19. Die Ableitung einer Funktion an einer Stelle

19.1 Überblick

„Was geschieht mit dem Funktionswert f(x), wenn sich x *‚ein bisschen'* ändert?" Wenn f an der Stelle x stetig ist, ändert sich f(x) auch nur *„ein bisschen"*, wie wir in Abschnitt 18.4 (Band *Analysis 3*) gesehen haben. Damit ist die Frage *qualitativ* beantwortet.

Nun gehen wir diese Frage *quantitativ* an, d. h. wir möchten *das Ausmass* der Änderung durch eine Zahl beschreiben. Eine denkbare Antwort wäre: „Wenn sich x ‚ein bisschen' ändert, ändert sich f(x) 3-mal so stark wie x." Dieser Zugang führt zum Begriff der *Ableitung*, *dem* zentralen Begriff der Differentialrechnung.

Wie schon bei der Untersuchung der Stetigkeit befassen wir uns mit „winzigen", ja sogar unendlich kleinen Änderungen des x-Wertes. Typisch für die Differentialrechnung ist die Frage, wie stark sich etwas in einem bestimmten *Moment* ändert – nicht in einem bestimmten *Zeitraum*.

19.2 Die Ableitung einer stetigen Funktion an einer bestimmten Stelle

19.2.1 Beispiel: Anfahrendes Auto

Ein anfahrendes Auto lege in t Sekunden den Weg

$$s(t)=1.5\cdot t^2$$

Meter zurück. Nach $t_0=2$ Sekunden hat es also den Weg s(2)=6 m zurückgelegt.

(1) a) Wie stark ändert sich der zurückgelegte Weg, wenn das Auto „etwas" länger als 2 Sekunden unterwegs ist – z. B. 3 Sekunden anstatt 2 Sekunden?

b) Wievielmal so stark wie t ändert sich s?

c) Wie kann man dieses Resultat deuten?

(2) Wie sieht es bei einer Fahrzeit von 2.5, 2.1, 2.01, 2.001, 2.0001 Sekunden aus?

(3) Was geschieht für $\Delta t \downarrow 0$?

(4) Wie sieht es aus, wenn das Auto „etwas" weniger lang als 2 Sekunden unterwegs ist, z. B. 1 Sekunde, 1.5, 1.9, 1.99, 1.999, 1.999 Sekunden?

(1) a) Wenn das Auto etwas länger als 2 Sekunden unterwegs ist, wachsen die Zeit t und die zurückgelegte Strecke s an. Die zusätzliche Zeit bezeichnen wir mit Δt, die zusätzlich zurückgelegte Strecke mit Δs.

Nehmen wir einmal an, es sei

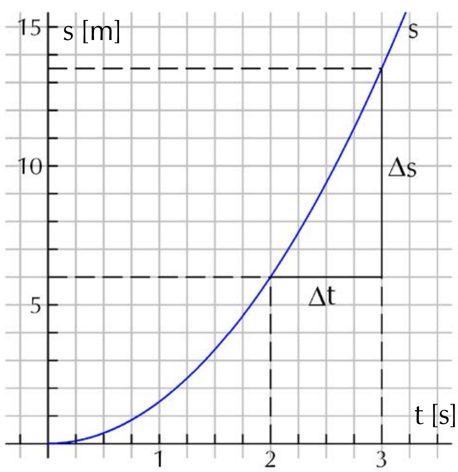
$$\Delta t=1 \text{ s.}$$

Dann ist das Auto insgesamt

$$t_0+\Delta t=3 \text{ s}$$

unterwegs. In diesen 3s fährt es

$$s(t_0+\Delta t)= s(3)=13.5 \text{ m}$$



weit. Der Weg, der in der zusätzlichen Sekunde Fahrzeit zurückgelegt wurde, beträgt

$$\Delta s = s(3) - s(2) = 13.5\text{ m} - 6\text{ m} = 7.5\text{ m}.$$

b) Kurz: Wenn sich die Zeit um $\Delta t=1$ s ändert, ändert sich der Weg um $\Delta s=7.5$ m. Der Weg hat sich also 7.5-mal so stark geändert wie die Zeit, was durch den Quotienten

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{7.5\text{ m}}{1\text{ s}} = 7.5\text{ m/s}$$

ausgedrückt wird.

c) Das Verhältnis $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ haben wir wegen einer rein mathematischen Fragestellung untersucht: Wie viel mal so stark wie Δt ändert sich Δs? In diesem Beispiel hat dieses Verhältnis eine konkrete Bedeutung: die Durchschnittsgeschwindigkeit! Zwischen Sekunde 2 und Sekunde 3 nach dem Start legt das Auto 7.5 m zurück. In diesem Zeitabschnitt fährt es mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{7.5\text{ m}}{1\text{ s}} = 7.5\text{ m/s}.$$

Es handelt sich nur um eine Durchschnittsgeschwindigkeit, weil der Tachometer des sich beschleunigenden Autos nach 2 Sekunden eine etwas niedrigere Geschwindigkeit anzeigt, nach 3 Sekunden eine etwas höhere Geschwindigkeit.

(2) Die Berechnungen sind genau dieselben wie bei (1). Die Resultate – ohne Einheiten – sind in folgender Tabelle zusammengefasst:

Untersuchter Zeitpunkt: $t_0=2$, $s(t_0)=6$				
Δt	$t_0+\Delta t$	$s(t_0+\Delta t)$	$\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0)$	$\frac{\Delta s}{\Delta t}$
0.5	2.5	9.375	3.375	6.75
0.1	2.1	6.615	0.615	6.15
0.01	2.01	6.06015	0.06015	6.015
0.001	2.001	6.0060015	0.0060015	6.0015
0.0001	2.0001	6.000600015	0.000600015	6.00015

a) Die Antwort Δs steht jeweils in der zweithintersten Spalte.

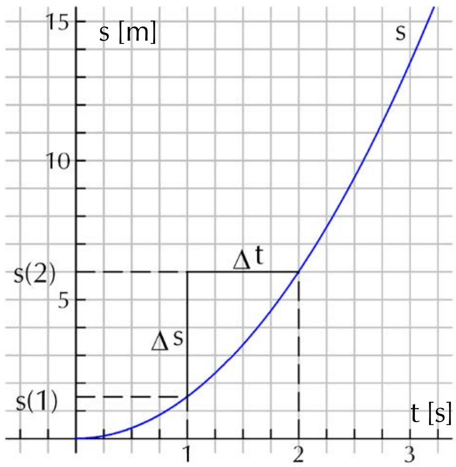
b) Die Antwort $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ steht jeweils in der hintersten Spalte.

c) Wieder erhält man jeweils eine Durchschnittsgeschwindigkeit. Für kleine Werte von Δt wie zum Beispiel $\Delta t=0.0001$ s erhält man die *Durchschnittsgeschwindigkeit* zwischen Sekunde 2.0000 und Sekunde 2.0001. Das ist *praktisch* die Momentangeschwindigkeit nach 2 Sekunden. Die *Momentangeschwindigkeit* ist diejenige Geschwindigkeit, welche die Nadel des Tachometers nach *exakt* 2 Sekunden anzeigt.

(3)
- Für $\Delta t\downarrow 0$ strebt $\Delta s\to 0$. (Das ist wegen der Stetigkeit der Funktion s zu erwarten.)
- Für $\Delta t\downarrow 0$ strebt das Verhältnis $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ gegen 6. (Das ist nicht von vornherein klar, denn für $\Delta t=0$ geht das Verhältnis $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ in den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ über.)
- Deutung des Resultats: Die Momentangeschwindigkeit nach exakt 2 Sekunden ist

$$\lim_{\Delta t\downarrow 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\downarrow 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t} = 6\text{ m/s}.$$

(4) Weil das Auto weniger als 2 Sekunden unterwegs ist, wird Δt negativ. Die folgende Tabelle zeigt die Resultate für einige Werte von Δt.



Untersuchter Zeitpunkt: $t_0=2$, $s(t_0)=6$				
Δt	$t_0+\Delta t$	$s(t_0+\Delta t)$	$\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0)$	$\frac{\Delta s}{\Delta t}$
–1	1	1.5	–4.5	4.5
–0.5	1.5	3.375	–2.625	5.25
–0.1	1.9	5.415	–0.585	5.85
–0.01	1.99	5.94015	–0.05985	5.985
–0.001	1.999	5.9940015	–0.0059985	5.9985
–0.0001	1.9999	5.999400015	–0.000599985	5.99985

Auch jetzt gilt: Für $\Delta t \uparrow 0$ streben Δs gegen 0 und das Verhältnis $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ gegen 6. Die Momentangeschwindigkeit des Autos beträgt nach 2 Sekunden auch gemäss dieser Betrachtung 6 m/s.

♦

19.2.2 Zusammenfassung

(1) In der Umgebung von $t_0=2$ ändert sich Δs rund 6mal so stark wie Δt:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}\approx 6.$$

Der genaue Wert hängt von Δt ab und lag in den Beispielen zwischen 4.5 und 7.5.

(2) Das Verhältnis

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$$

kann in diesem Beispiel als durchschnittliche Geschwindigkeit des Autos zwischen den beiden Zeitpunkten t_0 und $t_0+\Delta t$ gedeutet werden.

(3) Je näher Δt bei 0 liegt, desto näher liegt das Verhältnis $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ bei 6. Dabei spielt es keine Rolle, ob Δt positiv oder negativ ist:

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t \downarrow 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}=6\,\mathrm{m/s}$$

und

$$\lim_{\Delta t \uparrow 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t \uparrow 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}=6\,\mathrm{m/s}.$$

Anders ausgedrückt: Der rechtsseitige Grenzwert und der linksseitige Grenzwert existieren und sind gleich. Also existiert der Grenzwert

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

und hat in diesem Fall den Wert 6 m/s.

(4) Der Grenzwert

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = 6\,\text{m/s}$$

kann in diesem Beispiel als *Momentangeschwindigkeit nach t_0 Sekunden* gedeutet werden.

