

Recurstieve formules

Als je in een rij getallen een regelmaat ziet kun je die regelmaat vaak met een formule beschrijven. Je gebruikt het voorgaande getal om het getal wat komen gaat te berekenen. Dat proces noem je recursie en de formule is een recurstieve formule.

De recurstieve formules hebben vaak de vorm:

$$u_{(n+1)} = a \cdot u_n + b$$

beginterm van de rij = u_0

Twee Voorbeelden

Gegeven is de rij getallen 4 ; 5 ; 8 ; 17 ;

Geef de recurstieve formule bij de rij.

Na enig puzzelwerk ontdek je waarschijnlijk volgend patroon:

$$4 \cdot 3 - 7 = 5$$

$$5 \cdot 3 - 7 = 8$$

$$8 \cdot 3 - 7 = 17$$

oude term $\cdot 3 - 7 =$ *nieuwe term* of als formule in recurstieve notatie:

$$u_{(n+1)} = 3 \cdot u_n - 7$$

$$u_0 = 4$$

Dit voorbeeld was nog redelijk overzichtelijk. Anders wordt het bij de rij getallen:

-1,5 ; -0,375 ; -0,65625 ; -0,5859375 ;

Geef de recurstieve formule bij de rij.

Dit vergt wat meer denk- en zoekwerk van je.

De recurstieve formule die bij de rij hoort is:

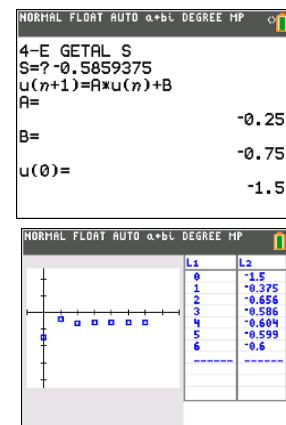
$$u_{(n+1)} = -0,25 \cdot u_n - 0,75$$

$$u_0 = -1,5$$

De formule ziet er redelijk onschuldig uit, maar de rij getallen oogt toch iets minder eenvoudig. Het vinden van deze oplossing zal niet iedereen zomaar lukken.

Het programma wat je hier aantreft kan je daarbij helpen.

Om te schetsen hoe het programma in elkaar zit eerst een algemene benadering van een recurstieve formule.



Stel je hebt de formule :

$$u_{(n+1)} = a \cdot u_n + b$$

beginterm van de rij: $u_0 = P$

We weten echter niet wat de waarde van a en van b is, maar kunnen we die uit de rij getallen destilleren? Ja dat kan:

Stap1: Bereken de waarden u_n .

n	Berekening	u_n
0		P
1	$aP + b$	$aP + b$
2	$a(aP + b) + b$	$a^2P + ab + b$
3	$a(a^2P + ab + b) + b$	$a^3P + a^2b + ab + b$
4	etc	

Stap 2: Bereken de verschillen.

$$V3 = u_3 - u_2 = a^3P + a^2b + ab + b - a^2P - ab - b = a^2(aP + b - P)$$

$$V2 = u_2 - u_1 = a^2P + ab + b - aP - b = a(aP + b - P)$$

$$V1 = u_1 - u_0 = aP + b - P = aP + b - P$$

Stap 3: Deel de verschillen op elkaar.

$$\frac{V2}{V1} = \frac{a(aP+b-P)}{aP+b-P} = a$$

$$\frac{V3}{V2} = \frac{a^2(aP+b-P)}{a(aP+b-P)} = a$$

Met deze drie stappen vindt je de waarde van a . Als je a weet is b ook zo gevonden door de waarde van u_0 te vermenigvuldigen met de gevonden waarde van a en die uitkomst van het getal u_1 af te halen: $u_1 - a \cdot u_0 = b$

We nemen nog een keer de rij getallen 4 ; 5 ; 8 ; 17 ; en gaan de recursieve formule afleiden met de procedure van hierboven.

$$\frac{V3}{V2} = \frac{(17-8)}{(8-5)} = \frac{9}{3} = 3$$

$$\frac{V2}{V1} = \frac{(8-5)}{(5-4)} = \frac{3}{1} = 3$$

$$4 \cdot 3 + b = 5 \quad \Rightarrow \quad b = -7$$

We vinden nu: $a = 3$ en $b = -7$

$$u_{(n+1)} = 3 \cdot u_n - 7$$

$$u_0 = 4$$

Directe formules

Als je de recursieve formule van een rij getallen weet kun je in veel gevallen ook een directe formule opstellen. Met die directe formule kun je het rangnummer n direct gebruiken om een bepaalde waarde in de rij te berekenen.

