te vullen in het stelsel recursievergelijkingen.

   (Als je de uitdrukkingen invult in de eerste recursievergelijking, vind je

   $$-1\,000\,000g^n + 2\,000\,000 =$$
   $$= 0.9 \cdot (-1\,000\,000g^{n-1} + 2\,000\,000) + 0.2 \cdot (1\,000\,000g^{n-1} + 1\,000\,000)\,.$$

   Na vereenvoudiging geeft dit $g^n = 0.7g^{n-1}$*, waaruit we afleiden dat* $g = 0.7$*. De tweede recursievergelijking klopt daarmee meteen ook.)*

6. Bepaal op dezelfde manier een expliciete formule voor de evolutie van de bevolking in stad en platteland voor een gebied waarvan de beginpopulatie en de overgangsmatrix gegeven worden door

   $$X_0 = \begin{bmatrix} 2\,500\,000 \\ 1\,500\,000 \end{bmatrix} \text{ en } P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}.$$

   ($s_n = 100\,000 \cdot 0.5^n + 2\,400\,000$ *en* $p_n = -100\,000 \cdot 0.5^n + 1\,600\,000$ *)*

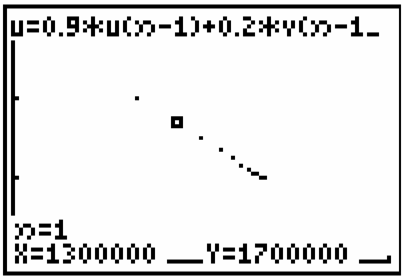
In de werktekst hebben we voor het bepalen van de expliciete voorschriften sterk gesteund op de grafiek die door de rekenmachine getekend werd. Voor 2×2-migratiematrices volstaat dat. In dat speciale geval krijg je namelijk altijd expliciete voorschriften waarvan het rechterlid de vorm $c \cdot g^n + b$ aanneemt. De waarde van de parameters kun je eenvoudig bepalen.

Voor andere 2×2-matrixmodellen en voor grotere matrixmodellen is het in het algemeen niet meer mogelijk op basis van de grafiek de vorm van het expliciete voorschrift te raden. Men kan aantonen dat bij 2×2-Lesliematrices en bij de matrix uit de volgende paragraaf het rechterlid van het expliciete voorschrift van de vorm $c_1 \cdot g_1{}^n + c_2 \cdot g_2{}^n$ is, waarbij de ‘grondtallen’ g_1 en g_2 de eigenwaarden van de matrix zijn. Bij 2×2-migratiematrices is *g* een van de eigenwaarden en is de andere eigenwaarde steeds gelijk aan 1. Maar je hebt in de werktekst gemerkt dat je *g* ook kunt bepalen zonder dat te weten.

Je kunt de band met recursieve voorschriften nog op een andere manier leggen dan in de werktekst. De gekende formule $X_n = P \cdot X_{n-1}$ drukt de bevolking in stad en platteland op een zeker tijdstip uit in functie van de bevolking in stad en platteland één periode eerder. We hebben dus te maken met een recursief voorschrift. Het verschil met de recursieve voorschriften die we vroeger bekeken, is dat het recursieve voorschrift nu niet een rij van *getallen* beschrijft, maar een rij van *kolomvectoren*.

We willen nog een opmerking kwijt over deze ‘meerdimensionale’ recursievergelijking. Ze is namelijk het meerdimensionale equivalent van de ‘ééndimensionale’ recursievergelijking $x_n = p \cdot x_{n-1}$ die de meetkundige rijen beschrijft. De matrixmodellen die we in het secundair onderwijs bestuderen zijn m.a.w. meerdimensionale veralgemeningen van meetkundige rijen. Of nog: Lesliemodellen zijn meerdimensionale versies van exponentiële groei.

Voor een stelsel van twee gekoppelde recursievergelijkingen biedt de rekenmachine nog een ander type grafiek. Kies via [2nd] [FORMAT] de instelling uv. Voor elke waarde van *n* tekent de machine dan het punt (s_n, p_n) (in ‘machinetaal’: $(u(n), v(n))$; vandaar de naam). Met TRACE kun je de evolutie van de bevolking volgen. Het hoeft niet te verwonderen dat de punten op een rechte liggen: het gaat om de rechte met vergelijking $x + y = 4\,000\,000$, die uitdrukt dat de totale bevolking constant blijft.



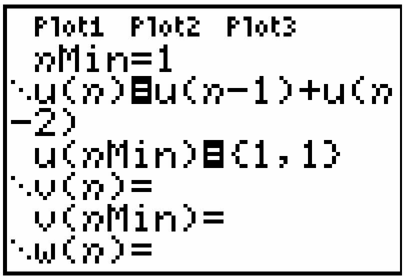
We hebben in deze paragraaf enkel een tip van de sluier opgelicht. Voor meer informatie over deze matrixmodellen verwijzen we je naar [4], [7], [9] en [13].

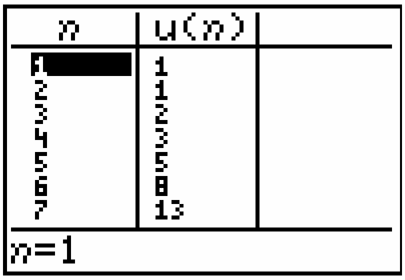
8. Een lineaire recursievergelijking van de tweede orde met constante coëfficiënten en constant rechterlid

De recursievergelijking en beginwoorwaarden

In deze paragraaf bekijken we de rij van Fibonacci als een oplossing van een recursievergelijking. In de rij van Fibonacci is elke term gelijk aan de som van de voorgaande twee. Als we dit in symbolen vertalen, krijgen we $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, een recursievergelijking *van de tweede orde* (omdat een term uitgedrukt wordt in functie van de voorgaande *twee* termen). De recursievergelijkingen die we in de vorige paragrafen ontmoetten, waren van de eerste orde. We kunnen de vergelijking ook in de vorm $x_n - x_{n-1} - x_{n-2} = 0$ schrijven. Omdat het linkerlid nu een lineaire combinatie van x_n, x_{n-1} en x_{n-2} is, gaat het om een lineaire recursievergelijking. De coëfficiënten van deze lineaire combinatie zijn constant. Omdat het rechterlid 0 is, is de vergelijking homogeen. Voluit gaat het dus over een homogene lineaire recursievergelijking van de tweede orde met constante coëfficiënten.

Ook een recursievergelijking van de tweede orde kun je in de grafische rekenmachine invoeren. Denk er wel aan dat er twee beginvoorwaarden nodig zijn: $x_1 = 1$ en $x_2 = 1$. De accolades en de komma moet je nu zelf ingeven.





Opstellen van de expliciete vergelijking – eerste methode

We zoeken nu een expliciet voorschrift voor de rij van Fibonacci. We tonen daarvoor twee manieren. Bij de eerste manier beginnen we met ons af te vragen of er meetkundige rijen zijn die aan de recursievergelijking voldoen. Dat is niet zo'n gekke vraag, want meetkundige rijen spelen een belangrijke rol bij het oplossen van de lineaire recursievergelijkingen van de eerste orde die we in de voorgaande paragrafen bestudeerden. We vragen ons meer bepaald af of er van 0 verschillende getallen k bestaan waarvoor $x_n = k^n$ aan de recursievergelijking voldoet. Invullen geeft dat dan

$$k^n - k^{n-1} - k^{n-2} = 0$$

moet gelden voor elke waarde van n. Als we het linkerlid ontbinden in factoren, zien we dat

$$k^{n-2}(k^2-k-1)=0$$

moet gelden voor elke waarde van *n*, of (omdat *k* niet 0 is):

$$k^2-k-1=0\,.$$

Deze vergelijking wordt de *karakteristieke vergelijking* van de recursievergelijking genoemd. Ze heeft twee oplossingen, namelijk

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ en } \frac{1-\sqrt{5}}{2}\,.$$

Er zijn dus wel degelijk meetkundige rijen die oplossing zijn van de recursievergelijking:

$$x_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \text{ en } x_n=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\,.$$

Het is eenvoudig om in te zien dat alle lineaire combinaties van deze twee rijen ook oplossingen zijn van de recursievergelijking. Dat komt omdat de recursievergelijking lineair en homogeen is. Met andere woorden: alle rijen waarvan de algemene term in de vorm

$$x_n=C_1\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+C_2\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

geschreven kan worden (met C_1 en C_2 willekeurige getallen), zijn oplossing van de recursievergelijking. Het zijn bovendien de enige oplossingen van de recursievergelijking (maar dat is minder gemakkelijk aan te tonen).

M.b.v. de beginvoorwaarden $x_1=1$ en $x_2=1$ bepalen we de waarden van C_1 en C_2. Uit

$$x_1=C_1\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}+C_2\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2}\overset{eis}{=}1 \text{ en } x_2=C_1\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+C_2\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\overset{eis}{=}1$$

vinden we dat

$$C_1=\frac{\sqrt{5}}{5} \text{ en } C_2=-\frac{\sqrt{5}}{5}\,.$$

Zo vinden we de volgende uitdrukking voor de *n*-de term van de rij van Fibonacci:

$$x_n=\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\,.$$

Opstellen van de expliciete vergelijking – tweede methode

Bij de tweede methode maken we gebruik van wat we in de vorige paragraaf leerden. Met behulp van de hulprij $y_n=x_{n-1}$ kunnen we de recursievergelijking van de tweede orde omzetten in een stelsel van twee recursievergelijkingen:

$$\begin{cases} x_n=x_{n-1}+y_{n-1} \\ y_n=x_{n-1} \end{cases},$$

of in matrixvorm:

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{bmatrix}.$$

De eigenwaarden van de 2×2-matrix zijn $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ en $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Zoals we in de voorgaande paragraaf aangaven, is het expliciete voorschrift voor x_n dan van de vorm

$$x_n = C_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Zoals bij de eerste methode kan je nu gebruik maken van de beginvoorwaarden om de waarden van C_1 en C_2 te vinden.

Limietgedrag

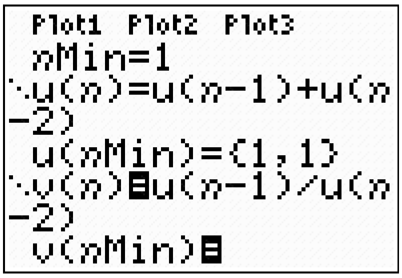
Een gekende eigenschap van de rij van Fibonacci is de volgende ‘limieteigenschap’:

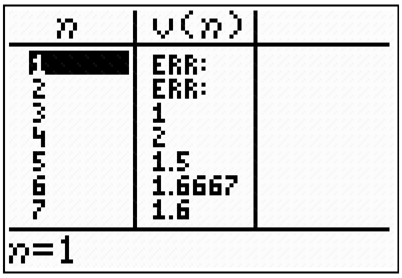
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

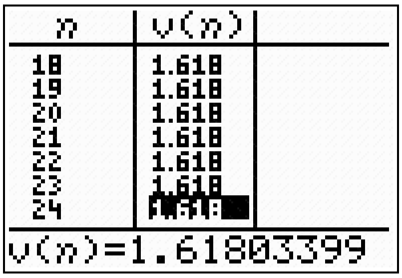
waarbij

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\,033\,98...$$

de gulden snede is. Dit getal wordt vaak als φ genoteerd. De onderstaande schermafdrukken illustreren deze limieteigenschap. Voor de rij u voerden we de rij van Fibonacci in via het recursieve voorschrift en de beginvoorwaarden. In de rij v voerden we het quotiënt van opeenvolgende termen in (we werken met het quotiënt x_{n-1}/x_{n-2} i.p.v. x_n/x_{n-1} omdat we in het Y=-scherm in het rechterlid de index *n* niet mogen gebruiken).