In Beispiel 19.2.1 haben wir in der Umgebung der Stelle $t_0=2$ Durchschnittsgeschwindigkeiten für einige Zeit*räume* berechnet und mit Hilfe des Grenzwertes schliesslich die Momentangeschwindigkeit des anfahrenden Autos zum Zeit*punkt* $t_0=2$ ermittelt.
Nun vergessen wir, dass es um ein anfahrendes Auto geht, und studieren einfach den Graphen der – abgesehen von den Bezeichnungen – selben Funktion bei einer beliebigen Stelle x_0. Es geht also einerseits um eine Verallgemeinerung, anderseits um eine andere Deutung desselben Beispiels.

19.2.3 Beispiel: Studium eines Funktionsgraphen

Wir studieren den Graphen der Funktion f: $x \mapsto 1.5 \cdot x^2$ in der Umgebung der Stelle x_0.

(1) a) Um wie viel ändert sich der Funktionswert $f(x_0)$, wenn x_0 „ein wenig" vergrössert wird?

b) Wievielmal so stark wie x_0 ändert sich $f(x_0)$?

c) Wie kann dieses Resultat gedeutet werden?

(2) Was geschieht, wenn x_0 um immer weniger vergrössert wird?

(3) Was geschieht, wenn x „ein wenig" verkleinert wird, und zwar um immer weniger?

(1) Wir bezeichnen die Änderung von x_0 mit Δx, die dadurch bewirkte Änderung des Funktionswertes mit Δf.

a) Der Funktionswert ändert sich um

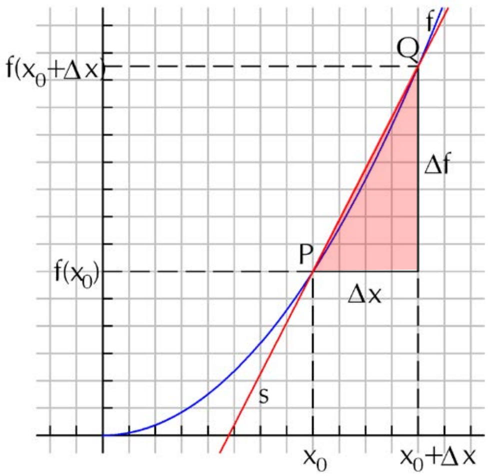
$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

b) Es ist

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

c) Dieses Verhältnis kann als die Steigung derjenigen Geraden s gedeutet werden, welche durch die beiden Punkte $P(x_0,\ f(x_0))$ und $Q(x_0+\Delta x,\ f(x_0)+\Delta f)$ verläuft, denn es gilt

$$\text{Steigung} = \frac{\text{Höhendifferenz}}{\text{Horizontaldistanz}} = \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

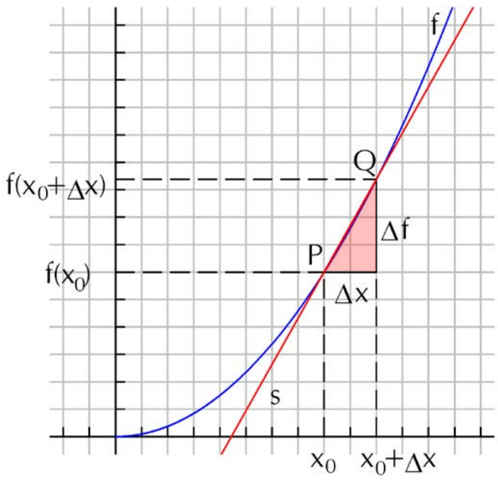


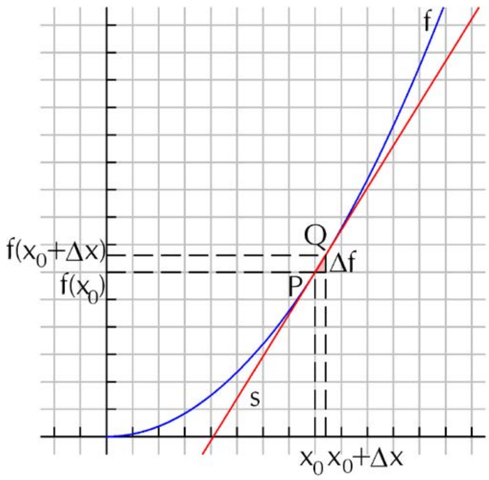
Wenn der Graph von f zwischen P und Q wie in unserem Beispiel nicht stark gekrümmt ist, liegt die Gerade s sehr nahe beim Graphen von f.

(2) Wenn Δx von oben her gegen 0 strebt, rückt Q entlang dem Graphen von f immer näher gegen P heran. Dabei verändert sich auch die Steigung der Geraden s. Die jeweilige Steigung von s ist

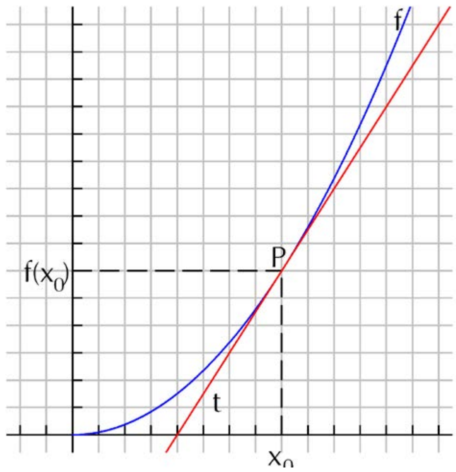
$$m_s = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Nachfolgend ist die Situation für zwei kleinere Werte von Δx dargestellt.





Was geschieht, wenn Δx noch kleiner wird, noch weiter gegen 0 strebt?

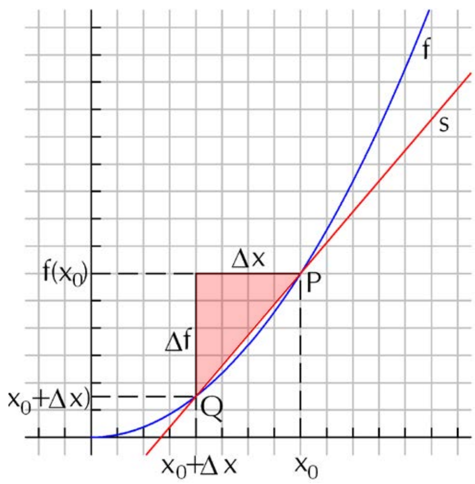


P und Q liegen immer näher beisammen, im Grenzfall $\Delta x=0$ fallen sie sogar zusammen. Dann geht die Gerade s nicht mehr durch zwei Punkte P und Q auf dem Graphen, sondern nur noch durch den Punkt P (der mit Q zusammenfällt).

Der Graph von f wird „normalerweise" von s in zwei Punkten geschnitten, im Grenzfall nur noch in einem Punkt berührt. Also ist die Gerade s „normalerweise" eine Sekante durch zwei Punkte P und Q des Graphen von f, im Grenzfall $\Delta x=0$ hingegen die Tangente t an den Graphen von f im Punkt P. Die Steigung der bei diesem Prozess entstehenden Tangente ist

$$m_t = \lim_{\Delta x \downarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \downarrow 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

(3) Und was passiert, wenn Δx von unten her gegen 0 strebt? Auch dann rückt Q entlang dem Graphen von f immer näher gegen P heran, und die Geraden durch P und Q gehen schliesslich über in eine Tangente t mit der Steigung



$$m_t = \lim_{\Delta x \uparrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \uparrow 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Dabei handelt es sich um dieselbe Tangente, wie wenn Δx von oben her gegen 0 strebt. Der Grund: Beide Tangenten verlaufen durch denselben Punkt P, und ihre Steigungen sind die beiden einseitigen Grenzwerte

$$\lim_{\Delta x \downarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \downarrow 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

und

$$\lim_{\Delta x \uparrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \uparrow 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Diese sind gleich, wie wir beim Beispiel des anfahrenden Autos gesehen haben.

♦

Die Gerade, welche durch die Punkte P und Q des Graphen von f verläuft, bezeichnet man oft als *Sekante*. Entsprechend wird m_s als Sekantensteigung bezeichnet, m_t dagegen als Tangentensteigung.

19.2.4 Zusammenfassung

(1) Das Verhältnis

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

kann als *Steigung m_s der Sekanten s* durch die beiden Punkte $P(x_0, f(x_0))$ und $Q(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$ auf dem Graphen von f gedeutet werden.

(2) Der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

kann als *Steigung m_t der Tangente t* an den Graphen von f im Punkt $P(x_0, f(x_0))$ gedeutet werden.

19.2.5 Beispiel: Abkühlung von Kaffee

Auf der sommerlichen Piazza San Marco in Venedig wird bei 30°C ein frischer Espresso mit 78°C in einer vorgewärmten Tasse serviert. Nach 5 Minuten ist er noch 60°C heiss.

(1) a) Welche Funktion gibt die Temperatur T des Espressos nach t Minuten an?
b) Wie warm ist der Espresso nach $t_0=3$ Minuten?

(2) a) Um wie viel ändert sich die Temperatur, wenn sich der Espresso „etwas" länger als 3 Minuten abkühlt – z. B. 8, 6, 4, 3.1, $3\frac{1}{60}$, 3.001 Minuten anstatt 3 Minuten?
b) Wievielmal so stark wie t ändert sich T(t)?
c) Wie kann man dieses Resultat deuten?
d) Was geschieht für $\Delta t \downarrow 0$?

(3) a) Um wie viel ändert sich die Temperatur, wenn sich der feine Espresso „etwas" weniger lang als 3 Minuten abkühlt, z. B. 0, 2, 2.9, $2\frac{59}{60}$, 2.999 Minuten?
b) Wievielmal so stark wie t ändert sich T(t)?
c) Wie kann man dieses Resultat deuten?
d) Was geschieht für $\Delta t \uparrow 0$?

(1) a) Zur Bestimmung der gesuchten Funktion benötigen wir das Newton[1]'sche Abkühlungsgesetz. Es lautet

$$T(t)=T_U+(T(0)-T_U)\cdot e^{-\alpha\cdot t} \qquad \textbf{[19.1]}$$

Dabei bedeuten:

- $T(t)$ Temperatur des Espressos t Minuten nach dem Servieren in °C
- $T(0)$ Temperatur des Espressos beim Servieren, hier 78°C
- T_U Umgebungstemperatur, hier 30°C
- α Konstante, welche die Abkühlungsgeschwindigkeit beeinflusst. Je grösser α, desto rascher kühlt sich der Espresso ab. α ist zum Beispiel von Form und Material der Tasse abhängig.

Wenn wir alle bekannten Grössen in das Newton'sche Abkühlungsgesetz [19.1] einsetzen, erhalten wir

$$60=30+(78-30)\cdot e^{-\alpha\cdot 5}.$$

[1] Newton Isaac, englischer Mathematiker und Physiker, 4.1.1643 (Woolsthorpe) bis 20./21.3.1727 (Kensington, London)

Diese Gleichung lösen wir nach α auf. Durch Umformen folgt der Reihe nach

$$30=48\cdot e^{-\alpha\cdot 5} \Rightarrow \frac{5}{8}=e^{-5\alpha} \Rightarrow \ln\left(\frac{5}{8}\right)=-5\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha=-\frac{1}{5}\cdot\ln\left(\frac{5}{8}\right)=-\frac{1}{5}\cdot\ln 0.625 \approx 0.094.$$

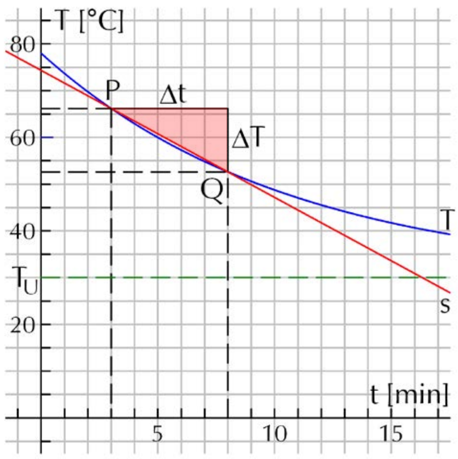
Die Funktion, welche die Abkühlung unseres Espressos beschreibt, ist also

$$T: t \mapsto 30+48\cdot e^{\left(\frac{1}{5}\ln 0.625\right)t}. \qquad \textbf{[19.2]}$$

b) Mit [19.2] berechnen wir

$$T(3)= \ 30+48\cdot e^{\left(\frac{1}{5}\ln 0.625\right)\cdot 3} \approx 66.2051\,°C.$$

(2) a) Rechts ist die Situation für $\Delta t=5$ Minuten dargestellt. Tabelle [19.3] weiter unten enthält die Antworten in der zweithintersten Spalte für $\Delta t=5$ sowie einige weitere Werte.
Natürlich ist die Genauigkeit der unten angegebenen Resultate aus der Sicht des Espressogeniessers und auch eines Experimentalphysikers völlig absurd; die Temperatur kann nicht auf 0.0001°C genau gemessen werden. Aber diese extreme Genauigkeit ist für die Bestimmung des Grenzwertes $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta T}{\Delta t}$ nötig.



Untersuchter Zeitpunkt: $t_0=3$, $T(t_0)\approx 66.2051$°C, von rechts her				
Δt	$t_0+\Delta t$	$T(t_0+\Delta t)$	$\Delta T=T(t_0+\Delta t)-T(t_0)$	$\frac{\Delta T}{\Delta t}$
5	8	52.6282	–13.5769	–2.71538
3	6	57.3085	–8.89659	–2.96553
1	4	62.9568	–3.24824	–3.24824
0.1	3.1	65.8663	–0.338736	–3.38736
1/60	3.016…	66.1484	–0.056773	–3.40064
0.001	3.001	66.2017	–0.003403	–3.40314

[19.3]

b) Die Antworten stehen in der letzten Spalte von Tabelle [19.3].

c) Wie kann man das Verhältnis $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ deuten? Für $\Delta t=5$ lesen wir in der zweithintersten Spalte von Tabelle [19.3] ab, dass sich der Espresso in zusätzlichen 5 Minuten um weitere $\Delta T\approx 13.6$°C abkühlt. Das Verhältnis $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ gibt also an, um wie viel der Espresso in einer Minute durchschnittlich kälter geworden ist: um etwa 2.7°C.
Man kann das als Abkühlungsgeschwindigkeit auffassen. Genauer: Das Verhältnis $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ gibt eine *durchschnittliche Abkühlungsgeschwindigkeit* an; die Tabellenwerte und die Graphik zeigen, dass sich der Espresso zu Beginn des untersuchten Zeitintervalles rascher abkühlt als an dessen Ende.
Für $\Delta t=0.001$ erhält man die *durchschnittliche Abkühlungsgeschwindigkeit* im *Zeitraum* zwischen 3 und 3.001 Minuten, welche schon fast die *momentane Abkühlungsgeschwindigkeit* zum *Zeitpunkt* $t_0=3$ Minuten ist.

d) Tabelle [19.3] entnehmen wir, dass $\lim\limits_{\Delta t\downarrow 0}\frac{\Delta T}{\Delta t}\approx -3.4\ °C/\text{Min.}$ ist. Dies kann als *momentane Abkühlungsgeschwindigkeit* nach exakt 3 Minuten gedeutet werden.

(3) a) Die Antworten stehen in der zweithintersten Spalte der folgenden Tabelle.
b) Die Antworten stehen in der hintersten Spalte der folgenden Tabelle.

Untersuchter Zeitpunkt: $t_0=3$, $T(t_0)\approx 66.2051$°C, von links her				
Δt	$t_0+\Delta t$	$T(t_0+\Delta t)$	$\Delta T=T(t_0+\Delta t)-T(t_0)$	$\frac{\Delta T}{\Delta t}$
−3	0	78.0000	11.7949	−3.93165
−1	2	69.7734	3.56839	−3.56839
−0.1	2.9	66.5470	0.341935	−3.41935
−1/60	2.983…	66.2618	0.056766	−3.40597
−0.001	2.999	66.2085	0.003403	−3.40346

[19.4]

c) Wieder kann das Verhältnis $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ als *durchschnittliche Abkühlungsgeschwindigkeit* in einem bestimmten *Zeitraum* gedeutet werden.

d) Für $\Delta t\uparrow 0$ erhalten wir den linksseitigen Grenzwert $\lim\limits_{\Delta t\uparrow 0}\frac{\Delta T}{\Delta t}\approx -3.4\ °C/\text{Min.}$ Er kann als *momentane Abkühlungsgeschwindigkeit* exakt zum *Zeitpunkt* $t_0=3$ Minuten gedeutet werden.

Weil der rechtsseitige und der linksseitige Grenzwert miteinander übereinstimmen, existiert der Grenzwert $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta T}{\Delta t}\approx -3.4\ °C/\text{Min.}$

♦

19.2.6 Zusammenfassung

(1) Das Verhältnis

$$\frac{\Delta T}{\Delta t}=\frac{T(t_0+\Delta t)-T(t_0)}{\Delta t}$$

kann als *durchschnittliche Abkühlungsgeschwindigkeit* des Espressos im Zeit*raum* zwischen t_0 und $t_0+\Delta t$ Minuten nach dem Servieren gedeutet werden.

(2) Dagegen kann der Grenzwert

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta T}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{T(t_0+\Delta t)-T(t_0)}{\Delta t}$$

als *momentane Abkühlungsgeschwindigkeit* zum Zeit*punkt* t_0 gedeutet werden.

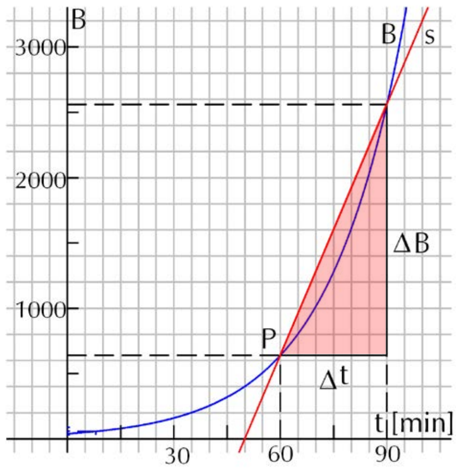
Die Abkühlungsgeschwindigkeit beeinflusst die Eigenschaften vieler Werkstoffe und spielt z. B. bei der Stahlherstellung eine wichtige Rolle. Viele Materialien sind raschen und grossen Temperaturschwankungen unterworfen: das Teeglas, das mit siedendem Wasser gefüllt wird; die Zähne beim gleichzeitigen Genuss von kaltem Eis und heissem Kaffee usw.

19.2.7 Beispiel: Wachstum einer Bakterienkultur

Eine Bakterienkultur umfasst zu Beginn eines Experiments 40 Bakterien und verdoppelt sich anschliessend alle 15 Minuten. Bezeichnet B(t) den Bestand nach t Minuten, so gilt also

$$B(t)=40\cdot 2^{t/15}.$$

Wie gross ist die Wachstumsrate nach $t_0=60$ Minuten?



Unter der Wachstumsrate versteht man den Zuwachs pro Zeiteinheit. Dabei kann es sich um die *mittlere* Wachstumsrate während eines Zeit*raumes* handeln, also

$$\frac{\Delta B}{\Delta t},$$

oder um die *momentane* Wachstumsrate zu einem bestimmten Zeit*punkt*, also

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta B}{\Delta t}.$$

In unserem Fall ist nach der momentanen Wachstumsrate zum Zeitpunkt $t_0=60$ Minuten gefragt. Wie gewohnt untersuchen wir das Verhältnis $\frac{\Delta B}{\Delta t}$ für $\Delta t \downarrow 0$ und für $\Delta t \uparrow 0$. Die Tabellen:

Untersuchter Zeitpunkt: $t_0=60$, $B(t_0)=40 \cdot 2^{60/15}=640$				
Δt	$t_0+\Delta t$	$B(t_0+\Delta t)$	$\Delta B=B(t_0+\Delta t)-B(t_0)$	$\frac{\Delta B}{\Delta t}$
30	90	2560.00000	1920.00000	64
15	75	1280.00000	640.000000	42.6666667
1	61	670.268239	30.2682386	30.2682386
0.01	60.01	640.295811	0.295811139	29.5811139
0.0001	60.0001	640.002957	0.002957435	29.5743484

Dabei sind wir unrealistischerweise davon ausgegangen, dass sich die Bakterien mit absoluter Präzision an die angegebene Formel halten.

Untersuchter Zeitpunkt: $t_0=60$, $B(t_0)= 40 \cdot 2^{60/15}=640$				
Δt	$t_0+\Delta t$	$B(t_0+\Delta t)$	$\Delta B=B(t_0+\Delta t)-B(t_0)$	$\frac{\Delta B}{\Delta t}$
–30	30	160.000000	–480.0000000	16.0000000
–15	45	320.000000	–320.0000000	21.3333333
–1	59	611.098627	–28.90137350	28.9013735
–0.01	59.99	639.704326	–0.295674476	29.5674476
–0.0001	59.9999	639.997043	–0.002957421	29.5742116

Resultat: Zum Zeitpunkt $t_0=60$ Minuten liegt die Wachstumsrate bei ca. 29.6 Bakterien pro Minute.

♦

19.2.8 Zusammenfassung

(1) Das Verhältnis

$$\frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{B(t_0+\Delta t)-B(t_0)}{\Delta t}$$

kann als *durchschnittliche Wachstumsrate* der Bakterienkultur im Zeit*raum* zwischen t_0 und $t_0+\Delta t$ Minuten nach Beginn des Experiments gedeutet werden.

(2) Dagegen kann der Grenzwert

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta B}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{B(t_0+\Delta t)-B(t_0)}{\Delta t}$$

als *momentane Wachstumsrate* zum Zeit*punkt* t_0 gedeutet werden.

19.3 Zusammenfassung der Beispiele und Definitionen

Wir haben anhand verschiedener Beispiele die Frage „wievielmal so stark wie x ändert sich der Funktionswert f(x)?" studiert. Dazu haben wir Verhältnisse der Form

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}, \frac{\Delta f}{\Delta x}, \frac{\Delta T}{\Delta t} \text{ und } \frac{\Delta B}{\Delta t}$$

untersucht. Stets ging es um Änderungen in einem Zeit*raum* oder in einem *Intervall*, und stets konnten diese Verhältnisse praktisch gedeutet werden: als *durchschnittliche* Geschwindigkeit eines anfahrenden Autos, als Steigung einer *Sekanten*, als *durchschnittliche* Abkühlungsgeschwindigkeit oder als *durchschnittliche* Wachstumsrate. Diese Verhältnisse werden mit einer allgemeinen Bezeichnung versehen: *„Differenzenquotient"* – eben deshalb, weil es sich stets um einen Quotienten, also ein Verhältnis zweier Differenzen handelt.

Indem wir die Differenz im Nenner gegen 0 streben liessen, erhielten wir jeweils einen Grenzwert, nämlich

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}, \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta t} \text{ oder } \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta B}{\Delta t}$$

der über *momentane* Änderungen Auskunft gab: *momentane* Geschwindigkeit, *Tangentensteigung*, *momentane* Abkühlungsgeschwindigkeit, *momentane* Wachstumsrate. Immer ging es um Änderungen zu einem Zeit*punkt* oder in einem *Punkt*. Der Sammelbegriff für diese Grenzwerte ist *„Differentialquotient"* oder *„(erste) Ableitung""*.

Beispiel	untersuchte Funktion	untersuchtes Verhältnis Deutung	untersuchter Grenzwert Deutung
anfahrendes Auto	$s: t \mapsto 1.5 \cdot t^2$	$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$ *durchschnittliche* Geschwindigkeit im Zeit*raum* $[t_0, t_0+\Delta t]$.	$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$ *momentane* Geschwindigkeit zum Zeit*punkt* t_0
Graph einer Funktion	$f: x \mapsto 1.5 \cdot x^2$	$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ *Steigung der Sekanten* durch die beiden Punkte $P(x_0, f(x_0))$ und $Q(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$ auf dem Graphen von f	$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ *Steigung der Tangente* an den Graphen von f *im Punkt* $P(x_0, f(x_0))$
Abkühlung von Kaffee	$T: t \mapsto 30+48 \cdot e^{-0.094t}$	$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{T(t_0+\Delta t)-T(t_0)}{\Delta t}$ *durchschnittliche* Abkühlungsgeschwindigkeit im Zeit*raum* $[t_0, t_0+\Delta t]$	$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{T(t_0+\Delta t)-T(t_0)}{\Delta t}$ *momentane* Abkühlungsgeschwindigkeit zum Zeit*punkt* t_0
Wachstum einer Bakterienkultur	$B: t \mapsto 40 \cdot 2^{t/15}$	$\frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{B(t_0+\Delta t)-B(t_0)}{\Delta t}$ *durchschnittliche* Wachstumsrate im Zeit*raum* $[t_0, t_0+\Delta t]$	$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta B}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{B(t_0+\Delta t)-B(t_0)}{\Delta t}$ *momentane* Wachstumsrate zum Zeit*punkt* t_0.
Allgemeine Bezeichnungen	$f: x \mapsto y$	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ *Differenzenquotient*	$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ *Differentialquotient, (erste) Ableitung von f an der Stelle x_0*

19.3.1 Definitionen

Es sei f: $x \mapsto y$ eine Funktion und x_0 gehöre zum Definitionsbereich von f.

(1) Das Verhältnis

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

heisst *Differenzenquotient von f für das Intervall* $[x_0,\ x_0+\Delta x]$.

(2) Wenn der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

existiert, heisst f *differenzierbar an der Stelle* x_0.

(3) Wenn die Funktion f an jeder Stelle des Definitionsbereiches differenzierbar ist, heisst f *differenzierbar*.

(4) Der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

heisst *Differentialquotient von f an der Stelle* x_0 oder auch *(erste) Ableitung von f an der Stelle* x_0.

Bezeichnungen: $\frac{dy}{dx}(x_0)$, $\frac{d}{dx}f(x_0)$ oder $f'(x_0)$.

19.3.2 Bemerkungen

- $\frac{dy}{dx}$ wird als „dy nach dx“ ausgesprochen. $\frac{dy}{dx}$ ist *kein* Bruch, sondern einfach eine Schreibweise. Sie erweist sich in vielen Situationen als praktisch, denn oft verhält sich $\frac{dy}{dx}$ tatsächlich *wie* ein Bruch. Die Terme dx und dy heissen *Differentiale*, was die Bezeichnung „Differentialquotient“ erklärt. Interessierte finden in Abschnitt 19.7 mehr über Differentiale.
- Bei manchen Beispielen haben wir Funktionen untersucht, deren Wert von der Zeit t abhängt: s(t), T(t) und B(t). Dann erhält man beim Ableiten die Differentialquotienten oder Ableitungen $s'(t_0)$, $T'(t_0)$, $B'(t_0)$. In diesem Fall sagt man, man habe „nach der Zeit abgeleitet“ und schreibt – vor allem in der Physik – die entsprechenden Ableitungen oft auch mit Punkten anstatt mit Strichen: $\dot{s}(t_0)$, $\dot{T}(t_0)$ bzw. $\dot{B}(t_0)$.
- Die verschiedenen Bezeichnungen für die Ableitung von f sind historisch zu erklären. Newton und Leibniz[2] entwickelten in der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts etwa gleichzeitig, jedoch auf verschiedenen Wegen, die Differentialrechnung und die im Band *Analysis 5* behandelte Integralrechnung. Es entwickelte sich ein langer Streit, wer zuerst welche Erkenntnisse gewonnen hatte.
  Leibniz befasste sich mit dem Problem der Tangentensteigung und entwickelte die Schreibweise $\frac{dy}{dx}$. Newton hingegen untersuchte physikalische Probleme und verwendete die Schreibweisen mit Strichen und Punkten: y' und $\dot{s}$. Heute sind beide Notationen geläufig.

[2] Leibniz Gottfried Wilhelm, deutscher Universalgelehrter, 1.7.1646 (Leipzig) bis 14.11.1716 (Hannover)

19.4 Was bedeutet Differenzierbarkeit anschaulich?

Eine Funktion f ist an einer Stelle x_0 ihres Definitionsbereiches differenzierbar, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ existiert. Das bedeutet, dass der linksseitige Grenzwert $\lim\limits_{\Delta x \uparrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ und der rechtsseitige Grenzwert $\lim\limits_{\Delta x \downarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ existieren, miteinander übereinstimmen und endlich sind.

Wenn eine Funktion an der Stelle x_0 *nicht* differenzierbar ist, dann muss also eine dieser Bedingungen verletzt sein.

19.4.1 Beispiele: Links- und rechtsseitiger Grenzwert existieren, sind aber verschieden.

(1) Konstruieren Sie eine Funktion f, die an der Stelle $x_0=0$ aus diesem Grund nicht differenzierbar ist.

(2) Sind die folgenden Funktionen an der Stelle $x_0=0$ differenzierbar oder nicht?

a) $g: x \mapsto |x|$ b) $h: x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{9}x^2, \text{ falls } x \le 0 \\ \frac{1}{10}x, \text{ falls } x > 0 \end{cases}$ c) $i: x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x+\frac{1}{4}}, \text{ falls } x \ge 0 \\ \sqrt{-x+\frac{1}{4}}, \text{ falls } x < 0 \end{cases}$

(1) Wir nehmen willkürlich an, f(0) sei 0, der linksseitige Grenzwert $\lim\limits_{\Delta x \uparrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ sei −2, der rechtsseitige Grenzwert $\lim\limits_{\Delta x \downarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ sei $\frac{1}{3}$. Wichtig ist nur, dass die beiden einseitigen Grenzwerte nicht übereinstimmen.

Also gilt einerseits

$$\lim_{\Delta x \uparrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \uparrow 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \uparrow 0} \frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \uparrow 0} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} = -2,$$

anderseits

$$\lim_{\Delta x \downarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \downarrow 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \downarrow 0} \frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \downarrow 0} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} = \frac{1}{3}.$$

Im ersten Fall folgt aus

$$\lim_{\Delta x \uparrow 0} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} = -2,$$

dass

$$\lim_{\Delta x \uparrow 0} f(\Delta x) = \lim_{\Delta x \uparrow 0} -2 \cdot \Delta x$$

sein muss. Es gibt unendlich viele Funktionen, welche diese Bedingung erfüllen, weil der linksseitige Grenzwert nur eine Aussage über die „unmittelbare Umgebung links“ des Punktes (0, 0) macht; was in grösserer Entfernung passiert, ist nicht festgelegt. Eine besonders einfache Funktion, welche die Bedingung

$$\lim_{\Delta x \uparrow 0} f(\Delta x) = \lim_{\Delta x \uparrow 0} -2 \cdot \Delta x$$

sicher erfüllt, ist

$$f: x \mapsto -2x \text{ für } x \le 0. \qquad \textbf{[19.5]}$$

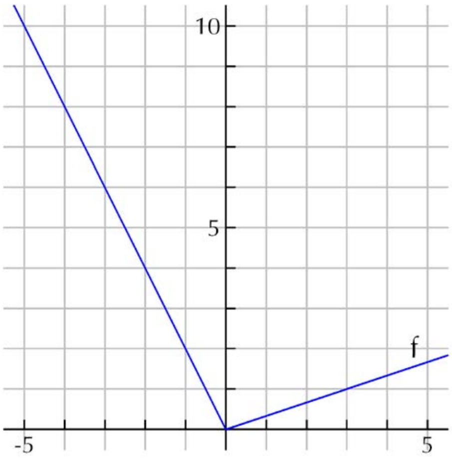
Im zweiten Fall folgt aus $\lim\limits_{\Delta x \downarrow 0} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} = \frac{1}{3}$, dass $\lim\limits_{\Delta x \downarrow 0} f(\Delta x) = \lim\limits_{\Delta x \downarrow 0} \frac{1}{3} \cdot \Delta x$ gelten muss. Wie vorhin überlegen wir uns: Eine besonders einfache Funktion, welche diese Bedingung erfüllt, ist

$$f\colon x \mapsto \tfrac{1}{3}x \text{ für } x>0. \qquad \textbf{[19.6]}$$

Nun setzen wir die gefundenen Teilfunktionen [19.5] für $x \le 0$ und [19.6] für $x>0$ zusammen:
Die Funktion

$$f : x \mapsto \begin{cases} -2x, \text{ falls } x \le 0 \\ \frac{1}{3}x, \text{ falls } x > 0 \end{cases}$$

ist an der Stelle $x_0=0$ nicht differenzierbar, weil dort der linksseitige Grenzwert und der rechtsseitige Grenzwert nicht übereinstimmen. Ihr Graph ist rechts abgebildet. Man erkennt, dass die Funktion f an der Stelle $x_0=0$ zwar stetig ist, aber dort einen „Knick" hat.



Die eben konstruierte Funktion f ist also überall differenzierbar – ausser an der Stelle $x_0=0$. Für alle $x_0<0$ ist die Ableitung $f'(x_0)=-2$, für alle $x_0>0$ ist $f'(x_0)=\frac{1}{3}$.

Anschaulich: Eine Funktion f ist an einer Stelle x_0 *nicht* differenzierbar, wenn der Graph von f dort einen „Knick" hat.

(2) a) Bei der Funktion

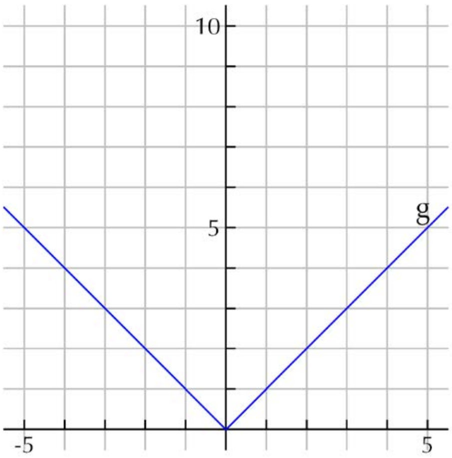
$$g : x \mapsto |x| = \begin{cases} x, \text{ falls } x \ge 0 \\ -x, \text{ falls } x < 0 \end{cases}$$

beträgt der linksseitige Grenzwert an der Stelle $x_0=0$

$$\lim_{\Delta x \uparrow 0} \frac{g(\overbrace{x_0 + \Delta x}^{<0}) - g(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \uparrow 0} \frac{-\Delta x - 0}{\Delta x} = -1,$$

der rechtsseitige Grenzwert dagegen

$$\lim_{\Delta x \downarrow 0} \frac{g(\overbrace{x_0 + \Delta x}^{>0}) - g(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \downarrow 0} \frac{\Delta x - 0}{\Delta x} = 1.$$



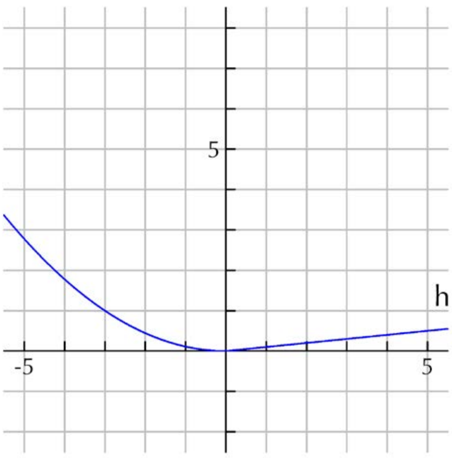
Also ist g an der Stelle $x_0=0$ *nicht* differenzierbar, weil die beiden einseitigen Grenzwerte verschieden sind.

b) Weniger offensichtlich ist die Knickstelle der Funktion h an der Stelle $x_0=0$. Aber der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert sind verschieden. Der linksseitige Grenzwert ist:

$$\lim_{\Delta x \uparrow 0} \frac{h(\overbrace{x_0 + \Delta x}^{<0}) - h(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \uparrow 0} \frac{\frac{1}{9}\Delta x^2 - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \uparrow 0} \tfrac{1}{9}\Delta x = 0,$$

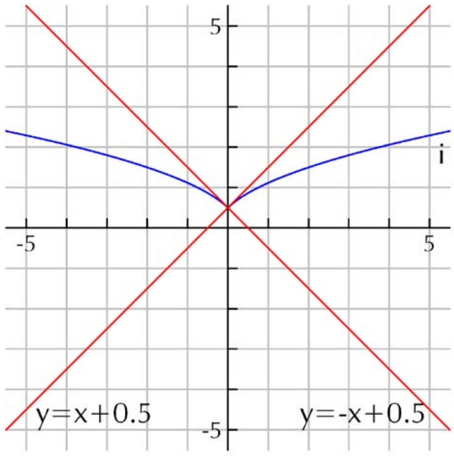
der rechtsseitige Grenzwert dagegen

$$\lim_{\Delta x \downarrow 0} \frac{h(\overbrace{x_0 + \Delta x}^{>0}) - h(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \downarrow 0} \frac{\frac{1}{10}\Delta x - 0}{\Delta x} = \frac{1}{10}.$$



Selbst wenn der Unterschied zwischen den beiden einseitigen Grenzwerten noch viel kleiner wäre – einfach nicht exakt gleich 0 –, wäre doch eine Knickstelle vorhanden und die Funktion dort nicht differenzierbar. An allen Stellen ausser $x_0=0$ ist h aber differenzierbar.

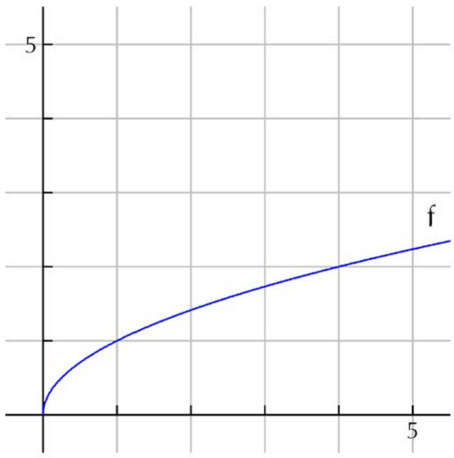
c) Die erste Ableitung in einem Punkt P kann als Steigung der Tangente in diesem Punkt gedeutet werden. Rechts sind die Tangenten an die beiden Kurvenstücke eingezeichnet. Weil die beiden Tangenten nicht dieselbe Steigung haben – die eine Steigung ist +1, die andere –1 – stimmen auch der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert nicht miteinander überein. Dasselbe Resultat erhält man beim rechnerischen „Herantasten" an den Grenzwert.



♦

19.4.2 Beispiele: Der Grenzwert existiert nicht, weil er nicht endlich ist.
Sind die folgenden Funktionen an der Stelle $x_0=0$ differenzierbar oder nicht?
(1) $f: x \mapsto \sqrt{x}$ (2) $g: x \mapsto \sqrt{|x|}$

(1) Der linksseitige Grenzwert existiert nicht, denn $\sqrt{x}$ ist für $x<0$ nicht definiert; wir können uns deshalb nicht von links her gegen 0 herantasten. Beim rechtsseitigen Grenzwert sieht es anders aus:



Untersuchte Stelle: $x_0=0$, $f(x_0)=0$		
Δx	$\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$	$\frac{\Delta f}{\Delta x}$
1	1	1
0.01	0.1	10
0.0001	0.01	100
0.000001	0.001	1000
10^{-36}	10^{-18}	10^{18}

Man erkennt, dass der Differenzenquotient $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ über alle Massen wächst, wenn Δx gegen 0 strebt. Weil die Folge der Differenzenquotienten nicht gegen eine bestimmte Zahl strebt, sondern gegen ∞, existiert der rechtsseitige Grenzwert nicht. Also existiert auch die Ableitung $f'(0)$ nicht.

Die Tatsache, dass die Folge der Differenzenquotienten gegen unendlich strebt, bedeutet geometrisch, dass die Tangente an den Graphen von f im Punkt (0, 0) senkrecht verläuft.

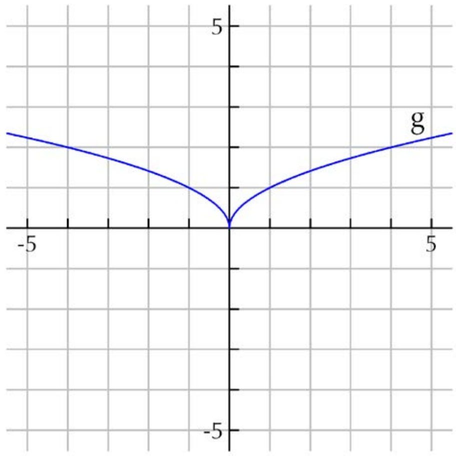
Anschaulich: Eine Funktion f ist an einer Stelle x_0 *nicht* differenzierbar, wenn die Tangente bei der Stelle x_0 an den Graphen von f senkrecht verläuft.

In unserem Beispiel fällt die Tangente gerade mit der y-Achse zusammen. Aber die Tangenten*steigung* ist nicht definiert – allenfalls wäre sie $+\infty$ oder $-\infty$. Es ist also möglich, dass an einer gewissen Stelle wohl die Tangente existiert, nicht aber die Ableitung!

(2) Die Funktion

$$g: x \mapsto \sqrt{|x|}$$

ist an der Stelle $x_0=0$ sogar aus zwei Gründen nicht differenzierbar: Dort ist eine Knickstelle, und die Tangente an den Graphen von g im Punkt (0, 0) ist die senkrecht verlaufende y-Achse.



♦

Es besteht auch ein Zusammenhang zwischen der Differenzierbarkeit einer Funktion an einer bestimmten Stelle und der Stetigkeit an dieser Stelle.

19.4.3 Satz

Jede Funktion f, die an einer gewissen Stelle x_0 differenzierbar ist, ist dort auch stetig.

Beweis

Weil f an der Stelle x_0 differenzierbar ist, existiert dort der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A,$$

wobei A eine endliche Zahl ist. Wir multiplizieren diese Gleichung mit Δx und erhalten

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} A \cdot \Delta x.$$

Für $\Delta x \to 0$ strebt die rechte Seite gegen 0:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Das ist aber gerade die Bedingung, die wir bei Definition 18.4.1 für die Stetigkeit von f angegeben haben.

■

Dieser Satz besagt umgekehrt, dass eine Funktion, die an der Stelle x_0 unstetig ist, dort sicher nicht differenzierbar sein kann. (Wäre sie nämlich differenzierbar, müsste sie gemäss Satz 19.4.3 stetig sein.)

19.4.4 Zusammenfassung

Eine Funktion f ist an der Stelle x_0 *nicht* differenzierbar, wenn …
… der Graph dort *einen Knick* hat oder
… der Graph dort *eine senkrechte Tangente* hat oder
… der Graph dort *unstetig ist*, also z. B. *einen Sprung* macht.

19.5 Graphische Bestimmung der Ableitung $f'(x_0)$

Bisher haben wir den Wert der Ableitung $f'(x_0)$ rechnerisch durch „Herantasten" an den Grenzwert bestimmt. Wenn man wie in Beispiel 19.2.3 die Ableitung als Tangentensteigung deutet, eröffnet sich auch eine graphische Möglichkeit: Man zeichnet an der gewünschten Stelle die Tangente an den Graphen von f ein und bestimmt mithilfe eines Steigungsdreiecks deren Steigung.

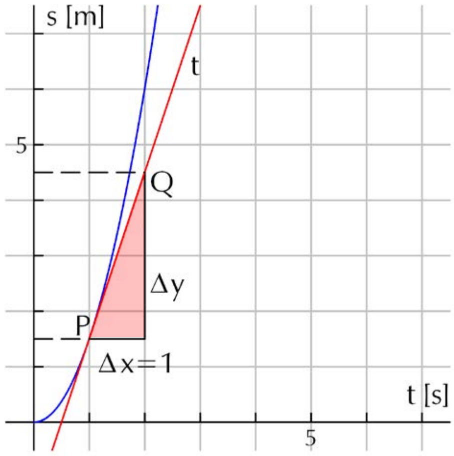
19.5.1 Beispiele

(1) Wie schnell fährt das anfahrende Autos nach einer Sekunde (siehe Beispiel 19.2.1)?

(2) Welches ist die Abkühlungsgeschwindigkeit des Espressos von Beispiel 19.2.5 nach 3 Minuten?

(1) Hier geht es um die Funktion

$$s: t \mapsto 1.5t^2.$$



Wir zeichnen im Punkt P(1, 1.5) des Graphen von s die Tangente t möglichst genau ein. Dann ergänzen wir ein Steigungsdreieck der Tangente t. Besonders bequem wird die Berechnung der Ableitung, wenn $\Delta x=1$ ist. Die waagrechte Kathete des Steigungsdreiecks verläuft in diesem Fall zwischen den beiden Punkten P und (2, 1.5), die senkrechte Kathete zwischen dem Punkt (2, 1.5) und dem Punkt Q(2, …) *auf der Tangente t*. Durch Ausmessen findet man

$$\Delta y=4.5-1.5=3.$$

Also ist die Momentangeschwindigkeit des anfahrenden Autos nach 1 Sekunde gleich der Steigung der Tangenten t, nämlich

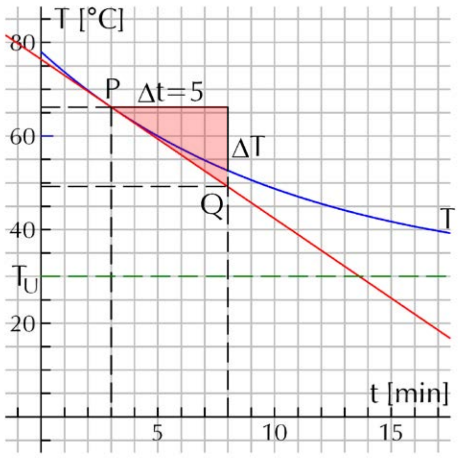
$$m_t=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3}{1}=3 \text{ m/s}.$$

(2) Wir zeichnen im Punkt P(3, …) die Tangente an den Graphen der Funktion T. Um die Tangentensteigung mit einigermassen brauchbarer Genauigkeit zu erhalten, wählen wir beim Steigungsdreieck Δt nicht 1, sondern grösser, zum Beispiel $\Delta t=5$, und zeichnen die waagrechte und die senkrechte Kathete des Steigungsdreiecks ein. Für ΔT finden wir ungefähr

$$49°C - 66°C = -17°C,$$

und für die momentane Abkühlungsgeschwindigkeit nach genau 3 Minuten

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} \approx \frac{-17°C}{5\text{min}} \approx -3.4°C/\text{min}.$$



♦

19.5.2 Bemerkungen

(1) Es ist äusserst wichtig, dass der Punkt Q auf der Tangente t liegt und nicht auf dem untersuchten Graphen. (Wenn Q auf dem untersuchten Graphen läge, würde man die Steigung einer Sekanten, d. h. einen Differenzenquotienten, berechnen anstatt die gesuchte Steigung der Tangente, d. h. den Differentialquotienten.)

(2) Oben haben wir zur Berechnung der Ableitung einfach das Verhältnis

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3}{1}=3\,\text{m/s}$$

gebildet. Aber die Ableitung ist als Grenzwert $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ definiert. Wo ist der Grenzwert geblieben? Er wurde berücksichtigt, indem wir die Tangentensteigung berechnet haben und nicht eine Sekantensteigung.

(3) Diese Methode steht und fällt mit der Genauigkeit, mit welcher der Graph und vor allem die Tangente gezeichnet wird. Wenn man am exakten Wert der Ableitung interessiert ist, liefert diese graphische Methode nur bedingt brauchbare Resultate. Trotzdem werden wir noch ab und zu auf diese Methode zurückgreifen, weil sie mit wenig Aufwand *qualitativ* gute Aussagen ermöglicht.

19.6 Ergänzung: Rechnerische Bestimmung der Ableitung $f'(x_0)$

Oft haben wir die Ableitung $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ bestimmt, indem wir für Δx verschiedene, immer näher bei 0 liegende Werte eingesetzt und die Entwicklung der Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ beobachtet haben. Wozu dieser Aufwand? Reicht es nicht, einfach einen „winzigen" Wert für Δx einzusetzen und das Resultat des Taschenrechners oder Computers auf die nächste „schöne" Zahl zu runden?

Zur Beantwortung dieser Frage greifen wir nochmals Beispiel 19.2.7 (Bakterienvermehrung) mit der Funktion $B: t \mapsto 40 \cdot 2^{t/15}$ auf und fügen noch einige Zeilen an:

Untersuchter Zeitpunkt: $t_0=60$, $B(t_0)=640$		
Δt	$\Delta B = B(t_0+\Delta t) - B(t_0)$	$\frac{\Delta B}{\Delta t}$
1	30.268 238 605	30.2682386
0.01	0.295 811 138 68	29.5811139
0.000 1	0.002 957 434 84	29.5743484
0.000 001	0.000 029 574 32	29.5743200
0.000 000 01	0.000 0002 957 6	29.5760000
0.000 000 000 1	0.000 000 029 60	29.6000000
0.000 000 000 01	0.000 000 000 32	32.0000000
0.000 000 000 001	0.000 000 000 04	40.0000000
0.000 000 000 000 1	0.000 000 000 00	0.00000000
0.000 000 000 000 01	0.000 000 000 00	0.00000000

Man erkennt, dass die Differenzenquotienten zunächst immer näher gegen ca. 29.574 streben, sich dann aber plötzlich wieder von dieser Zahl entfernen und schliesslich nur noch den Wert 0 annehmen. Was ist hier los?

Hier zeigen sich zwei einander entgegengesetzte Wirkungen:

- Weil wir untersuchen, was für $\Delta t \to 0$ passiert, gilt sicher diese Regel: Je näher Δt bei 0 liegt, desto näher liegt der Differenzenquotient beim gesuchten Differentialquotienten.
- Theoretisch stimmt das. Aber in der Praxis arbeiten alle Taschenrechner und Computer mit einer beschränkten internen Genauigkeit, sagen wir einmal mit insgesamt 14 Stellen. Die letzten Ziffern werden oft nicht angezeigt, weil sie mit den unvermeidlichen Rundungsfehlern behaftet sind. Wenn man nun zwei Zahlen voneinander abzählt, die sehr nahe beieinander liegen, kann es passieren, dass man nicht mehr mit zuverlässigen Zahlen rechnet, sondern nur noch mit Rundungsfehlern.

