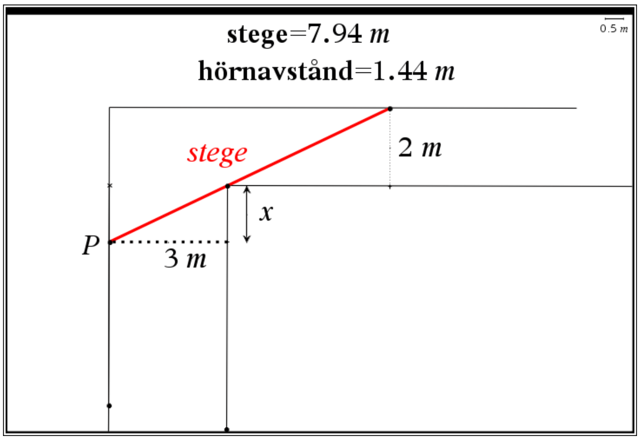
Stege runt ett hörn

En stege ska flyttas runt ett hörn i två korridorer där en korridor är 2 m bred och den andra är 3 m bred. Syftet med aktiviteten är att bestämma den längsta stegen som kommer att kunna passera genom korridoren. Vi får tänka oss att stegen i modellen inte har någon bredd och att man inte betrakta kan vrida den vertikalt.

Man kan ju också tänka sig att man har en lång buss som ska svänga in på en smal gata. Man kan då fråga sig hur lång bussen får vara.

Nu är det mer så här. Stegen längd och avståndet *x* visas överst. Dra i punkten *P*.



När du drar i punkten *P* så förändras steglängden och avståndet x. Data överförs via en funktion som heter ”Capture” till kalkylbladet.

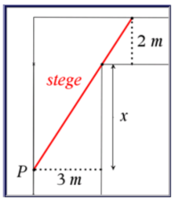
	A avstånd	B steglängd	C	D	E
=	=capture('hörnavstånd,1	=capture(stege,1)			
1	1.44386609233	7.9411294642			
2	1.32148332445	8.23948821084			
3	1.2970185637	8.30819564028			
4	1.27255380295	8.38031788235			
5	1.2480890422	8.45605024383			
6	1.22362428146	8.53560352491			
7	1.19915952071	8.61920559826			
8	1.17469475996	8.70710318551			
9	1.15022999921	8.79956386047			
10	1.12576523847	8.89687831361			

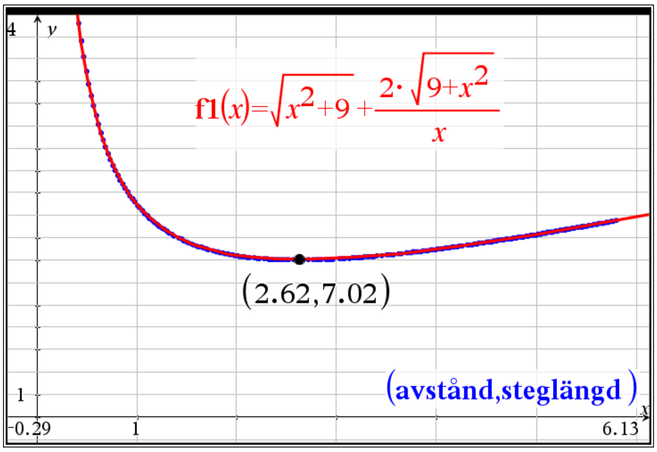
C1

Se till att eleverna kan härleda funktionsuttrycket .

På nästa sida har vi i också också plottat en funktion f1(x) i graf-appen som visar hur längden på stegen beror av avståndet x i figuren. Vad observerar du?

Se till att du själv kan härleda funktionsuttrycket. Stegens längd kan ju delas upp i två delar. Pythagoras sats och likformiga trianglar ger funktionen.





Spridningsdiagrammet med de plottade punkterna och funktionen överlappar varandra. Vi får ett minimum. Bra med en diskussion om resultatet. Det är också möjligt att bygga en modell i lämplig skala.

Stanna upp här för en diskussion här om varför vi har ett minvärde här.

Vi ser att det är ett *minimivärde*. Man skulle kunna uttrycka det så att vi har räknat ut den *kortaste* stege som snuddar hörnet. När vi tagtit reda på det så kan vi säga att en stege som är kortare än så kommer att kunna passera hörnet.

Fundera över detta en stund!

På nästa sida börjar vi den algebraiska och analytiska delen av problemet. Vi har ju tidigare definierat f1(x) så vi skriver bara f1(x) i en matematikruta så kommer uttrycket. Nu skrivs det lite annorlunda.

Tidigare skrev vi funktionsuttrycket som

$$\sqrt{x^2+9}+\frac{2\cdot\sqrt{9+x^2}}{x} \blacktriangleright \frac{(x+2)\cdot\sqrt{x^2+9}}{x}$$

Trycker du nu på enter när du markerar matematikrutan ovan så får du ett förenklat uttryck.