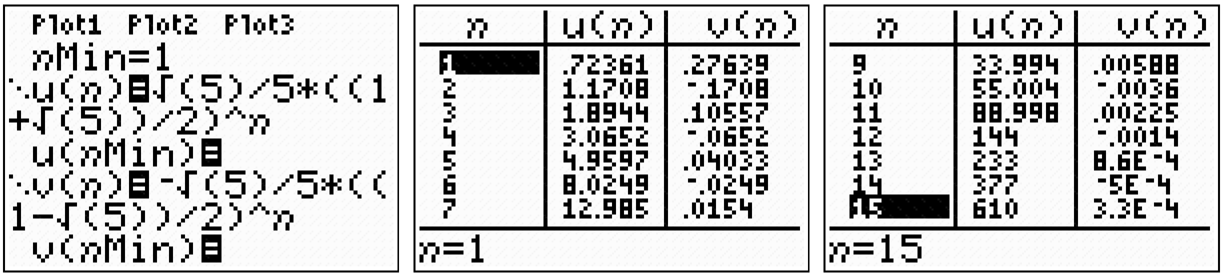
Met behulp van de expliciete vergelijking kan je deze eigenschap gemakkelijk begrijpen. De uitdrukking

$$x_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

toont dat de rij van Fibonacci de som is van twee meetkundige rijen. De reden van de eerste meetkundige rij is groter dan 1 en dat is dus een stijgende meetkundige rij. De reden van de tweede meetkundige rij is

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0.618\,033\,98....$$

Omdat de reden tussen -1 en 0 ligt, is deze meetkundige rij gedempt schommelend. In de onderstaande schermafdruk zien we de waarde van beide termen afzonderlijk (de eerste term is ingevoerd voor u en de tweede term voor v).



We merken dat de tweede term algauw ongeveer gelijk is aan 0. Met andere woorden:

$$x_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \approx \frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

van zodra *n* wat groter wordt. De getallen uit de rij van Fibonacci (op de eerste getallen uit de rij na) worden dus zeer goed benaderd door de termen van de meetkundige rij

$$u_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n .$$

Bijgevolg:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n}{x_{n-1}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} .$$

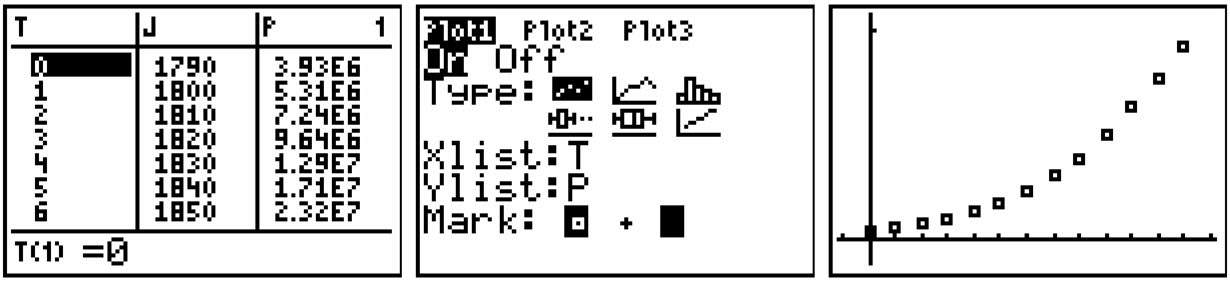
9. Groei van de bevolking van de VS

a. Opstellen van een model

De gegevens

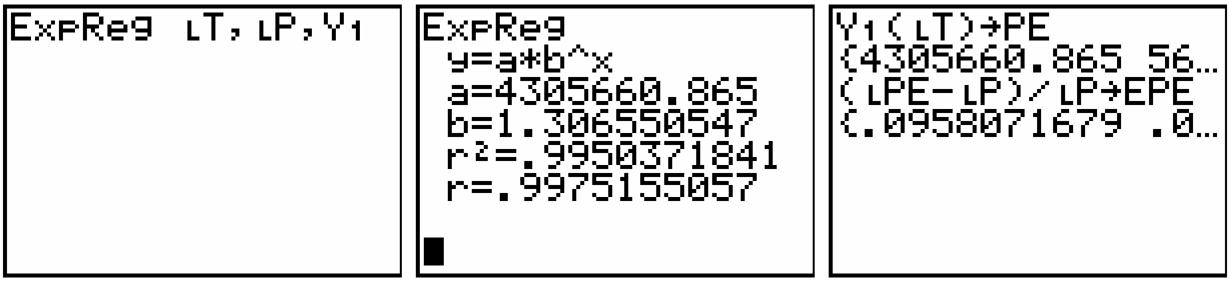
De onderstaande tabel geeft de bevolkingsaantallen voor de Verenigde Staten van Amerika van 1790 t.e.m. 1910 (data van het Amerikaanse Census Bureau). We hebben de evolutie van de Amerikaanse bevolking ook grafisch voorgesteld met de rekenmachine. We gebruiken hierbij de mogelijkheden van de rekenmachine op het vlak van beschrijvende statistiek. We slaan de gegevens op in lijsten J (de **j**aartallen), P (van **p**opulatie, de bijbehorende bevolkingsaantallen) en T (het rangnummer van de jaartallen) en we maken een spreidingsdiagram.

nummer	**jaar**	**bevolking**	**nummer**	**jaar**	**bevolking**
0	1790	3 929 214	7	1860	31 443 321
1	1800	5 308 483	8	1870	38 558 371
2	1810	7 239 881	9	1880	50 189 209
3	1820	9 638 453	10	1890	62 979 766
4	1830	12 866 020	11	1900	76 212 168
5	1840	17 069 453	12	1910	92 228 496
6	1850	23 191 876			

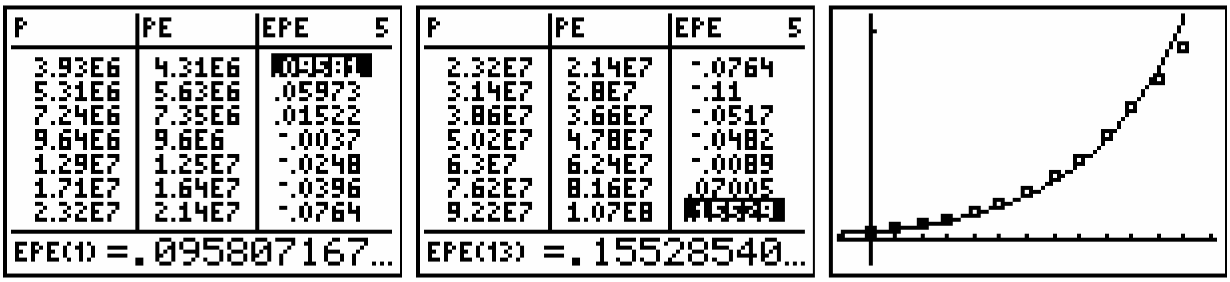


Exponentiële groei?

We zoeken een gepast wiskundig model voor de groei van de Amerikaanse bevolking. De grafiek laat ons duidelijk zien dat de groei alleszins niet goed beschreven kan worden door een lineair model. Exponentiële groei lijkt daarentegen wel in aanmerking te komen. Met de rekenmachine zoeken we een geschikt exponentieel model via exponentiële regressie. Het voorschrift van de functie bewaren we als de functie Y1. De waarden die het exponentiële model voorspelt voor de bevolking bewaren we in de lijst PE (**p**opulatie voorspeld door het **e**xponentiële model). De relatieve fout (**e**rror) of relatieve afwijking van de voorspelde waarde t.o.v. de werkelijke waarde bewaren we in de lijst EPE.



In de onderstaande schermafdrukken zien we de lijst EPE van de relatieve fouten en de grafiek van de werkelijke bevolking tezamen met het exponentiële model. Op het eerste gezicht lijkt de overeenstemming vrij goed te zijn. Als we nader toekijken, zien we echter systematische afwijkingen. Aan de uiteinden *overschat* het model de werkelijke bevolking en in het middengebied is het model een *onderschatting*. De afwijkingen zijn ook vrij groot (+10% in het begin, –11% in het midden en +16% aan het einde). In het begin groeit de bevolking in realiteit sneller dan het exponentiële model aangeeft, terwijl de groei op het einde minder snel is dan het model aangeeft.



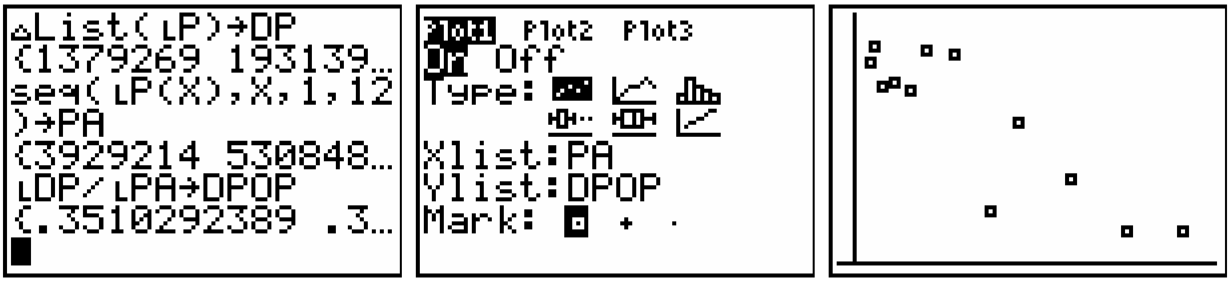
Op weg naar een beter wiskundig model

Veronderstel dat p_n de grootte van een populatie weergeeft op tijdstip *n*. Als de populatie exponentieel groeit, dan is de recursievergelijking van de vorm $p_n = g \cdot p_{n-1}$, met *g* de groeifactor. We schrijven deze recursievergelijking nu in een andere vorm. Noem $\Delta p_n = p_{n+1} - p_n$. Dan is $\Delta p_n = (g-1) \cdot p_n$, of nog: $\Delta p_n / p_n = g - 1$. Hierin is $\Delta p_n / p_n$ de *relatieve groeisnelheid* van de populatie, d.w.z. de aangroei van de populatie gedeeld door de populatie. De recursievergelijking voor exponentiële drukt dus uit dat de *relatieve* *groeisnelheid constant* is. In het voorbeeld van de populatie van de Verenigde Staten kunnen we de relatieve groeisnelheid interpreteren als het percentage (eigenlijk: perunage) waarmee de bevolking toeneemt over een periode van 10 jaar. De overwegingen die we gemaakt hebben bij het beoordelen van het exponentiële model leiden tot de conclusie dat de relatieve groeisnelheid van de Amerikaanse bevolking niet constant is: de relatieve groeisnelheid is rond 1790 groter dan rond 1910.

De rechtse schermafdruk hieronder is een spreidingsdiagram met op de horizontale as de populatiegrootte (*dus niet de tijd!*) en op de verticale as de relatieve groeisnelheid. We zien dat de relatieve groeisnelheid inderdaad niet constant is, integendeel: de *relatieve groeisnelheid neemt af als de populatie toeneemt*.

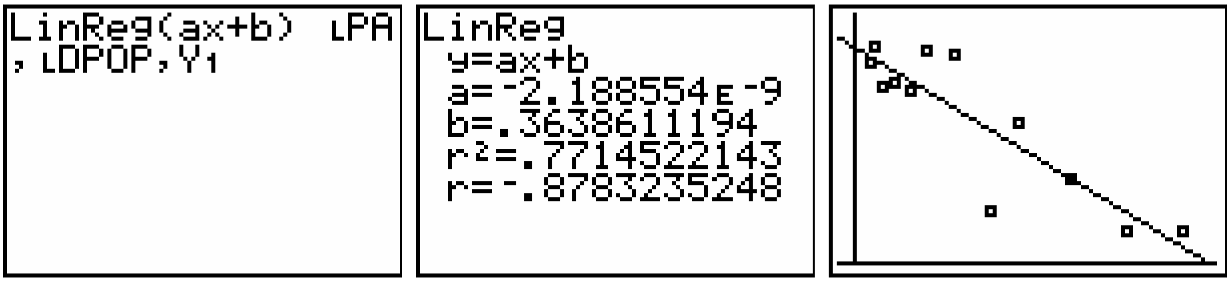
In de linkse schermafdrukken tonen we hoe we het spreidingsdiagram gemaakt hebben.

- We hebben eerst een lijst DP gemaakt met de absolute groeisnelheden (het verschil tussen opeenvolgende termen van de rij van de populatiegroottes; het commando ΔList vinden we via [2nd] [LIST] OPS).
- De lijst DP bevat één element minder dan de lijst P. Daarom maken we voor de populatie een nieuwe lijst, die één element minder bevat en die we PA noemen (ook het commando seq(vinden we via [2nd] [LIST] OPS).
- De relatieve groeisnelheden vinden we nu door de elementen van de lijst DP te delen door de overeenkomstige elementen van de lijst P. De lijst met relatieve groeisnelheden noemen we DPOP.

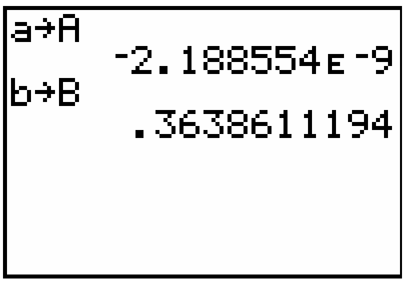


Het verband tussen groeisnelheid en populatiegrootte

Het spreidingsdiagram toont dat het redelijk is om uit te gaan van een (dalend) *lineair* verband tussen de relatieve groeisnelheid en de populatiegrootte. We laten de rekenmachine via lineaire regressie een passende vergelijking opstellen.



We slaan de coëfficiënten op voor later gebruik. Onthoud (ook voor later gebruik) dat de coëfficiënt *a* negatief en in absolute waarde zeer klein is.



Een beter wiskundig model: een recursievergelijking voor de populatiegrootte

We hebben een model gezocht voor het verband tussen de relatieve groeisnelheid en de populatiegrootte. Nu zullen we de populatiegrootte uitdrukken in functie van de tijd. De veronderstelling uit de vorige alinea kunnen we formeel vertalen als volgt: we hebben aangenomen dat

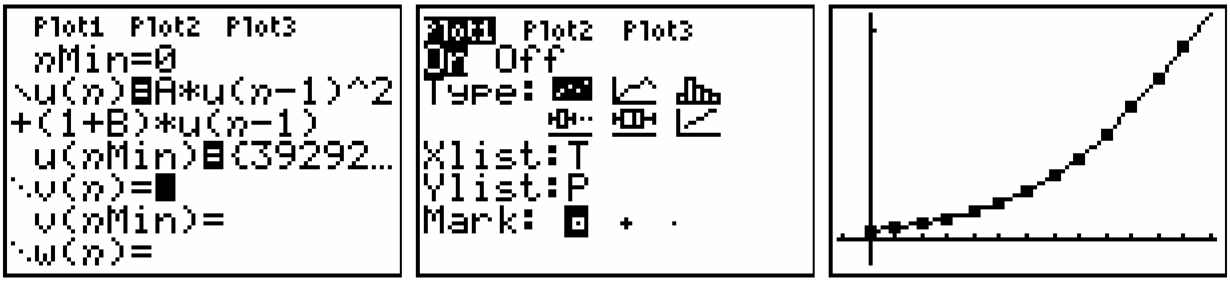
$$\frac{\Delta p_n}{p_n} = ap_n + b\,,$$

met a een negatief en b een positief getal. We kunnen deze betrekking herschrijven in de vorm van een recursievergelijking: $p_{n+1} = ap_n^2 + (1+b)\,p_n$, of equivalent: $p_n = ap_{n-1}^2 + (1+b)\,p_{n-1}$. Het gaat om een niet-lineaire recursievergelijking van de eerste orde.

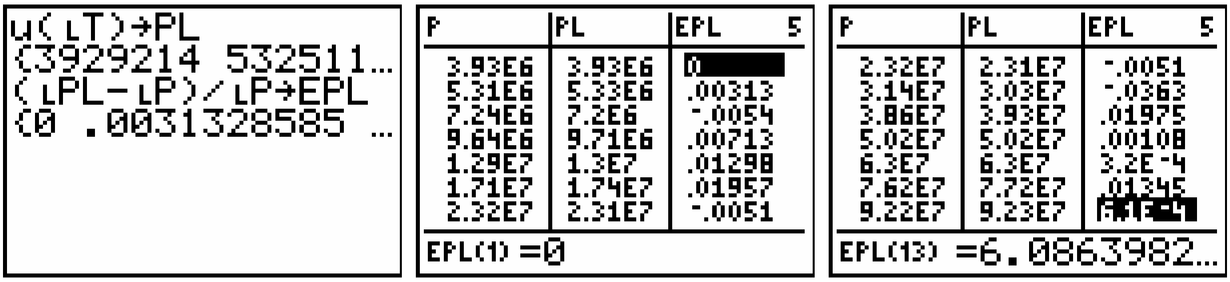
We voeren de recursievergelijking en een passende beginwaarde (we gebruiken hier de populatiegrootte van 1790 als beginwaarde) in de rekenmachine in. De rij die we op die manier krijgen, wordt een *(discreet) logistisch groeimodel* genoemd.

Evaluatie van het logistische groeimodel

Net zoals bij het exponentiële model onderzoeken we in welke mate er afwijkingen zijn tussen het logistische groeimodel en de reële bevolkingsaantallen. De grafiek (rechtse schermafdruk) toont alvast geen zichtbare afwijkingen. In de linkse schermafdruk zie je dat we gebruik maken van de coëfficiënten die we in het geheugen opgeslagen hebben. Je ziet ook dat we de grafiek van de rij onder de vorm van een ononderbroken lijn laten tekenen.



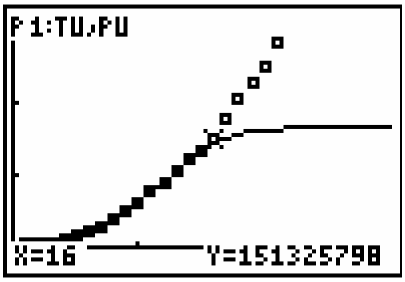
We merken dat de relatieve afwijkingen tussen het logistische model en de werkelijke bevolkingsaantallen veel kleiner zijn dan bij het exponentiële model en dat er geen systematiek in de afwijkingen te zien is.



En de verdere evolutie van de bevolking van de Verenigde Staten?

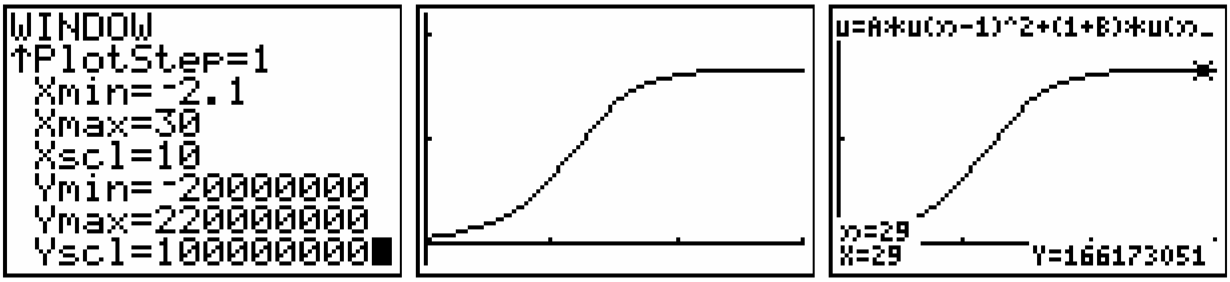
Het model dat we hier besproken hebben, is geïnspireerd op het model dat de Amerikaanse wetenschappers Pearl en Reed in 1920 opstelden voor de bevolking van de Verenigde Staten van 1790 tot 1910 (hun model is een *continu* logistisch model, zie bv. [3]). Achteraf bleek hun model een vrij accurate voorspelling te geven van de bevolking tot 1950. Ook voor ons model is dat het geval. Dat zien we in de onderstaande schermafdruk (we hebben de uitgebreide lijst met bevolkingsaantallen PU genoemd; de bevolkingsaantallen tot het jaar 2000 vind je in de tabel). Nadien onstonden zeer grote afwijkingen tussen model en realiteit.

nummer	jaar	bevolking	nummer	jaar	bevolking
13	1920	106 021 537	18	1970	203 302 031
14	1930	123 202 624	19	1980	226 542 199
15	1940	132 164 569	20	1990	248 709 873
16	1950	151 325 798	21	2000	281 421 906
17	1960	179 323 175			



b. Logistische groei: verloop

In de onderstaande figuur hebben we de werkelijke bevolkingsaantallen weggelaten en zien we alleen de grafiek van het logistische groeimodel (in een aangepast tekenvenster).



We zien dat het model eerst een versneld stijgende bevolking voorspelt maar dat deze faze gevolgd wordt door een faze waarin de bevolking vertraagd stijgt. Volgens het logistische groeimodel stabiliseert de bevolking uiteindelijk. Met de rekenmachine stellen we vast dat de limietwaarde ongeveer 166 miljoen bedraagt.

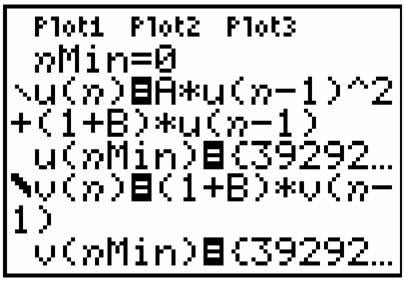
In het begin bij benadering exponentiële groei

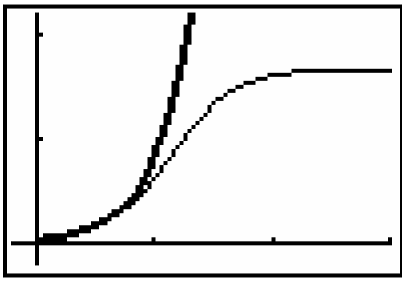
We kunnen een en ander ook uit de recursievergelijking $p_n = ap_{n-1}^2 + (1+b)p_{n-1}$ afleiden. We gaan eerst in op de beginfaze. We herinneren ons dat de coëfficiënt a in absolute waarde zeer klein is. Zolang p_{n-1} niet groot is, zal de term ap_{n-1}^2 zeer klein zijn in vergelijking met de andere term. Dus: in het begin is $p_n \approx (1+b)p_{n-1}$. Deze 'benaderende recursievergelijking' drukt uit dat de populatie in het begin bij benadering exponentieel groeit met groeifactor $1+b$.

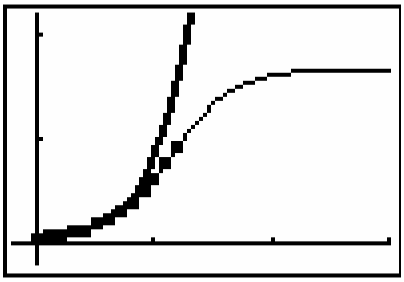
In de middelste figuur hieronder zien we de grafiek van de logistische groeirij tezamen met de grafiek van de bijbehorende meetkundige rij. We zien dat beide grafieken in het begin inderdaad gelijk lopen, maar dat de grafiek van de logistische groeirij vanaf een zeker ogenblik duidelijk onder de grafiek van de meetkundige rij blijft. Dat heeft natuurlijk te maken met het feit dat de term ap_{n-1}^2, die negatief is, gaandeweg meer doorweegt in de berekening en er voor zorgt dat de groei na verloop van tijd merkbaar minder snel verloopt dan bij exponentiële groei.

In de rechtse figuur hieronder zijn ook de werkelijke bevolkingsaantallen aangegeven. Het gaat om de oorspronkelijke aantallen, d.w.z. tot 1910. We benadrukken dat het exponentiële model dat we nu gebruiken niet hetzelfde is als het exponentiële model uit paragraaf 9.a dat we via regressie bepaalden. Tussen 1790 en

1910 bevond de Amerikaanse bevolking zich nog in de versneld stijgende faze, maar we zien toch duidelijk dat de groei na verloop van tijd minder sterk versnelt dan op grond van het exponentiële model verwacht mag worden.

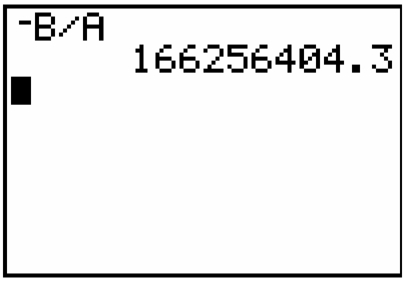






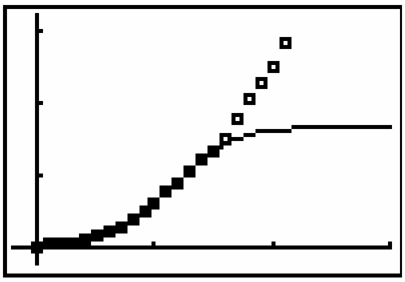
Limietwaarde

Als we de recursievergelijking in de vorm $\Delta p_n = ap_n^2 + bp_n$ schrijven, dan zien we dat het verschil tussen twee opeenvolgende waarden voor de bevolking zeer klein wordt als de twee termen in het rechterlid (de ene positief en de andere negatief) elkaar ongeveer in evenwicht houden. Dat is het geval wanneer de populatie ongeveer gelijk is aan $-\frac{b}{a}$. Dat is in overeenstemming met de vaststelling die we eerder deden (zie de schermafdruk hieronder).



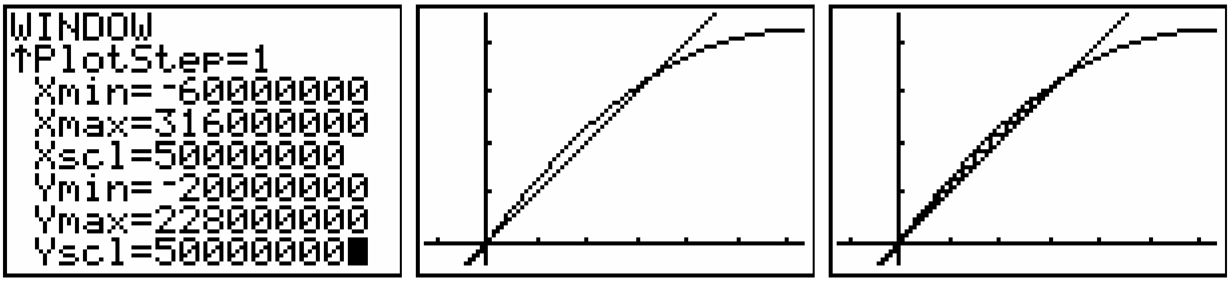
Dit aspect van het verloop laat een wezenlijk kenmerk van logistische groei zien, namelijk dat het gaat over *‘groei met grenzen’*. Dit groeimodel houdt er m.a.w. rekening mee dat de omgeving een beperkte draagkracht heeft. We zouden hier bijvoorbeeld kunnen denken aan de oppervlakte die beschikbaar is voor landbouw, wat een beperking oplegt aan het aantal mensen dat gevoed kan worden.

We moeten vaststellen dat het bevolkingsaantal ondertussen sterk boven de voorspelde maximale draagkracht uitgestegen is. We kunnen dit als volgt begrijpen. De maximale draagkracht hoeft niet constant te zijn in de tijd. Efficiëntere landbouw bijvoorbeeld zorgt er voor dat méér mensen gevoed kunnen worden met eenzelfde oppervlakte aan landbouwgrond. Dat is ook wat effectief gebeurd is: sinds 1910 is de draagkracht van de Amerikaanse bevolking sterk toegenomen door efficiëntere landbouw, economische expansie, ... De waarde van de coëfficiënten *a* en *b* is hierdoor sterk veranderd.

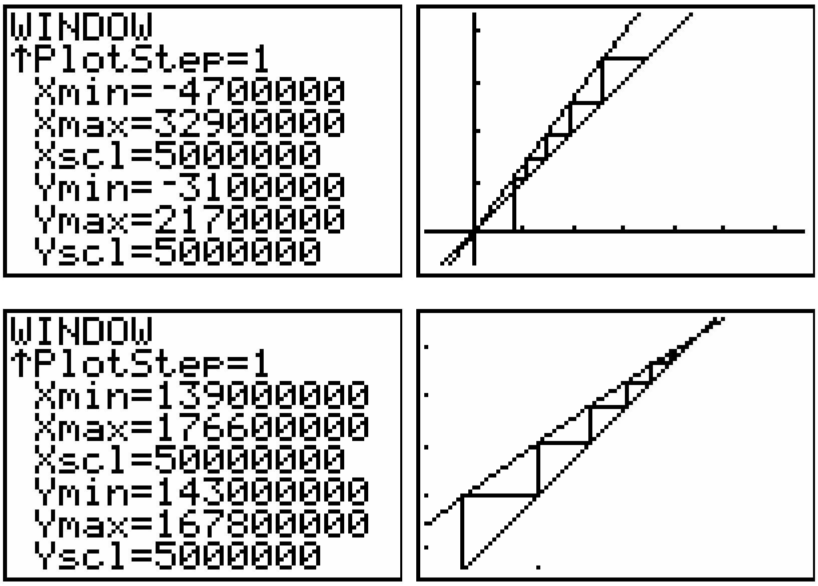


Webdiagram van logistische groei

We maken nu een webdiagram van het logistische groeimodel voor de Amerikaanse bevolking. Als we in de recursievergelijking p_n vervangen door y en p_{n-1} door x, dan krijgen we $y = ax^2 + (1+b)x$. Het webdiagram zal nu m.a.w. gebaseerd zijn op de eerste bissectrice en een *(berg)parabool*.



We kunnen het verloop beter volgen als we inzoomen op onderdelen van het webdiagram. In de beginfaze (zie de bovenste twee schermafdrukken hieronder) heeft de parabool een (positieve) helling die sterker is dan die van de eerste bissectrice. Conform onze eerdere bevindingen moet de rij dan versneld stijgen. Op de lange termijn daarentegen komen we terecht in een gebied waar de parabool minder sterk helt dan de eerste bissectrice. Daar verloopt de groei vertraagd stijgend.



Bemerk dat we op deze schaal nauwelijks nog iets merken van de kromming van de parabool. Als we werken in een gebied dat voldoende klein is, kunnen we de parabool vervangen door een gepaste raaklijn! In de beginfaze kunnen we werken met de raaklijn in de oorsprong. De helling van deze raaklijn is $1+b$, wat inderdaad groter dan 1 is. Op de tweede situatie komen we verderop nog terug.

Evenwicht

We gaan ook nog even in op de limietwaarde. Eerder hebben we geleerd dat de limietwaarde verband houdt met evenwichtswaarden en met snijpunten van de eerste bissectrice en de kromme die de recursievergelijking voorstelt. De parabool snijdt de eerste bissectrice hier in twee punten, namelijk $(0, 0)$ en $(-\frac{b}{a}, -\frac{b}{a})$.

Het getal $-\frac{b}{a}$ herkennen we als de limietwaarde die we eerder vonden. Daarnaast is er dus nog een andere evenwichtswaarde. Als we 0 als beginwaarde nemen, dan is de rij constant gelijk aan 0. Hierboven hebben we er op gewezen dat de helling van de raaklijn aan de parabool in 0 gelijk is aan $1+b$, d.w.z. groter dan 1. Dat leert ons dat het over een *labiel* evenwicht gaat: als we het evenwicht een heel klein beetje verstoren, dan zullen de termen van de rij zich verder en verder verwijderen van de evenwichtswaarde 0.

Met de evenwichtswaarde $-\frac{b}{a}$ is het anders gesteld. De helling van de raaklijn aan de parabool in $-\frac{b}{a}$ is $1-b$. Dat is een getal tussen 0 en 1. Hieruit kunnen we eenvoudig afleiden dat het evenwicht stabiel is.

10. Limietgedrag bij niet-lineaire recursievergelijkingen

In deze paragraaf onderzoeken we twee recursievergelijkingen die niet lineair zijn en laten we zien dat de wereld van de niet-lineaire recursieve voorschriften veel gevarieerder is dan die van de lineaire. Wat we hier bespreken, vind je voor een deel terug in het keuzeonderwerp iteratie in het leerplan voor de 6-urencursus uit het vrij onderwijs.

a. Limietgedrag bij de recursievergelijking $t_n = a\, t_{n-1}(1 - t_{n-1})$

De wondere wereld van de recursievergelijking $t_n = a\, t_{n-1}(1 - t_{n-1})$

We onderzoeken recursieve voorschriften van de vorm

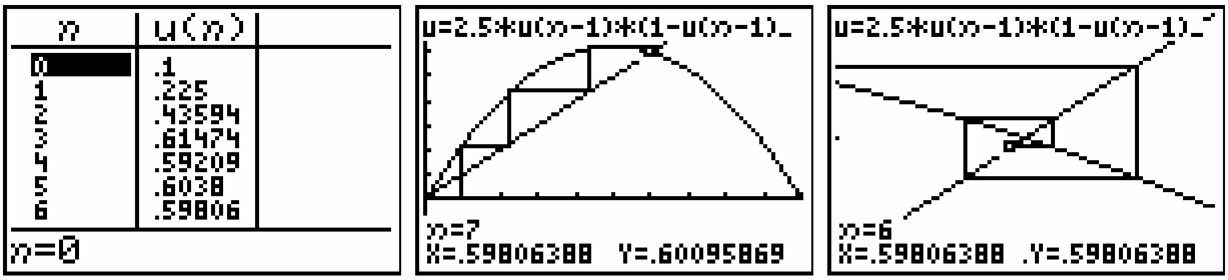
$$t_n = a\, t_{n-1}(1 - t_{n-1}),$$

waarbij a een getal voorstelt. Nieuw bij deze recursievergelijking is dat in het rechterlid een product staat van twee factoren die t_{n-1} bevatten.

1. Welke lijnen zul je te zien krijgen op een webdiagram?
   (De rechte $y = x$ (zoals steeds) en de parabool $y = ax(1-x)$.)

Neem $a = 2.5$ en noem $f(x) = 2.5x(1-x)$

2. Maak een webdiagram van de rij met beginwaarde 0.1 en beschrijf het verloop ervan in woorden. Verklaar wat je vaststelt zoveel mogelijk op basis van het recursieve voorschrift.
   (Helemaal in het begin stijgt de rij, daarna schommelt de rij. De schommelingen worden steeds kleiner en de limietwaarde is 0.6. *Om dit vast te stellen, kun je gebruik maken van een tabel en/of een webdiagram (inzoomen om het verloop te zien voor termen met een groter rangnummer!).*



De limietwaarde kun je vinden door het snijpunt te bepalen van de parabool (grafiek van f) met de eerste bissectrice. Het feit dat de rij (na een aanloopperiode) gedempt schommelend verloopt, houdt verband met het feit dat de raaklijn in het snijpunt richtingscoëfficiënt -0.5 *heeft. Als de termen zeer dicht bij de limietwaarde genaderd zijn, kunnen we de parabool vervangen door de raaklijn. En een rechte met richtingscoëfficiënt tussen* -1 *en* 0 *zorgt voor een gedempt schommelend verloop.)*

3. Onderzoek de stabiliteit van de twee (!) evenwichtsposities.

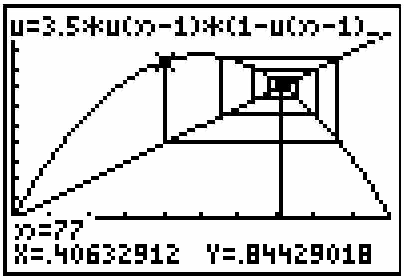
   (De parabool en de eerste bissectrice hebben twee snijpunten, die dus twee evenwichtswaarden, of twee vaste punten van f, opleveren: 0 *en* 0.6*. Als we een beginwaarde nemen in de onmiddellijke omgeving van* 0.6*, dan convergeert de rij (gedempt schommelend) naar* 0.6 *(verklaring: denk aan de redenering met de raaklijn bij de vorige vraag!). Dit evenwicht is stabiel (of: het vaste punt is aantrekkend). Als de beginwaarde exact gelijk is aan* 0*, dan zijn alle termen van de rij gelijk aan* 0*. Nemen we echter een beginwaarde in de onmiddellijke omgeving van* 0 *maar niet exact gelijk aan 0, dan convergeert de rij niet naar* 0*. Als het systeem uit evenwicht gebracht wordt, keert het dus niet terug naar zijn evenwicht. Dit evenwichtspunt is niet stabiel (of: het vaste punt is afstotend).)*

We nemen nu $a = 3.5$.

4. Bereken met de hand het verloop van de rij met beginwaarde $\frac{5}{7}$.

   (De rij is constant.)

5. De onderstaande schermafdruk toont het webdiagram van de rij met beginwaarde $\frac{5}{7}$. Geef een verklaring voor wat er misloopt.



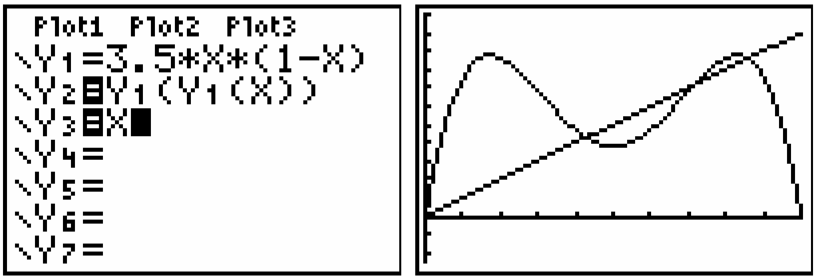
   (De machine werkt met een decimale benadering van de breuk en start bijgevolg met een beginwaarde die niet exact gelijk is aan $\frac{5}{7}$*. Omdat het evenwicht niet stabiel is, raken de termen die de machine berekent steeds verder van de echte (evenwichts)waarde verwijderd. Het webdiagram spiraliseert naar buiten. Na een groot aantal stappen levert dit zichtbare verschillen op.)*

6. Onderzoek met de hand en met de rekenmachine het verloop van de rij met beginwaarde $\frac{3}{7}$.

   (De termen van de rij nemen afwisselend de waarde $\frac{3}{7}$ *en* $\frac{6}{7}$ *aan. We zeggen dat zo'n rij* periode 2 *heeft. Nu doen er zich geen problemen voor bij de berekening met de rekenmachine.)*

Noem $f(x) = 3.5x(1-x)$ en $f_2(x) = f(f(x))$.

7. De onderstaande figuur toont de grafiek van f_2 en de eerste bissectrice. Je kunt narekenen dat de snijpunten optreden bij de x-waarden 0, $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{7}$ en $\frac{6}{7}$. Het is geen toeval dat dit de getallen zijn uit de vragen 5 en 6. Geef een goede verklaring!



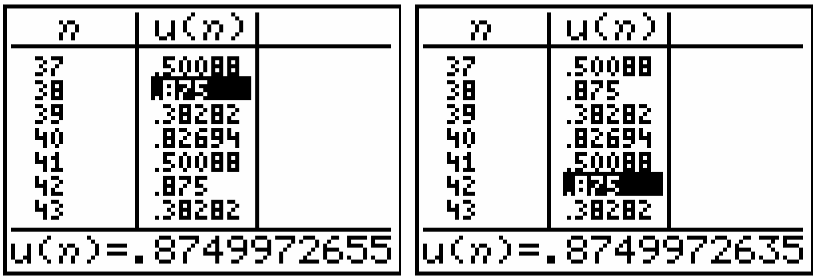
(De recursievergelijking die we bestuderen, kunnen we schrijven als $t_n = f(t_{n-1})$. De x-waarden waarvoor $f(x) = x$ geven aan welke beginwaarden een constante rij opleveren. Dat hebben we hierboven geregeld gebruikt om evenwichtspunten te bepalen. De functie f_2 komt tevoorschijn wanneer we t_n uitdrukken in functie van de term die twee plaatsen voordien staat:

$$t_n = f(t_{n-1}) = f(f(t_{n-2})) = f_2(t_{n-2}) .$$

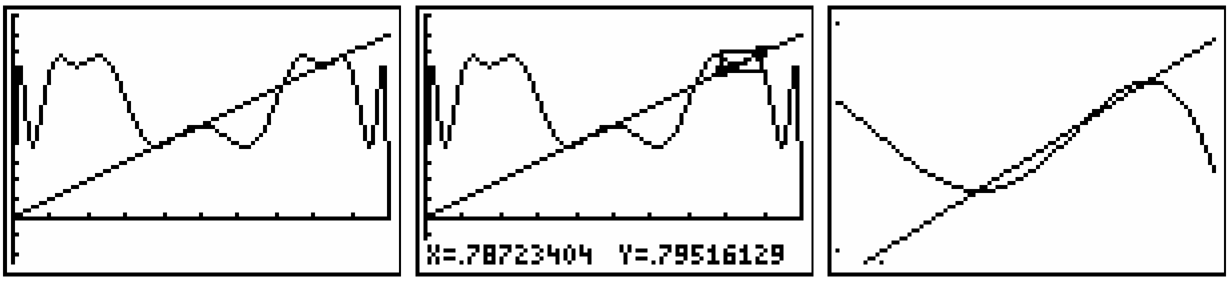
De x-waarden waarvoor $f_2(x) = x$ geven ons dus de beginwaarden van de rijen waarvoor $t_0 = t_2 = t_4 = t_6 = ...$ Vanzelfsprekend geldt dan ook $t_1 = t_3 = t_5 = t_7 = ...$ We krijgen dan m.a.w. een rij met periode 2 *(of een constante rij: als $t_0 = t_1$). Dat verklaart waarom $\frac{3}{7}$ en $\frac{6}{7}$ van de partij zijn. Als de beginwaarde* 0 *of $\frac{5}{7}$ is, zijn alle termen van de rij aan elkaar gelijk. Dan klopt de voorwaarde hierboven natuurlijk ook.)*

8. Onderzoek en verklaar het verloop van de rij met beginwaarde 0.1. Je moet ver genoeg in de rij gaan (ongeveer tot rangnummer 40) om te zien wat er te zien is.

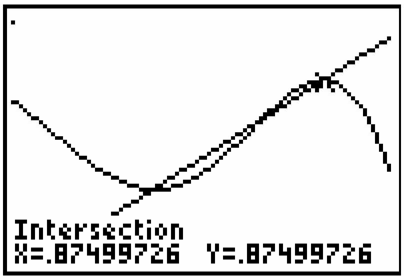
(Na een aanloopperiode komen dezelfde vier getallen steeds terug: (afgerond) 0.87500, 0.38282, 0.82694 *en* 0.50088. *Het klopt niet helemaal, want een aantal decimalen veranderen nog. Maar naarmate je verder gaat in de rij blijven meer en meer decimalen gelijk.*



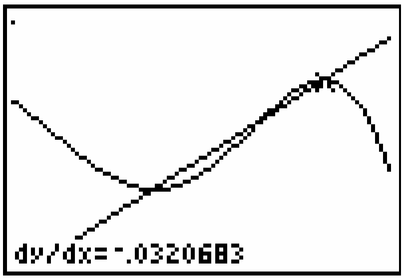
De rij 'convergeert' als het ware naar een 'stel limietgetallen met periode 4*'. We kunnen dit stel terugvinden op de manier van vraag* 7. *Noem $f_4(x) = f(f(f(f(x))))$ (een veeltermfunctie van graad* 16*!). De snijpunten van de eerste bissectrice met de grafiek van f_4 bepalen de rijen met periode (hoogstens)* 4. *De onderstaande figuur (links) toont de grafiek. Als we de gepaste delen uitvergroten (zie bijvoorbeeld de middelste en de rechtse figuur), zien we dat er in het totaal* 8 *snijpunten zijn.*

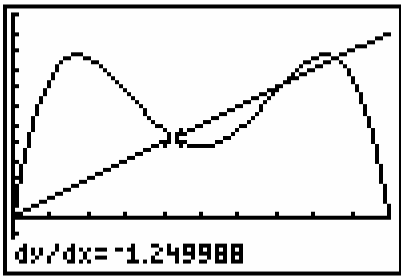


We kennen reeds vier van deze snijpunten, namelijk deze met x-coördinaat 0, $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{7}$ *en* $\frac{6}{7}$. *En voor de overige vier verwachten we de periodiek terugkerende waarden uit de rij hierboven te zien. Dat klopt effectief. De onderstaande figuur toont dat voor één van deze vier.*



Wat experimenteren leert dat er geen rijen zijn die op de lange duur steeds meer lijken op de rij met periode 2 *uit vraag* 6, *terwijl heel veel rijen op de lange duur steeds meer lijken op de rij met periode* 4. *De verklaring daarvoor is dezelfde als die voor het al dan niet stabiel zijn van een evenwicht. De raaklijnen aan de grafiek van* f_4 *in de bewuste vier snijpunten met de eerste bissectrice hebben allemaal dezelfde richtingscoëfficiënt, namelijk (afgerond)* -0.03, *in absolute waarde kleiner dan* 1. *Daarom is dit stel van* 4 *aantrekkend. De raaklijnen aan de grafiek van* f_2 *in de punten met eerste coördinaat* $\frac{3}{7}$ *en* $\frac{6}{7}$ *hebben (beide) richtingscoëfficiënt* -1.25, *in absolute waarde groter dan* 1. *Het stel van* 2 *is daarom afstotend. Het is overigens niet moeilijk om analytisch aan te tonen dat de vier (resp. twee) raaklijnen dezelfde richtingscoëfficiënt hebben en om de richtingscoëfficiënt van de twee raaklijnen analytisch uit te rekenen.)*





b. Limietgedrag bij de logistische recursievergelijking

In deze paragraaf maken we een combinatie van paragraaf 9 en 10.a. Ook bij de logistische recursievergelijking $p_n = ap_{n-1}^2 + (1+b)p_{n-1}$, die in paragraaf 9 geïntroduceerd werd, is het immers interessant het limietgedrag te bestuderen en we doen dat op de manier van paragraaf 10.a. We hebben er echter voor gezorgd dat deze paragraaf onafhankelijk is van de genoemde paragrafen.

Voor een deel hebben we het limietgedrag reeds bestudeerd in paragraaf 9: in het geval van het discrete, logistische model voor de groei van de Amerikaanse bevolking is er een limietwaarde $-b/a$ (met de waarden van a en b die daar gegeven zijn) die overeenkomt met een stabiel evenwicht. Nu laten we de context van de Amerikaanse bevolking dus los en bekijken we de logistische recursievergelijking in haar abstracte vorm. Voor de meeste waarden van a en b is er geen expliciete formule bekend voor de oplossingen van de logistische recursievergelijking. Daar zullen we dus geen gebruik van kunnen maken.

Vereenvoudigen van de recursievergelijking

De eerste stap die we zetten, is het eenvoudiger schrijven van de recursievergelijking. We kunnen de eenheid waarin we de populatiegrootte meten veranderen. In plaats van te werken met het *absolute* aantal individuen p_n, zullen we *relatief* werken t.o.v. de evenwichtswaarde $-b/a$. We zetten de recursievergelijking voor p_n dus om in een recursievergelijking voor z_n, waarbij

$$z_n = \frac{p_n}{-\frac{b}{a}} = -\frac{ap_n}{b}.$$

We vinden:

$$\begin{aligned} z_n &= -\frac{a}{b}p_n \\ &= -\frac{a}{b}\left(ap_{n-1}^2 + (1+b)p_{n-1}\right) \\ &= -\frac{a^2p_{n-1}^2}{b} - \frac{a(1+b)p_{n-1}}{b} \\ &= -b\left(-\frac{ap_{n-1}}{b}\right)^2 + (1+b)\left(-\frac{ap_{n-1}}{b}\right) \\ &= -bz_{n-1}^2 + (1+b)z_{n-1} \end{aligned}$$

De recursievergelijking die we zullen bestuderen, is dus:

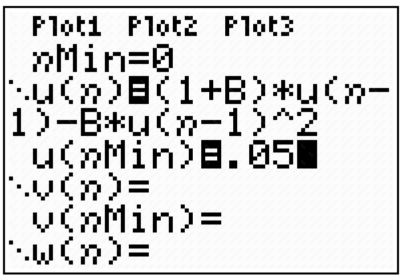
$$z_n = (1+b)z_{n-1} - bz_{n-1}^2,$$

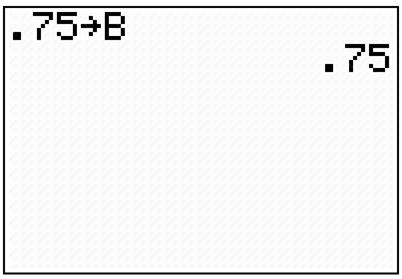
waarbij b een positief getal is.

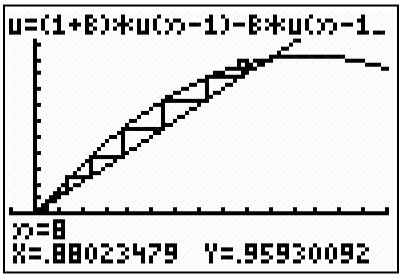
Limietgedrag als $b \leq 1$

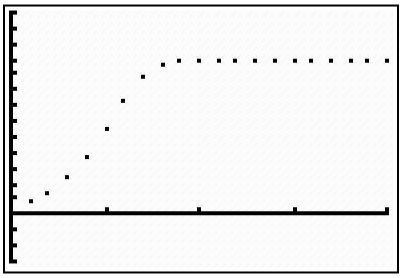
Het webdiagram is gebaseerd op de eerste bissectrice en de parabool met vergelijking $y = (1+b)x - bx^2$. De eerste bissectrice en de parabool snijden elkaar in twee punten, namelijk de oorsprong en $(1,1)$. Er zijn dus twee evenwichtswaarden: 0 en 1. De richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de parabool in de oorsprong is $1+b$, een getal groter dan 1. Het gaat dus om een labiel evenwicht. De richtingscoëfficiënt van de raaklijn in $(1,1)$ is $1-b$. Nu moeten we verschillende gevallen onderscheiden.

In het geval $b \leq 1$ is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelegen tussen 0 en 1. In de onmiddellijke omgeving van 1 mogen we de parabool vervangen door de raaklijn. Als p_n voor een zekere waarde van *n* in die omgeving terecht komt, kennen we het verdere verloop van de rij: ze zal vertraagd stijgen naar 1. Het evenwicht is stabiel. 1 is een aantrekkend vast punt. De onderstaande schermafdrukken tonen het webdiagram en de gewone grafiek voor het geval $b = 0.75$ (en beginwaarde 0.05). In het webdiagram ligt het snijpunt tussen de eerste bissectrice en de parabool vóór de top.



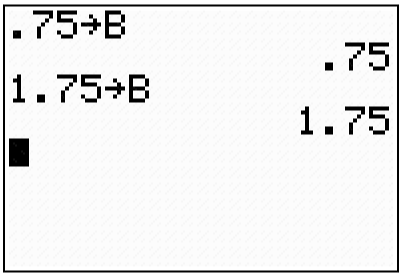


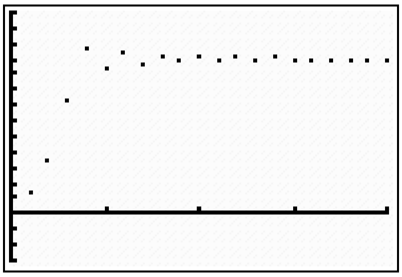
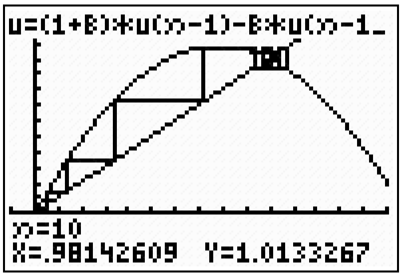


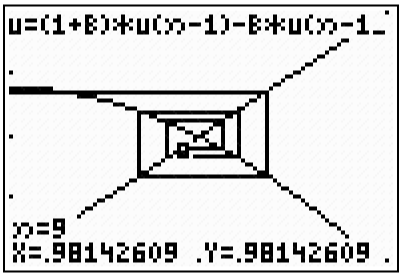


Limietgedrag als $1 < b < 2$

In het geval $1 < b < 2$ is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelegen tussen -1 en 0. Ook nu kunnen we het verloop van de rij gemakkelijk afleiden. In de onmiddellijke omgeving van 1 mogen we de parabool vervangen door de raaklijn. Als p_n voor een zekere waarde van *n* in die omgeving terecht komt, zullen de volgende termen in de rij gedempt schommelend convergeren naar 1. Ook in dat geval is 1 een stabiel evenwicht. De onderstaande schermafdrukken tonen het webdiagram en de gewone grafiek voor het geval $b = 1.75$ (en met beginwaarde 0.05). In het webdiagram ligt het snijpunt van de eerste bissectrice en de parabool nu voorbij de top. Ook deze vorm van limietgedrag werd effectief vastgesteld bij biologische populaties (zie hiervoor bv. [1]).



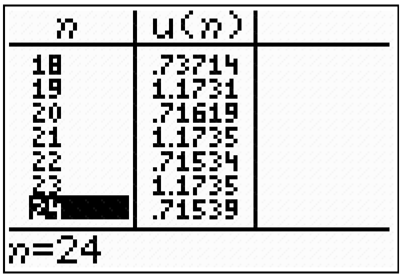



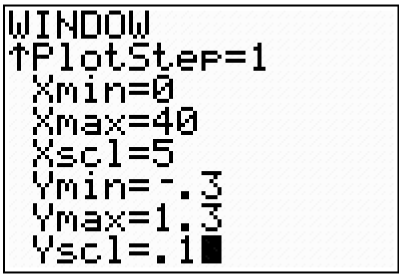


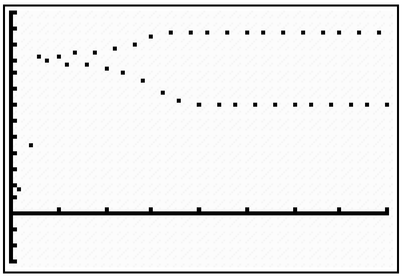
Limietgedrag als $b = 2.25$

We bestuderen nu het geval dat $b > 2$. In dat geval is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn strikt kleiner dan -1. Het evenwicht in 1 is dan labiel. 1 is een afstotend vast punt. Het is nu veel moeilijker om het limietgedrag te voorspellen. In de onmiddellijke omgeving van 1 kunnen we de parabool nog wel vervangen door de raaklijn, maar dat helpt ons niet veel meer. Als p_n in deze omgeving terecht komt, zal p_{n+1} verder van 1 liggen dan p_n. De termen van de rij verlaten de omgeving dus opnieuw en we kunnen het verdere verloop niet langer afleiden door te redeneren m.b.v. de raaklijn.

De onderstaande schermafdrukken tonen een tabel en een grafiek voor $b = 2.25$.







Er zijn a.h.w. twee ‘limietwaarden’. In de wiskunde noemt men deze ‘limietwaarden’ ophopingspunten. De termen met oneven rangnummer convergeren naar $c_1 = 1.17...$ terwijl de termen met even rangnummer naar $c_2 = 0.71...$ convergeren.

Zoals we dat voorheen deden, associëren we aan de recursievergelijking een functie f zo dat de recursievergelijking geschreven kan worden als $z_n = f(z_{n-1})$. In dit geval is de vergelijking van f dus $f(x) = (1+b)x - bx^2$. We gebruiken deze functie nu om meer inzicht te krijgen in het fenomeen dat we vaststelden. We hebben dat

$$c_1 = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ n \text{ oneven}}} z_n \text{ en } c_2 = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ n \text{ even}}} z_n .$$

Als we de functie f toepassen op beide leden in de eerste gelijkheid, vinden we

$$f(c_1) = f\Big(\lim_{\substack{n\to+\infty \\ n \text{ oneven}}} z_n\Big) = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ n \text{ oneven}}} f(z_n) = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ n \text{ oneven}}} z_{n+1} = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ n \text{ even}}} z_n = c_2 .$$

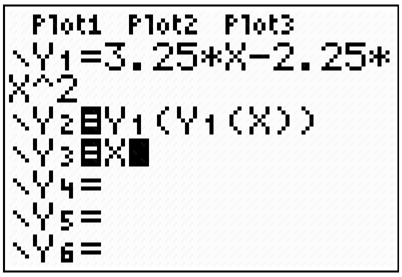
Dus: $f(c_1) = c_2$. Op dezelfde manier vinden we dat $f(c_2) = c_1$.

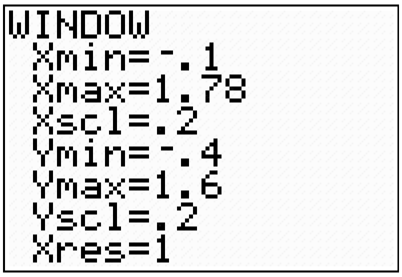
Als we op beide leden van deze gelijkheid nu nogmaals f toepassen, vinden we

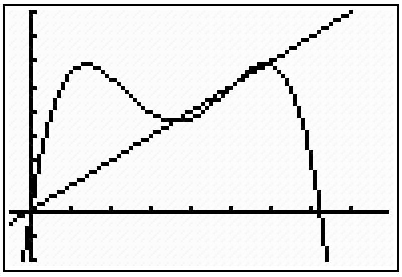
$$f(f(c_1)) = f(c_2) = c_1 .$$

Dat betekent dat c_1 een vast punt is van de functie f_2, gedefinieerd door $f_2(x) = f(f(x))$. Hetzelfde geldt voor c_2. Dat betekent dat we c_1 en c_2 moeten kunnen terugvinden als oplossingen van de vergelijking $x = f_2(x)$.