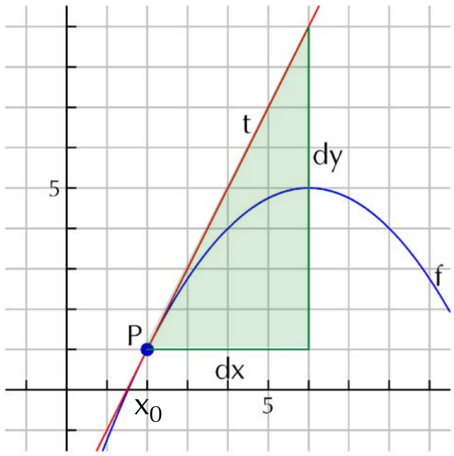
  Für $\Delta t=10^{-13}$ beispielsweise ist $t_0+\Delta t$ = 60.000 000 000 000 1. Diese Zahl kann von einem mit nur 14 Stellen arbeitenden Rechner nicht mehr exakt dargestellt werden, er wird sie deshalb auf 60.000 000 000 000 = 60 runden. Also ist in diesem Fall für den

Taschenrechner oder Computer $t_0+\Delta t$ dasselbe wie t_0. Zwangsläufig werden dann auch $\Delta B = 0$ und $\dfrac{\Delta B}{\Delta t} = 0$.

Bei welchen Werten von Δt oder Δx macht sich dieses Problem stark bemerkbar? Dies hängt von der untersuchten Funktion und von der Genauigkeit des Taschenrechners oder Computers ab. Eine allgemeingültige Aussage ist deshalb nicht möglich. Durch das „Herantasten" wird aber sichergestellt, dass man das Problem erkennen kann. Damit kann der gesuchte Differentialquotient – in diesem Beispiel übrigens 29.5742797 – zuverlässiger abgeschätzt werden.

19.7 Ergänzung: Die Differentiale dx und dy

In Bemerkung 19.3.2 wurden die Differentiale dx und dy erwähnt. Zur Erinnerung: $\dfrac{dy}{dx}(x_0)$ ist eine andere Schreibweise für $f'(x_0)$. Was hat es mit den beiden Differentialen dx und dy auf sich? Dazu betrachten wir die Tangente t an den Graphen einer Funktion f.



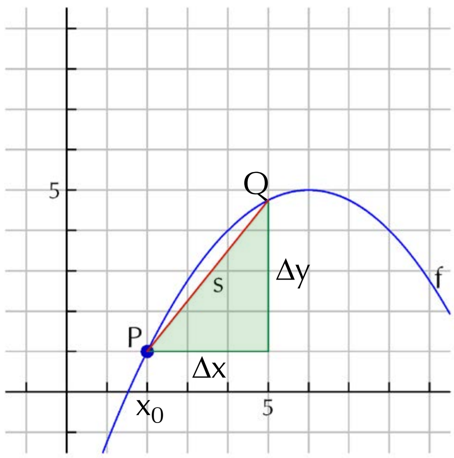
- Einerseits ist ihre Steigung $m_t=f'(x_0)$.
- Anderseits können wir an die Tangente t ein *beliebiges* Steigungsdreieck einzeichnen; seine Seiten nennen wir dx und dy. Dann gilt $m_t = \dfrac{dy}{dx}$.

Fassen wir beide Überlegungen zusammen, finden wir

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx} \text{ bzw. } dy = f'(x_0) \cdot dx .$$

Diese Formel gilt für *jedes* Steigungsdreieck der Tangente t. Es spielt also keine Rolle, ob dx und dy kurze oder lange Dreiecksseiten sind; nur das Verhältnis ist wichtig.

Was ist der Unterschied zwischen dx und dy einerseits, Δx und Δy anderseits?



Wieder betrachten wir den Graphen von f, zeichnen diesmal aber eine Sehne s ein. Die Endpunkte P und Q der Sehne auf dem Graphen von f bestimmen ein Steigungsdreieck mit den Seiten Δx und Δy. Deren Verhältnis ist gleich der Steigung der Sehne s:

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Das Verhältnis $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ist nur eine *Näherung* an die Tangentensteigung $f'(x_0)$. Das Verhältnis $\dfrac{dy}{dx}$ hingegen liefert die *exakte* Tangentensteigung.

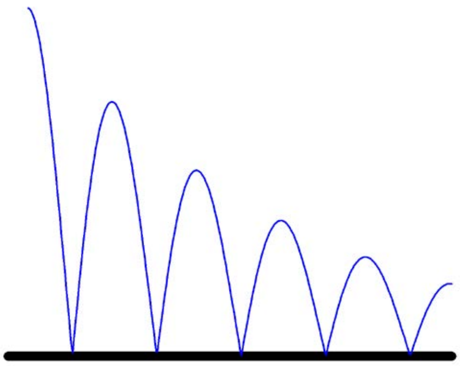
Wir verzichten an dieser Stelle auf die vertiefte Untersuchung von Differentialen und verweisen stattdessen auf die weiterführende Fachliteratur zu diesem Thema.

19.8 Ergänzung: (Nicht) differenzierbare Funktionen in der Praxis

Wir haben in Abschnitt 19.4 gesehen, dass eine Funktion f an der Stelle x_0 *nicht* differenzierbar ist, wenn …
… der Graph dort *einen Knick* hat oder
… der Graph dort *eine senkrechte Tangente* hat oder
… der Graph dort *einen Sprung* macht oder *oszilliert*, die Funktion f dort also *unstetig* ist.

19.8.1 Beispiel
Wo ist die Flugbahn eines springenden Balls differenzierbar, wo ist sie es nicht?

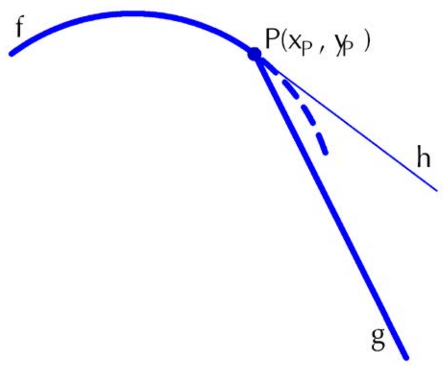
Die Flugbahn eines springenden Balles ist überall differenzierbar – ausser an denjenigen Stellen, wo der Ball auf dem Boden aufprallt und wieder aufspringt. Gleiches gilt für die Sprungbahn eines davonhoppelnden Hasen. Weil die Sprunghöhe rasch abnimmt, ist anzunehmen, dass es sich um einen rasch ermüdenden Hasen handelt.



♦

19.8.2 Beispiel
Wo spielt Differenzierbarkeit beim Gleisbau eine Rolle?

Beim Übergang zwischen einem geraden Gleisstück und einem Kurvenstück treffen die Graphen zweier Funktionen aufeinander, von denen eine linear ist, die andere nicht. Dieser Übergang muss an der „Nahtstelle" knickfrei sein, weil die Räder des Zuges die Richtung nicht in Nullkommanichts ändern können.



Rechts stellt die dicke Linie ein Gleis dar, das an der Nahtstelle P einen Knick aufweist. Die knickfreie Fortsetzung der Funktion f im Punkt P wäre die Funktion h, welche mit der Tangente an den Graphen von f im Punkt P übereinstimmt.
Damit die Graphen zweier Funktionen f und g im Punkt P knickfrei aneinander anschliessen, müssen zwei Bedingungen erfüllt sein:

$$f(x_P)=g(x_P) \text{ und } f'(x_P)=g'(x_P).$$

Die erste Bedingung stellt sicher, dass die beiden Graphen im Punkt P überhaupt zusammentreffen, und die zweite Bedingung garantiert, dass die Graphen mit derselben Richtung aufeinander treffen – also knickfrei.
Die beiden folgenden Fotografien illustrieren, dass der Übergang zwischen dem geraden Stück und der Kurve knickfrei ist. Auf der Fotografie links ist die ganze Kurve zu sehen, auf der Fotografie rechts befand sich die Kamera genau über einer Schiene. Kleinste Knicke müssten so zu erkennen sein. Das sind sie aber nicht – was den Reisekomfort der Passagiere spürbar erhöht. Die Bedingung der Knickfreiheit muss auch bei einer Weiche erfüllt sein.

Die Aufnahme links entstand in der Nähe des Bahnhofs Leuggelbach GL. Man erkennt in der Bildmitte den Regionalzug Linthal–Rapperswil und im Hintergrund den Tödi, dessen markanter eisbedeckter Gipfel 3'614 m über dem Meeresspiegel liegt – ziemlich genau 3'000 Meter über dem Talboden.
Die Aufnahme rechts entstand beim Bahnhof Luchsingen-Hätzingen GL. Weil der Übergang von den geraden Gleisen zu den gekrümmten Gleisen knickfrei verläuft, ist der Kurvenanfang fast nicht auszumachen.

♦

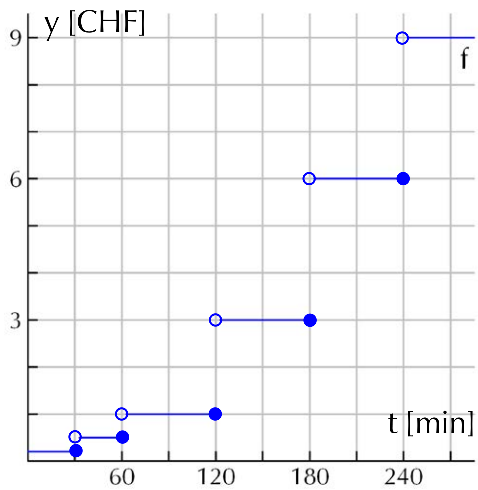
19.8.3 Beispiel
Wo spielt Differenzierbarkeit bei den im Parkhaus zu bezahlenden Gebühren eine Rolle?

Dieses Beispiel haben wir schon im Band *Analysis 3* bei der Stetigkeit von Funktionen untersucht. Die Gebühren, die in einem Parkhaus zu bezahlen sind, richten sich nach der Dauer t des Parkierens. Der Tarif ist in der Tabelle rechts angegeben.

Parkierdauer t [Min.]	Gebühr y [CHF]
$0 < t \le 30$	0.20
$30 < t \le 60$	0.50
$60 < t \le 120$	1.00
$120 < t \le 180$	3.00
jede weitere ganze oder begonnene Stunde	3.00

f sei die Funktion, welche einer Parkdauer t die zu bezahlende Gebühr y zuordnet.