Bij een rekenkundige rij hoort de directe formule:

$$u(n) = a \cdot n + b \quad (\text{lijkt op een lineair verband})$$

Bij een meetkundige rij hoort de directe formule:

$$u(n) = b \cdot r^n \quad (\text{lijkt op een exponentieel verband})$$

Tijdgrafiek:

Als je de rij getallen in een assenstelsel uitzet krijg je een verzameling punten. Je kan met de directe of de recursieve formule toekomstige waarden berekenen en ook die in de plot opnemen. Zo kan je visualiseren waar de rij getallen heen gaat.

Je kan dus erg veel informatie afleiden uit een rijtje getallen. Het programma wat je hier aantreft kan uit een rij van slechts 4 getallen - in de meeste gevallen- aan je laten zien wat:

- De recursieve formule is,
- De directe formule is,
- Het verloop in de tijd laten zien door de tijdgrafiek te plotten.

Getalrijen/Recur sieve + direct formule + tijdgrafiek

Programma RECURSIE

```

Disp "BEPAAAL DE RECURSIEVE"
Disp "FORMULE."
Disp "u(n+1)=A*u(n)+B"
Disp "u(0)=C"
Disp "VOER DE EERSTE VIER"
Disp "GETALLEN IN."
Disp "1-E GETAL P"
Prompt P
Disp "2-E GETAL Q"
Prompt Q
Disp "3-E GETAL R"
Prompt R
Disp "4-E GETAL S"
Prompt S
If (R-Q)=0 or (Q-P)=0
Then
Disp "DIT IS GEEN RECURSIE"
Stop
Else
(S-R)/(R-Q)→C
(R-Q)/(Q-P)→D
If C≠D
Then
Disp "BIJ DEZE RIJ GETALLEN"
Disp "MOET JE EEN ANDER"
Disp "SOORT FORMULE ZOEKEN"
Else
Q-C*P→E
Disp "u(n+1)=A*u(n)+B"
Disp "A=",C
Disp "B=",E
Disp "u(0)=",P
Pause
Disp "GEEF AAN TOT WELK GETAL"
Disp "W DE LIJST MOET LOPEN"
Prompt W
PlotsOff
seq(X,X,0,W,1)→L1
If C=1
Then
(Q-P)→T
Disp "DIRECTE FORMULE"
Disp "BIJ REKENKUNDIGE RIJ"
Disp "Y=AX+B MET A=",T
Disp "EN B=",P

```

Als dit waar is, dan deel je door 0. Dat mag niet dus krijg je een foutmelding.

Deling van het verschil. Geeft de variabele A in de recursieve formule.

Als dit waar is dan mogelijk recursie volgens een ander soort verband.

Bepaal variabele B in de recursieve formule.

Startwaarde rij is P.

Voor de tijdgrafiek mag je aangeven tot hoe ver de plot moet gaan lopen. **Pas op**, te grote waarden van W geeft onoverzichtelijke plots.

Vul lijst 1 met getallen 0 t/m W.

Is dit waar, dan rekenkundige rij.

$u_1 - u_0$ geeft in dit geval de "helling" van de rij.

Getalrijen/Recuratieve + direct formule +tijdgrafiek

"TX+P"→Y₁		Zet directe formule in Y1.
Y₁(L₁)→L₂		Bereken de y-waarden. Zet dat in lijst 2.
Pause		
Goto N		
Else		
If E=0 and C>0 and C≠1		Als dit waar is, dan meetkundige rij.
Then		
Disp "DIRECTE FORMULE"		
Disp "BIJ MEETKUNDIGE RIJ"		
Disp "Y=B*R^T MET B=",P		
Disp "EN R=",C		De rede (groeifactor) van de rij.
"P*C^X"→Y₁		Zet formule in Y1.
Y₁(L₁)→L₂		Bereken de y-waarden. Zet die in lijst2.
Pause		
Goto N		
Else		Geen meet- of rekenkundige rij? Hier verder.
W+1→dim(L₂)	(1)	Maak een lijst met lengte W+1.
P→L₂(1)		Zet u(0) op 1-e plaats in die lijst.
For(Y,2,W+1,1)	(2)	Maak een teller Y die loopt van 2 t/m W+1.
L₂(Y-1)→V		Haal element (Y-1) uit lijst 2, zet die in register V.
V*C+E→L₂(Y)		Bereken een waarde met de recursieve formule en zet die weer terug in lijst 2 op plek Y.
End		
Disp "DE RIJ GETALLEN VAN"		
Disp "0 TOT "+toString(W)+" STAAN"		Zet je de lengte van je keuze mooi in de tekst.
Disp "IN DE PLOT EN TABEL."		
Pause		
Goto N		
Stop		
Lbl N		
FnOff		Zet functies uit.
AxesOn		Zet assen aan.
G—T		Splits weergave scherm.
-1→Xmin		Zet x-window goed.
W+2→Xmax		
min(L₂)-3→Ymin		Zet y-window goed.
max(L₂)+3→Ymax		
Plot1(Scatter,L₁,L₂)		Plot de punten.
DispGraph		
Stop		

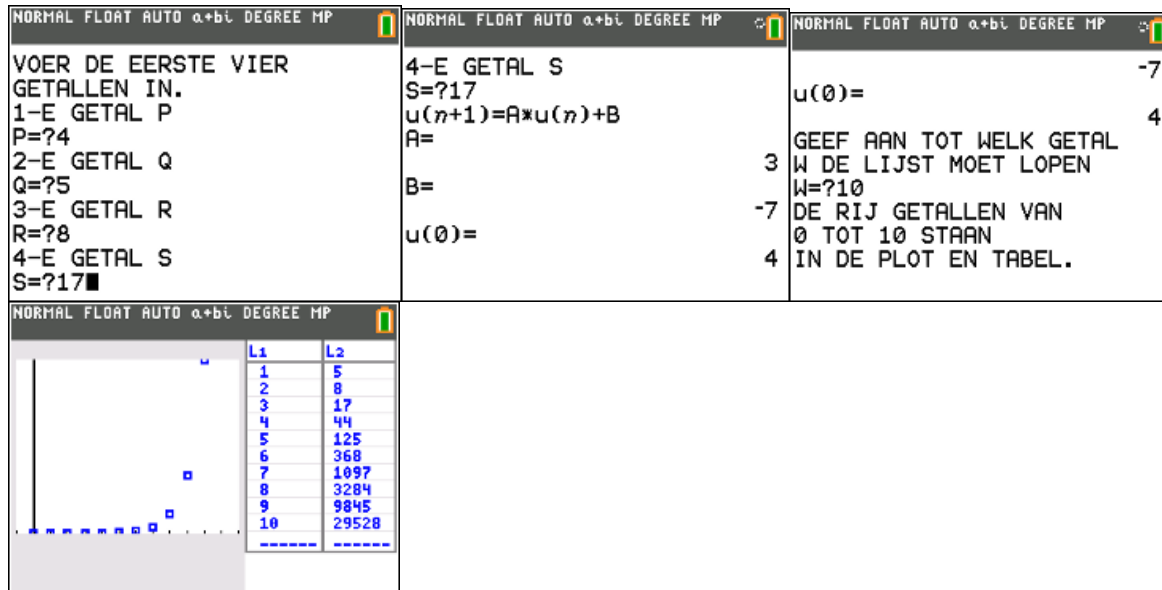
(1) De eerste term in de rij is u_0 . Als je t/m term 5 wilt zien wordt de lijst 6 termen groot. Dus (aantal+1) of (W+1).

(2) In deze korte loop berekent de TI-84 de rij met getallen via de recursieve formule.

Getalrijen/Recuratieve + direct formule +tijdgrafiek

VB1

Gegeven is de rij getallen 4 ; 5 ; 8 ; 17 ;
Geef de recursieve formule bij de rij.

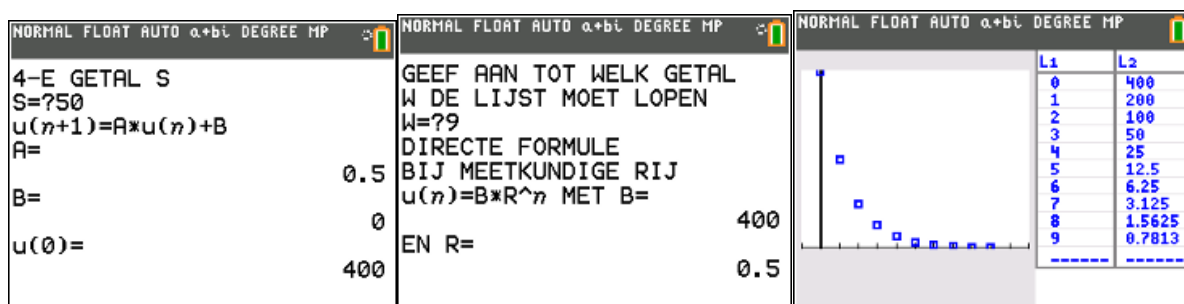


Na invoer van de 4 getallen zie je de recursieve formule met bijpassende gegevens.
Na aangeven van de lengte van het te plotten interval wordt een tijdgrafiek geplott.
Via **TRACE** kan je door de lijsten scrollen.

VB 2

Gegeven is de rij getallen 400 ; 200 ; 100 ; 50

Geef de recursieve formule bij de rij en bepaal de waarde van de 8-e term.



Je ziet de recursieve formule, de directe formule, de tijdgrafiek en een tabel met waarden. De 8-e term is de y-waarde bij $n = 7$; (8 - e term) = 3,125.

VB 3

Gegeven is de rij getallen 3 ; 8 ; 13; 18 ;

Geef de recursieve formule bij de rij en bepaal de waarde van de 15-e term.

4-E GETAL S
S=?18
 $u(n+1)=A*u(n)+B$
A=
B=
 $u(0)=$

GEEF AAN TOT WELK GETAL
W DE LIJST MOET LOPEN
W=?14
DIRECTE FORMULE
BIJ REKENKUNDIGE RIJ
 $u(n)=An+B$ MET A=
EN B=

L1	L2
5	28
6	33
7	38
8	43
9	48
10	53
11	58
12	63
13	68
14	73

15-e term, kijk bij n=14. Dat is 73.

VB 4

Gegeven is de rij getallen 3 ; 4; 6; 9 ;

(geen recursieve formule van het type $u_{(n+1)} = a \cdot u_n + b$)

Q=?4
3-E GETAL R
R=?6
4-E GETAL S
S=?9
BIJ DEZE RIJ GETALLEN
MOET JE EEN ANDER
SOORT FORMULE ZOEKEN
..... Done.

VB 5

Gegeven is de rij getallen -1 ; 1; -1 ; 1 ;

Plot de tijdgrafiek.

VOER DE EERSTE VIER
GETALLEN IN.
1-E GETAL P
P=?-1
2-E GETAL Q
Q=?1
3-E GETAL R
R=?-1
4-E GETAL S
S=?1

4-E GETAL S
S=?1
 $u(n+1)=A*u(n)+B$
A=
B=
 $u(0)=$

$u(0)=$ 0
-1
GEEF AAN TOT WELK GETAL
W DE LIJST MOET LOPEN
W=?10
DE RIJ GETALLEN VAN
0 TOT 10 STAAN
IN DE PLOT EN TABEL.

L1	L2
1	1
2	-1
3	1
4	-1
5	1
6	-1
7	1
8	-1
9	1
10	-1