Du får då detta uttryck: $\frac{(x+2)\cdot\sqrt{x^2+9}}{x}$

Här börjar nu den algebraiska/analytiska delen av uppgiften.

$$\mathbf{f1}(x) \blacktriangleright \frac{(x+2)\cdot\sqrt{x^2+9}}{x}$$

Derivering ger:

$$\frac{d}{dx}(\mathbf{f1}(x)|x>0) \blacktriangleright \frac{x+2}{\sqrt{x^2+9}}-\frac{2\cdot\sqrt{x^2+9}}{x^2} ⚠$$

Krångligt uttryck. Vi sätter uttrycket på gemensam nämnare. Vi får nu ett hanterbart uttryck.

$$\text{comDenom}\left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+9}}-\frac{2\cdot\sqrt{x^2+9}}{x^2}\right) \blacktriangleright \frac{x^3-18}{x^2\cdot\sqrt{x^2+9}}$$

Forts nästa sida.

Derivatan har ett nollställe när $x^3-18=0$. Ger att $x=\sqrt[3]{18}$.

Stegens längd blir då: $\mathbf{f1}(\sqrt[3]{18}) \blacktriangleright \frac{\sqrt{3}\cdot\left(3^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{2}{3}}+3\right)^{\frac{3}{2}}}{3}$

Tredje roten ur 18 blir så här: $\sqrt[3]{18} \blacktriangleright 3^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}$. 18 faktoriseras ju som $3\cdot 3\cdot 2$.

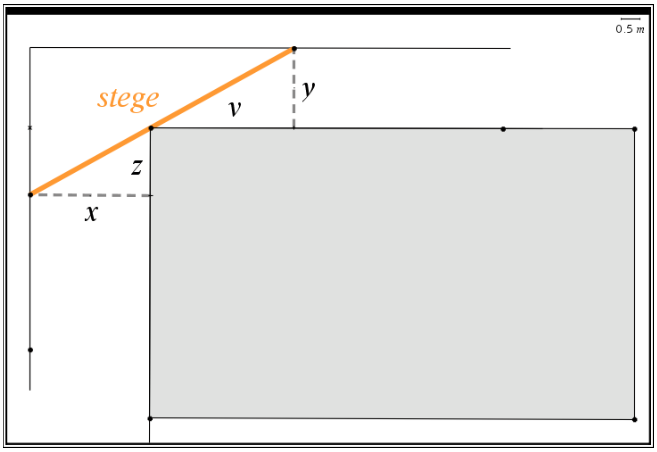
Ett närmevärde få vi så här:

$$\text{approx}(\mathbf{f1}(\sqrt[3]{18})) \blacktriangleright 7.02348237922$$

Det exakta svaret blir ett mastigt uttryck. Vi beräknar också ett närmevärde.

Problem 2

Nu försöker vi generalisera problemet genom att kalla bredden hos korridorerna för x och y. Ibland när man gör så är man osäker om man lyckas. Ofta hamnar man med mastiga uttryck och det är lätt att göra fel när man försöker förenkla uttrycket. Även om man använder CAS-verktyg så bör man hela tiden försöka kontrollera att de symboliska beräkningarna verkar rimliga.



Kan vi generalisera problemet?

Vi inför nu beteckningar enligt figuren på nästa sida. Korridorerna bredd är alltså x och y och vi har också infört beteckningar för avstånd till korridorens hörn. Om vi kallar stegens längd för *l* så kan vi med beteckningarna i figuren skriva: $l=\sqrt{x^2+z^2}+\sqrt{y^2+v^2}$

Om vi nu vill ha bort v så kan vi använda oss av likformiga trianglar och då får vi att $v=\frac{yx}{z}$. Vi får då $l=\sqrt{x^2+z^2}+\sqrt{y^2+\left(\frac{yx}{z}\right)^2}$ som kan förenklas genom att vi bryter ut y^2: $l=\sqrt{x^2+z^2}+y\cdot\sqrt{1+\left(\frac{x}{z}\right)^2}$

Vi kan nu betrakta korridorernas bredd (x och y) som två konstanter (parametrar) i fortsättningen. För att söka det minsta värdet så deriverar vi alltså med avseende på z.

$$\frac{d}{dz}(l) \blacktriangleright \frac{z+y}{\sqrt{z^2+x^2}}-\frac{\sqrt{z^2+x^2}\cdot y}{z^2} ⚠$$

Vi sätter uttrycket på gemensam nämnare:

$$\text{comDenom}\left(\frac{z+y}{\sqrt{z^2+x^2}}-\frac{\sqrt{z^2+x^2}\cdot y}{z^2}\right) \blacktriangleright \frac{z^3-x^2\cdot y}{\sqrt{x^2+z^2}\cdot z^2}$$

Nu behöver vi bara titta på täljaren när vi ska söka nollstället:

$z^3-x^2\cdot y=0$ ger $z=(x^2 y)^{\frac{1}{3}}$ **forts nästa sida**

Vi sätter in uttrycket för z i uttrycket för längden *l*:

$$\sqrt{x^2+z^2}+y\cdot\sqrt{1+\left(\frac{x}{z}\right)^2}\,|z=(x^2\cdot y)^{\frac{1}{3}} \text{ and } z>0 \text{ and } y>0 \text{ and } x>0$$

$$\blacktriangleright \left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} ⚠$$

Vi jämför med lösningen i problem 1 där x=3 och y=2:

$\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}|x=3 \text{ and } y=2 \blacktriangleright 7.02348237922$. **DET STÄMMER!**

Observera det lodräta strecket som vi använder när vi ska ange ett visst villkor för beräkningen. Du kopierar in det på sidan som ett tecken härifrån: