25. Grundoperationen mit Vektoren

In Schulbüchern werden Vektoren üblicherweise als Spaltenvektoren dargestellt. Darum werden in den Kapiteln 25–30 Beispiele fast ausschliesslich mit Spaltenvektoren gerechnet, obwohl die Befehle sowohl für Zeilen- als auch für Spaltenvektoren funktionieren.

25.1 Einen Vektor eingeben und speichern

Spaltenvektor

Speichere den Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$:

1. Weg:

spaltenv:=[2; 3; –6] `Enter` → $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$

Eingabe des Strichpunktes

Der Strichpunkt ; wird wie folgt eingegeben:

Mehrmaliges Drücken der Taste `?!▸`, dann `Enter`.

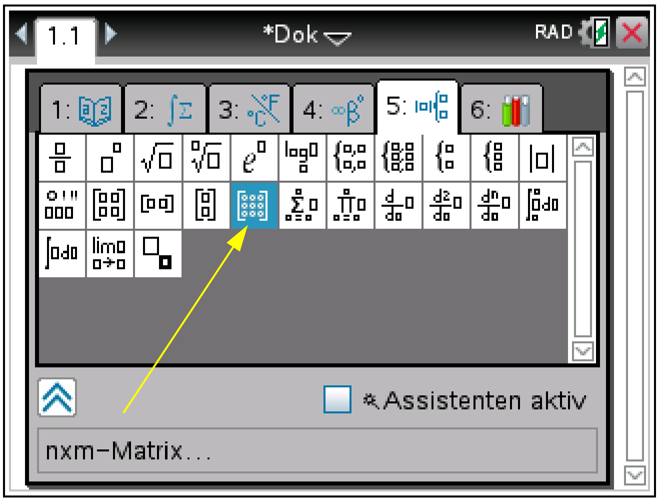
Durch Eingabe von ; auf der Tastatur.

2. Weg:

`📖` 5

Mathematische Vorlagen

und die Vorlage für eine nxm-Matrix mit dem Pfeilcursor bzw. dem Mauszeiger doppelt anklicken



und ausfüllen:

Zeilenanzahl 3
Spaltenanzahl 1
OK

2 ▼ 3 ▼ –6 `Enter` → $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$

Für Spaltenvektoren mit nur zwei Komponenten

Zeilenvektor		steht eine eigene Vorlage zur Verfügung. Sie steht unmittelbar links von der Vorlage für eine nxm-Matrix. Speichere den Vektor [2, 3, –6]: zeilenv:= [2, 3, –6] Enter → $\begin{bmatrix}2 & 3 & -6\end{bmatrix}$ Beim Spaltenvektor steht zwischen den Komponenten des Vektors ein Strichpunkt, beim Zeilenvektor ein Komma.
25.2 Einen Zeilenvektor in einen Spaltenvektor verwandeln und umgekehrt		Verwandle den Vektor zeilenv aus 25.1 in einen Spaltenvektor und den Vektor spaltenv in einen Zeilenvektor: zeilenv menu 7 2 Enter → $\begin{bmatrix}2\\3\\-6\end{bmatrix}$ spaltenv menu 7 2 Enter → $\begin{bmatrix}2 & 3 & -6\end{bmatrix}$ zeilenv @t Enter → $\begin{bmatrix}2\\3\\-6\end{bmatrix}$ spaltenv @t Enter → $\begin{bmatrix}2 & 3 & -6\end{bmatrix}$
25.3 Komponenten eines Vektors ansprechen ... eines Spaltenvektors ... eines Zeilenvektors		Wie heisst die dritte Komponente des Vektors spaltenv aus 25.1? spaltenv[3, 1] Enter → –6 Der Zusatz [3, 1] bedeutet: 3. Zeile, 1. Spalte Wie heisst die dritte Komponente des Vektors zeilenv aus 25.1? zeilenv[1, 3] Enter → –6 Der Zusatz [1, 3] bedeutet: 1. Zeile, 3. Spalte
25.4 Grundoperationen mit Vektoren Summe Differenz Vielfaches		Addiere die beiden Vektoren $\begin{pmatrix}0\\6\\-1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}3\\-6\\5\end{pmatrix}$: [0; 6; –1]+[3; –6; 5] Enter → $\begin{bmatrix}3\\0\\4\end{bmatrix}$ Subtrahiere von $\begin{pmatrix}0\\6\\-1\end{pmatrix}$ den Vektor $\begin{pmatrix}3\\-6\\5\end{pmatrix}$: [0; 6; –1]–[3; –6; 5] Enter → $\begin{bmatrix}-3\\12\\-6\end{bmatrix}$ Verdopple den Vektor $\begin{pmatrix}0\\6\\-1\end{pmatrix}$:

Bruchteil		2*[0; 6; –1] Enter → $\begin{bmatrix}0\\12\\-2\end{bmatrix}$ Drittle den Vektor $\begin{pmatrix}3\\-6\\5\end{pmatrix}$: [3; –6; 5]/3 Enter → $\begin{bmatrix}1\\-2\\5/3\end{bmatrix}$
25.5 Länge eines Vektors	7 7 1	Wie lang ist der Vektor $\begin{pmatrix}2\\3\\-6\end{pmatrix}$? norm([2; 3; –6]) Enter → 7
25.6 Länge der Strecke AB	7 7 1	Welches ist der Abstand der Punkte A(3, 2, 1) und B(4, –2, 9)? a:=[3; 2; 1] Enter → $\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$ b:=[4; –2; 9] Enter → $\begin{bmatrix}4\\-2\\9\end{bmatrix}$ norm(b–a) Enter → 9
25.7 Einen Vektor auf Länge 1 strecken / stauchen	7 C 1	Stauche den Vektor $\begin{pmatrix}2\\3\\-6\end{pmatrix}$ auf Länge 1: unitv([2; 3; –6]) Enter → $\begin{bmatrix}2/7\\3/7\\-6/7\end{bmatrix}$
25.8 Haben zwei Vektoren gleiche / entgegengesetzte Richtung?		Haben $\begin{pmatrix}3\\2\\-6\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-6\\-4\\12\end{pmatrix}$ gleiche oder entgegengesetzte Richtung? [3; 2; –6]./[–6; –4; 12] Enter → $\begin{bmatrix}-1/2\\-1/2\\-1/2\end{bmatrix}$ Die Antwort ist ja, weil der Resultatvektor dreimal dieselbe Zahl enthält. Und da diese Zahl negativ ist, haben die Vektoren entgegengesetzte Richtung. Der Befehl ./ führt eine komponentenweise Division durch.
25.9 Einen Vektor zerlegen		Zerlege den Vektor $\begin{pmatrix}-6\\0\\0\end{pmatrix}$ nach den Vektoren $\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$,

	3 1	$\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}7\\6\\5\end{pmatrix}$: solve(x*[4; 0; 2] + y*[–1; 2; 1] + z*[7; 6; 5] = [–6; 0; 0], {x, y, z}) Enter → x=1 and y=3 and z=–1 Interpretation: $\begin{pmatrix}-6\\0\\0\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}7\\6\\5\end{pmatrix}$.
25.10 Abklären, ob Vektoren linear unabhängig sind oder nicht		Sind die Vektoren $\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}7\\6\\5\end{pmatrix}$ linear unabhängig? Dazu zerlegt man den Nullvektor $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}7\\6\\5\end{pmatrix}$. Gemäss 25.9 findet man als *einzige* Zerlegung $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=0\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}7\\6\\5\end{pmatrix}$, d. h., die drei Vektoren sind linear unabhängig.
		Sind die Vektoren $\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}7\\6\\5\end{pmatrix}$ linear abhängig oder linear unabhängig? Dazu zerlegt man den Nullvektor $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}7\\6\\5\end{pmatrix}$. Gemäss 25.9 findet man:
	3 1	solve(x*[4; 0; 2] + y*[1; 2; 1] + z*[7; 6; 5] = [0; 0; 0], {x, y, z]) Enter → x= –***c1*** and y= –3· ***c1*** and z= ***c1*** Wie man am Symbol ***c1*** erkennt, hat dieses Gleichungssystem unendlich viele Lösungen. Deshalb sind die Vektoren linear abhängig. Man erhält die möglichen Zerlegungen, indem man für ***c1*** eine beliebige reelle Zahl einsetzt; für ***c1***=1 erhält man beispielsweise $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=(-1)\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}+(-3)\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}7\\6\\5\end{pmatrix}$.