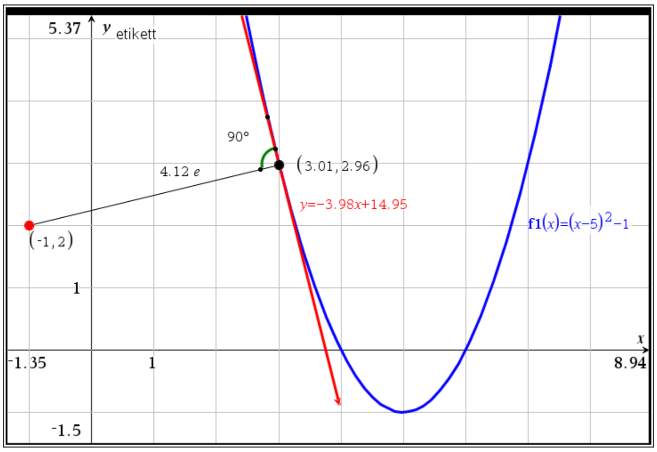
Kortaste avståndet mellan en punkt och en kurva

Denna övning passar för kurs 3 som tillämpning på derivata. Vi ska här bestämmas det kortaste avståndet mellan en punkt och en kurva.

På nästa sida har vi gjort en enkel illustration av problemet genom att rita kurvan, dra en tangent till kurvan (verktyg finns i verktygsmenyn under rubriken Geometri och sedan Punkter och linjer i geometri-menyn). Sedan har vi också med geometriverktyg dragit ett linjesegment mellan punkten och tangeringspunkten.

Sid 2: Pröva att dra i tangeringspunkten och se vad som händer? Vi har med geometriverktyget Mätning mätt längden av linjesegmentet och vinkeln mellan denna linje och tangenten.

Nu har vi en klar bild av problemet och kan lösa problemet analytiskt.



Sid 3: Vi ska nu teckna ett uttryck för längden av linjesegmentet mellan punkten (-1, 2) och kurvan.

Avståndformeln mellan två punkter (x_1, y_1) och (x_2, y_2) är:

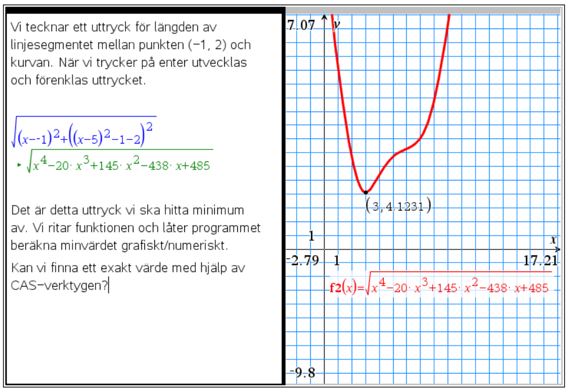
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Detta ger att avståndet mellan (1, -2) och kurvan $y = (x-5)^2-1$ med koordinaterna (x, $(x-5)^2-1$) är

$$d = \sqrt{(x-(-1)^2 + ((x-5)^2 - 1 - 2)^2}$$

Vi infogar en ruta för matematikberäkningar och utvecklar uttrycket genom att trycka på enter.

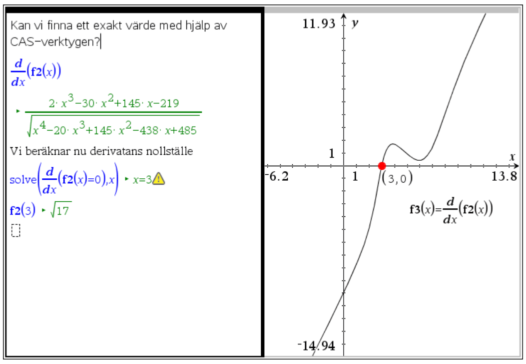
Det är detta uttryck vi ska hitta minimum av. Vi ritar funktionen och låter programmet beräkna minvärdet grafiskt/numeriskt med hjälp av analysverktyget



Vi finner ett minsta värde för x = 3. Ett närmevärde på avståndet är 4,1233. Kan vi finna ett exakt värde med hjälp av CAS-verktygen?

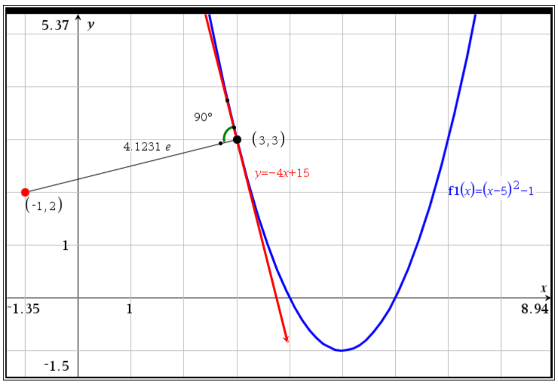
Sid 4: Vi beräknar nu först derivatan av funktionen f2(x) och beräknar denna funktions nollställe. Sedan beräknar vi funktionsvärdet för detta nollställe.

Vi får det exakta värdet $\sqrt{17}$.



Vi kontrollerar med linjen på sid 2. Vi klickar på tangeringspunktens koordinater och ändrar x-koordinaten till 3. Mätningen ger längden 4,1231.

$\sqrt{17} \approx$ 4,1231. Elegant! ☺



Vi ser också att det kortaste avståndet är när linjen är vinkelrät mot tangenten.