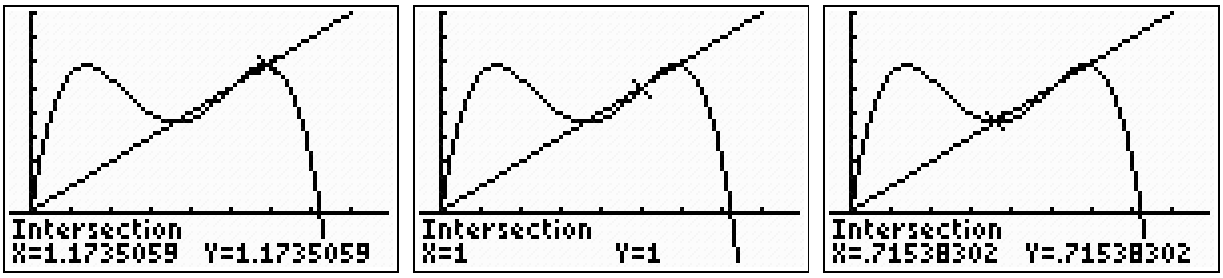
We onderzoeken dat met de rekenmachine. De rechtse schermafdruk hieronder toont de grafiek van f_2 en de eerste bissectrice.





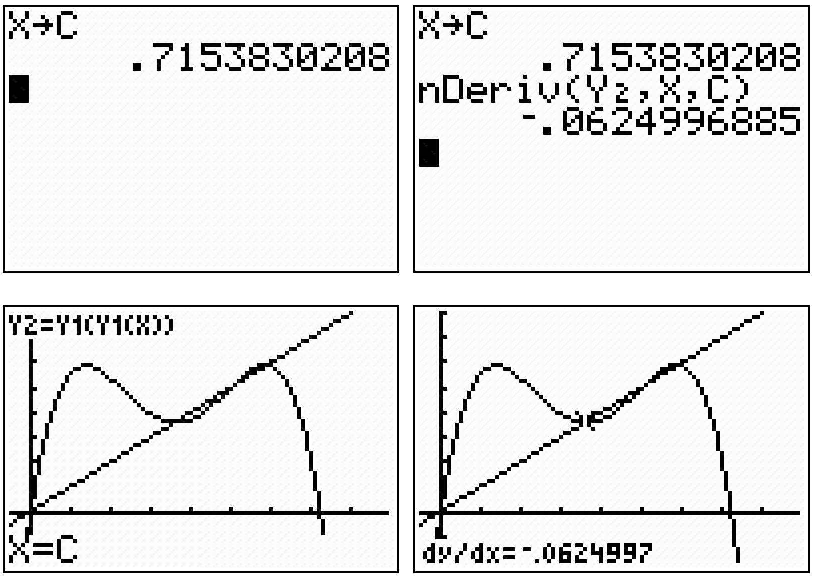


Er lijken vier gemeenschappelijke punten te zijn: de oorsprong en drie andere punten. In de onderstaande schermafdrukken worden deze punten bepaald.



Dat 0 en 1 vaste punten van f_2 zijn, hoeft ons niet te verwonderen. Vaste punten van f zijn immers automatisch ook vaste punten van f_2. De andere twee vaste punten zijn inderdaad c_1 en c_2.

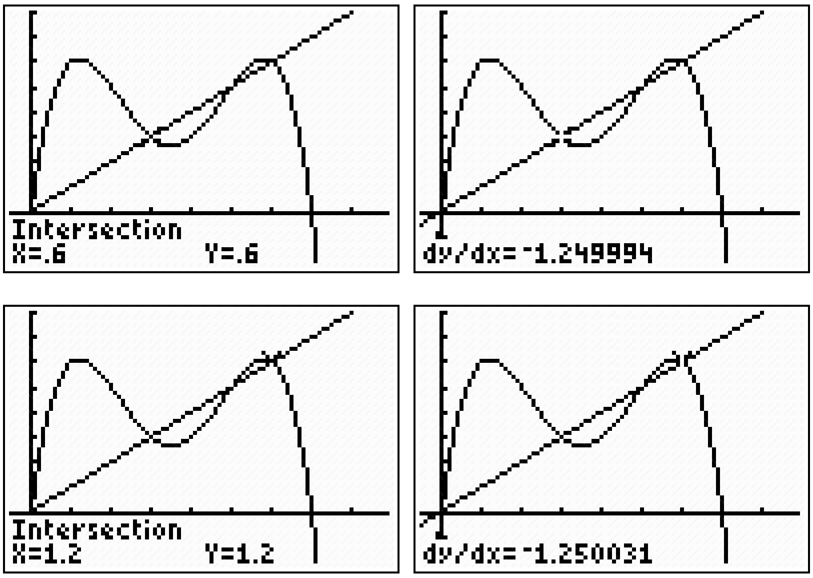
Met wat extra inspanning kunnen we de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f_2 in de punten c_1 en c_2 bepalen. We werken dit uit voor c_2, het vaste punt dat we het laatst bepaalden. De x-coördinaat van het snijpunt is tijdelijk opgeslagen in de variabele X. De onderstaande schermafdruk bovenaan links toont dat we deze waarde opslaan in de variabele C. De afgeleide kunnen we dan berekenen op het basisscherm via [MATH] 8:nDeriv((zie de schermafdruk bovenaan rechts) of op het grafiekscherm via [2nd] [CALC] 6:dy/dx (zie de schermafdrukken onderaan).



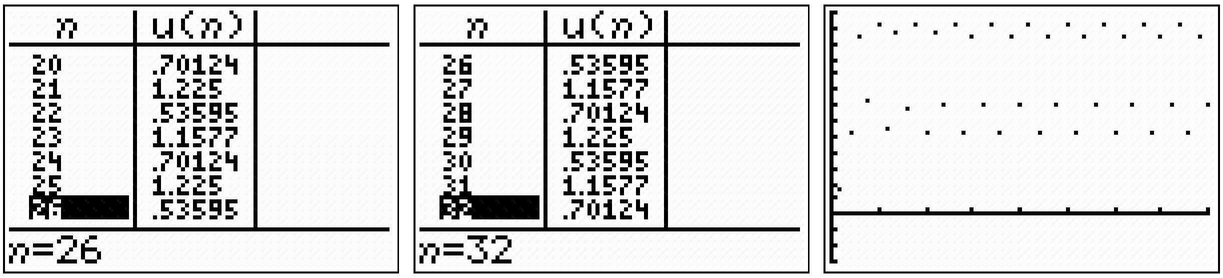
Omdat de afgeleide in absolute waarde kleiner dan 1 is, is c_2 een aantrekkend vast punt van f_2. Op dezelfde manier kunnen we ook de afgeleide in c_1 berekenen (we mogen niet vergeten eerst het snijpunt opnieuw te bepalen zodat de goede waarde in de variabele X opgeslagen wordt). Die blijkt gelijk te zijn aan de afgeleide in c_2. c_1 is dus ook een aantrekkend vast punt. Dat verklaart het limietgedrag dat we vastgesteld hebben.

Limietgedrag als b = 2.5

Ook in het geval dat $b = 2.5$ heeft f_2 vier vaste punten: 0, 1 en de twee vaste punten die hieronder getoond worden. Nu blijkt de afgeleide in deze twee punten in absolute waarde echter groter te zijn dan 1 zodat het over afstotende vaste punten gaat.

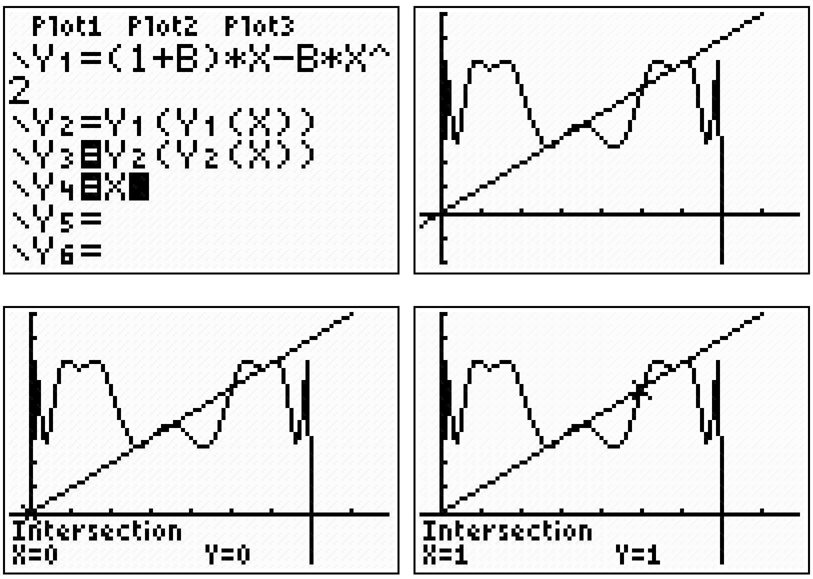


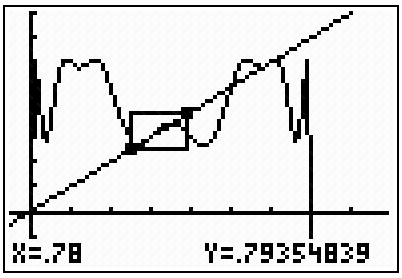
De tabel en de grafiek laten zien dat het fenomeen van de twee ophopingspunten hier inderdaad niet optreedt.

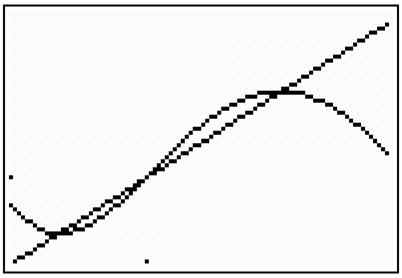
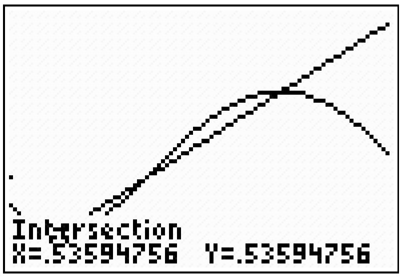


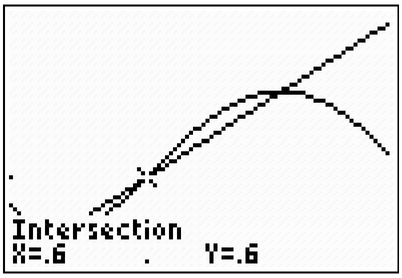
Nu blijkt het te gaan over vier ophopingspunten waar telkens een deel van de termen naar toe convergeert in een cyclisch patroon.

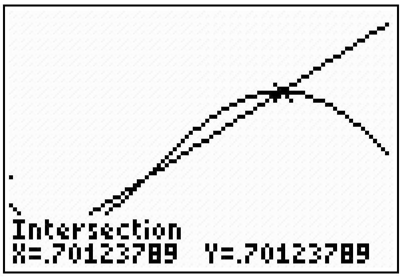
We verwachten deze vier ophopingspunten terug te vinden bij de vaste punten van de functie f_4 bepaald door $f_4(x) = f(f(f(f(x))))$. Het onderstaande 'stripverhaal' van schermafdrukken toont dat dat inderdaad het geval is. Er zijn 8 vaste punten: 0 en 1 (de afstotende vaste punten van *f*), 0.6 en 1.2 (de twee bijkomende vaste punten van f_2, die ook afstotend zijn) en de vier ophopingspunten. Deze vier ophopingspunten zijn aantrekkende vaste punten. Ter illustratie hebben we de afgeleide in één van deze vier berekend.

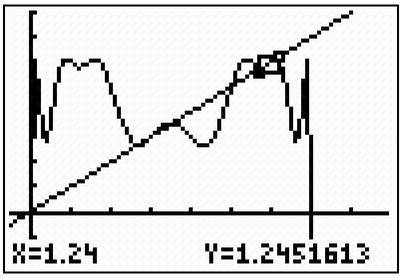


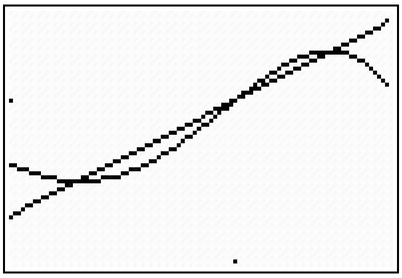
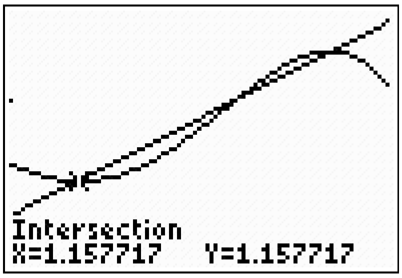


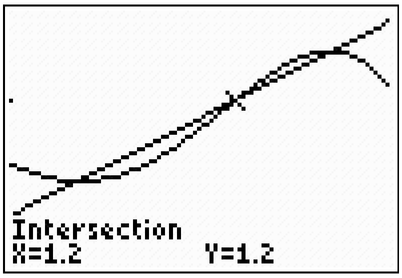



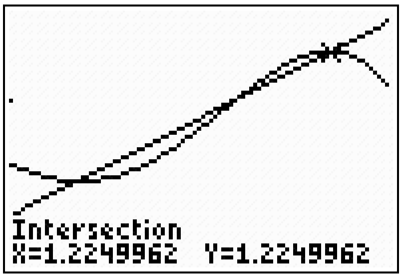


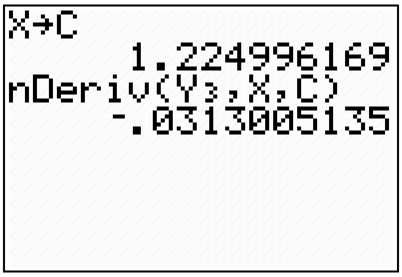




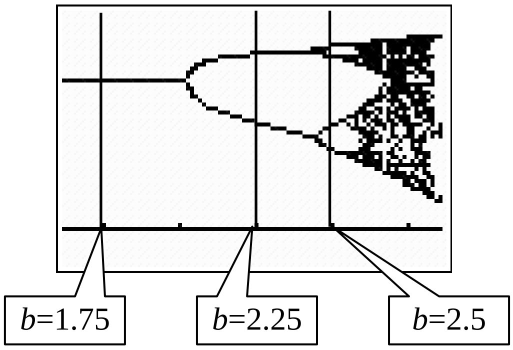






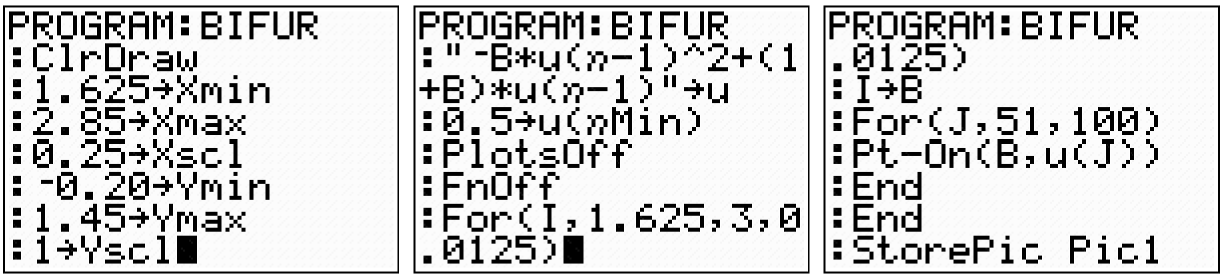
Overzicht van het limietgedrag

We zijn dus gestart met één limietwaarde, daarna hadden we een geval waarin er twee ophopingspunten waren en daarna een geval waarin er vier ophopingspunten waren. We bepreken hieronder een programma voor de TI84 dat een figuur genereert met een overzicht van het limietgedrag van de rij voor waarden van *b* van 1.625 tot 2.85. Eerst bekijken we de figuur.



Op de horizontale as wordt *b* uitgezet. Op de verticale as worden de limietwaarde of de ophopingspunten uitgezet. In het geval dat $b = 1.75$ zien we dus dat er een limietwaarde is (in overeenstemming met wat voorafging). Dat is zo tot $b = 2$. Daarna zijn er twee ophopingspunten (zoals het geval $b = 2.25$, dat we besproken hebben), die steeds verder uit elkaar gaan. Dan volgt een gebied waarin er vier ophopingspunten zijn. Daarna zijn er waarden van *b* waarvoor er 8, 16, 32, ... ophopingspunten zijn. Dat is niet meer goed te zien op de figuur wegens de beperkte resolutie van het scherm. Vanaf een bepaalde waarde van *b* ($b > 2.692...$) wordt het limietgedrag zelfs nog ingewikkelder. In de wiskunde wordt het dan chaotisch gedrag genoemd (waarbij dat soort gedrag in de wiskunde precies gedefinieerd wordt, maar dat zou ons te ver voeren).

De onderstaande schermafdrukken tonen het programma waarmee de figuur gemaakt werd.



We overlopen het programma. Eerst worden de tekenvenstervariabelen ingesteld. Vervolgens worden de recursievergelijking en de beginwaarde van de rij ingevoerd. Daarna wordt de horizontale as doorlopen: *b* krijgt waarden van 1.625 tot 3 in stappen van 0.0125. Voor elke waarde van *b* worden de termen van de rij met rangnummer 51 t.e.m. 100 berekend en uitgezet. De berekende waarden vallen nagenoeg samen met de limietwaarde of de ophopingspunten van de rij voor deze waarde van *b*. Voor $b = 1.75$ bijvoorbeeld zullen al deze termen nagenoeg gelijk zijn aan 1. Voor $b = 2.25$ zijn de termen afwisselend ongeveer gelijk aan c_1 en c_2. Enzovoort. De berekende termen worden uitgezet op de verticale rechte corresponderend met de waarde van *b*. Voor $b = 1.75$ bijvoorbeeld vallen de uitgezette punten allemaal ongeveer (en in de praktijk zelfs helemaal) samen met het punt $(1.75, 1)$. Voor $b = 2.25$ vallen de uitgezette punten afwisselend (ongeveer) samen met $(2.25, c_1)$ en $(2.25, c_2)$.

Bibliografie

[1] E.S. Allman, J.A. Rhodes, *Mathematical models in biology. An introduction*, Cambridge (Cambridge University Press), 2004.

[2] C. Biront, J. Deprez, *Wiskundige begrippen en methoden – deel 3*, Deurne (Wolters Plantyn), 1998, ISBN 90-309-8855-X.

[3] M. Braun, *Differential Equations and Their Applications*, 4thEd. New York (Springer Verlag), 1993.

[4] J. Deprez, H. Eggermont, *Migratie- en Lesliematrices*, Uitwiskeling 19/1 (december 2002), 15-59.

[5] J. Deprez, J. Roels, *Discrete dynamische processen*, Uitwiskeling 23/3 (mei 2004), 14-50.

[6] J. Deprez, *Rijen en differentievergelijkingen met de TI-83/84-familie*, workshop T^3-symposium, Oostende, augustus 2004, www.ua.ac.be/johan.deprez (slides) en http://www.t3vlaanderen.be/symposia/index.html (werkteksten).

[7] J. Deprez, *De Belg: een bedreigde diersoort? Een matrixmodel voor de groei van de Belgische bevolking*, lessenpakket Faculteit Wetenschappen KULeuven 2005 http://wet.kuleuven.be/leerkrachten/lessenpakket2005/WISKUNDE/index.html

[8] J. Deprez, *Rijen en differentievergelijkingen/recursieve vergelijkingen met de TI-83/84-familie*, nascholing PEDIC Gent, februari 2005, www.ua.ac.be/johan.deprez

[9] J. Deprez, D. Janssens, *Discrete dynamische systemen: wiskundige modellen met rijen, vectoren en matrices*, nascholing Vliebergh-Sencie Centrum, Leuven, april 2005, www.ua.ac.be/johan.deprez

[10] J. Deprez, *Discreet en dynamisch*, lezing T^3-symposium, Oostende, augustus 2005, www.ua.ac.be/johan.deprez (slides) en http://www.t3vlaanderen.be/symposia/index.html (tekst).

[11] J. Deprez, *Discrete dynamische systemen*, workshop Dag van de Wiskunde, Kortrijk, november 2005, www.ua.ac.be/johan.deprez

[12] J. Deprez, G. Verbeeck, *Logistische groei*, Uitwiskeling 22/2 (maart 2006), 14-48.

[13] J. Deprez, *Lesliematrices en discrete dynamische systemen*, workshop T^3-symposium, Oostende, augustus 2006, www.ua.ac.be/johan.deprez en http://www.t3vlaanderen.be/symposia/index.html (slides).

[14] *Leerplan secundair onderwijs Wiskunde – Leerplan A derde graad aso studierichtingen met component wiskunde*, Brussel (LICAP), september 2004, D/2004/0279/019

Wiskundige modellen die tijdsafhankelijke fenomenen beschrijven, zijn *dynamische* modellen. Bij *discrete* dynamische modellen wordt de tijd opgevat als een discrete veranderlijke, d.w.z. dat de tijd alleen gehele waarden aanneemt, bv. 0, 1, 2, 3, ... Dergelijke discrete dynamische modellen beschrijven de tijdsafhankelijke grootheid door een *rij van getallen*.

Bij het opstellen van wiskundige modellen vertrekt men vaak niet van de veranderlijke grootheid zelf, maar van informatie over de manier waarop die grootheid verandert. Bij continue dynamische modellen wordt die informatie vertaald in een differentiaalvergelijking, bij discrete dynamische modellen in een *recursievergelijking*. Wiskundig modelleren komt dan neer op het opstellen van een gepaste recursievergelijking, het oplossen ervan en het bestuderen van het verloop van de oplossing. Dat is wat we in dit cahier doen. Nu en dan bestuderen we ook recursievergelijkingen zonder verwijzing naar een fenomeen uit de realiteit. Daarom hebben we in de titel de neutralere term discrete dynamische systemen gebruikt i.p.v. discrete dynamische modellen.

De TI-84 kan bijzonder goed overweg met recursievergelijkingen en rijen. Ook als we de recursievergelijking analytisch niet kunnen oplossen, kunnen we de oplossing bestuderen m.b.v. de rekenmachine. Vooral in de tweede helft van het cahier leren we de rekenmachine als een onmisbare bondgenoot kennen.

Niet alleen in de wiskunde zelf, maar ook in het onderwijs is de aandacht voor discrete dynamische systemen de laatste jaren gegroeid. Eén van de eindtermen wiskunde voor de studierichtingen met pool wiskunde uit de derde graad aso verwijst dan ook terecht naar ‘wiskundig modelleren en oplossen van problemen met betrekking tot discrete veranderingsprocessen’. Het cahier biedt ook inspiratie voor het keuzeonderwerp iteratie uit diverse leerplannen.

In het eerste deel van dit cahier behandelen we de meest eenvoudige discrete dynamische systemen. Na een aantal uitgebreide voorbeelden, formuleren we onze bevindingen in algemene termen en sluiten we af met een reeks oefeningen. In het tweede deel komen uitbreidingen aan bod. Ze staan los van elkaar en kunnen dus onafhankelijk van elkaar gebruikt worden.

JOHAN DEPREZ doceert wiskunde in de opleiding Handelswetenschappen aan de HUBrussel en didactiek wiskunde in de Specifieke Lerarenopleiding aan de Universiteit Antwerpen. Hij is extern lector wiskunde voor de Specifieke Lerarenopleiding aan de K.U.Leuven, medewerker van T³ Vlaanderen en redactielid van het tijdschrift Uitwiskeling.