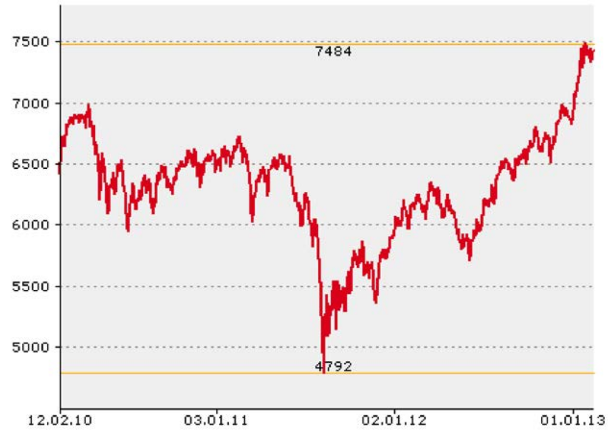
Ihr Graph ist nebenan abgebildet. Zu den Zeitpunkten t=30, t=60, t=120, t=180, t=240, t= 300, … ist die Funktion f unstetig, sonst ist sie überall stetig. Diese Funktion f ist an den Unstetigkeitsstellen gemäss Satz 19.4.3 nicht differenzierbar. An allen anderen Stellen ist f aber differenzierbar, und der Wert der Ableitung ist 0.

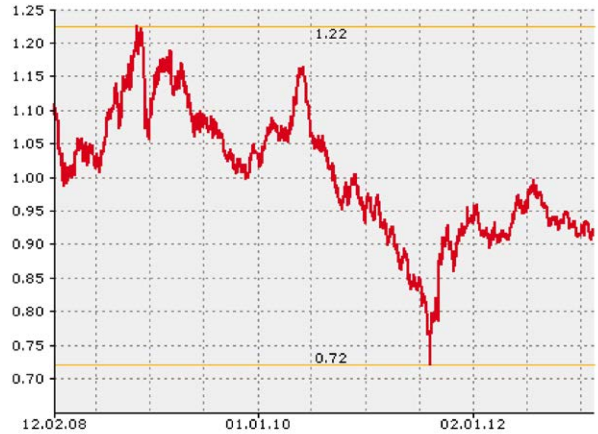


♦

19.8.4 Beispiel
Wo spielt Differenzierbarkeit bei Aktienindizes und Wechselkursen eine Rolle?

Auch diese Beispiele haben wir schon im Band *Analysis 3* bei der Stetigkeit von Funktionen untersucht.
Verbindet man je zwei benachbarte Werte des SMI-Aktienindexes durch eine gerade Linie, erhält man eine Funktion wie die rechts abgebildete. Obwohl der Graph wild gezackt ist, ist die Funktion an jeder Stelle stetig.
Aber dort, wo der Graph einen Knick hat, ist die Funktion nicht differenzierbar. Das ist bei allen „Zacken" der Fall!
Ganz ähnlich sieht der Graph derjenigen Funktion aus, welche zu einem bestimmten Zeitpunkt t den dann gültigen Wechselkurs des US-Dollars gegenüber dem Schweizerfranken angibt. Auch diese Funktion ist trotz der vielen „Zacken" ihres Graphen an jeder Stelle stetig, aber wegen der „Zacken" an vielen Stellen nicht differenzierbar.
[Quelle der Charts: www.cash.ch]

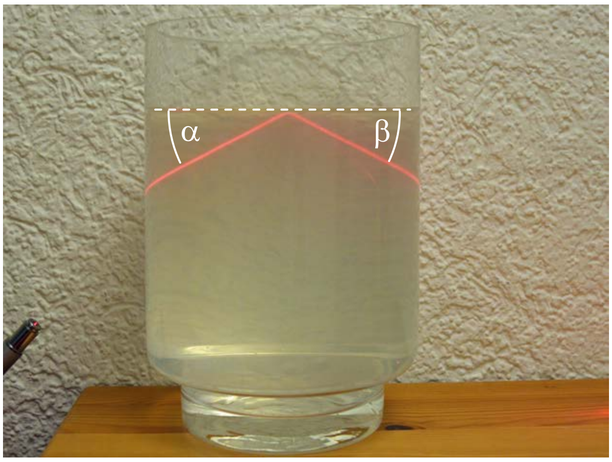




♦

19.8.5 Beispiel
Wo ist der Weg eines ins Wasser eintretenden Laserstrahls differenzierbar, wo nicht?

Der rote Laserstrahl tritt von links unten in eine mit Zitronenwasser gefüllte Vase ein.
Im Wasser verläuft der Laserstrahl geradlinig, bis er an der Wasseroberfläche reflektiert wird: $\beta=\alpha$. Dann folgt er wieder einer Geraden, bis er aus der Vase austritt.
Der Weg dieses Laserstrahls ist überall differenzierbar, wo er einer Geraden folgt. Nicht differenzierbar ist der Weg nur dort, wo er einen Knick beschreibt. Auf dem Bild ist das dort, wo der Laserstrahl an der Wasseroberfläche reflektiert wird.



Ausserhalb des trüben Wassers ist der Laserstrahl nicht sichtbar. Tatsächlich wird er noch viermal gebrochen: beim Übergang von der Luft in die Glaswand und umgekehrt, beim Übergang von der Glaswand ins Wasser und umgekehrt. Vernachlässigt man die dünne Glaswand, verläuft der Weg des Laserstrahls auf einer Geraden vom Laser bis zum Eintritt in die Vase und auf einer Geraden vom Austritt aus der Vase bis zum roten Punkt auf dem Brett am rechten Bildrand. Zeichnet man diese Strecken im Bild ein, sieht man drei Knickstellen. Dort ist der Weg des Laserstrahls nicht differenzierbar.

♦

19.9 Verwendung von Taschenrechnern mit CAS

A. Berechnen von Differenzenquotienten

19.9.1 Beispiel

Berechnen Sie den Differenzenquotienten für die Funktion f: $x \mapsto x^2 - x$ zwischen den beiden Stellen $x_0=2$ und $x_1=x_0+\Delta x=2.5$.

1. Weg: Mit Standardbefehlen

f(x):=x ^ 2▶ – x [Enter]

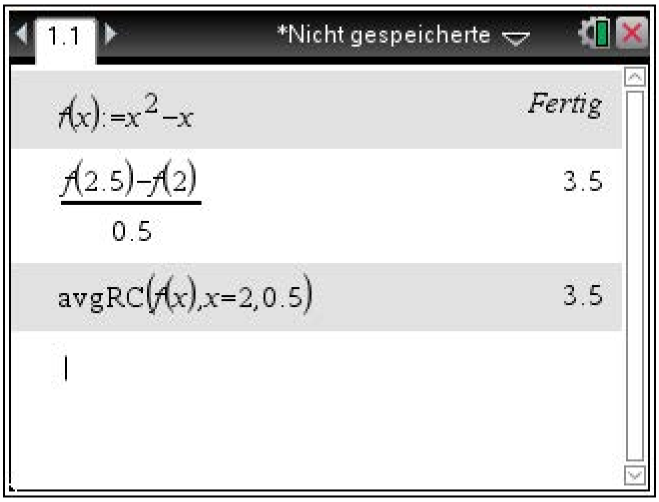
(f(2.5)–f(2))/0.5 [Enter]

Dieser Weg ist anschaulich, weil er sich an der mathematischen Schreibweise orientiert.

2. Weg: Mit einem Spezialbefehl (avgrc = average rate of change = mittlere Änderungsrate)

f(x):=x ^ 2▶ – x [Enter]

avgrc(f(x), x=2, 0.5) [Enter]



♦

19.9.2 Beispiel

Berechnen Sie eine Folge von Differenzenquotienten, um die Ableitung von f: $x \mapsto x^2 - x$ an der Stelle $x_0=2$ abzuschätzen.

1. Weg: Mit Standardbefehlen

f(x):=x ^ 2▶ – x [Enter]

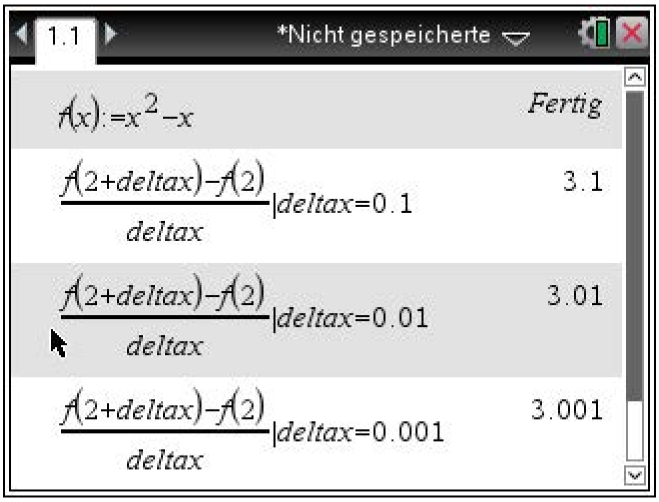
(f(2+deltax)–f(2))/deltax | deltax=0.1 [Enter]

(f(2+deltax)–f(2))/deltax | deltax=0.01 [Enter]

(f(2+deltax)–f(2))/deltax | deltax=0.001 [Enter]

Diese Folge von Differenzenquotienten scheint gegen 3 zu streben.

Um den linksseitigen Grenzwert $\lim\limits_{\Delta x \uparrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ zu berechnen, setzt man für deltax negative Werte ein:



f(x):=x ^ 2▶ – x [Enter]

(f(2+deltax)–f(2))/deltax | deltax=–0.1 [Enter]

(f(2+deltax)–f(2))/deltax | deltax=–0.01 [Enter]

(f(2+deltax)–f(2))/deltax | deltax=–0.001 [Enter]

Jetzt erhalten wir 2.9, 2.99 und 2.999. Auch diese Folge von Differenzenquotienten scheint gegen 3 zu streben, weshalb wir vermuten, dass die gesuchte Ableitung 3 ist.

2. Weg: Mit einem Spezialbefehl

Dieselben Resultate erhält man auch mit dem Spezialbefehl avgrc.

♦

B. Berechnen der Ableitung von f an einer Stelle x_0

19.9.3 Beispiel

Berechnen Sie die Ableitung von f: $x \mapsto x^2 - x$ an der Stelle $x_0=2$.

1. Weg

f(x):=x^2▶ – x Enter → Fertig

limit((f(2+deltax)–f(2))/deltax, deltax, 0) Enter

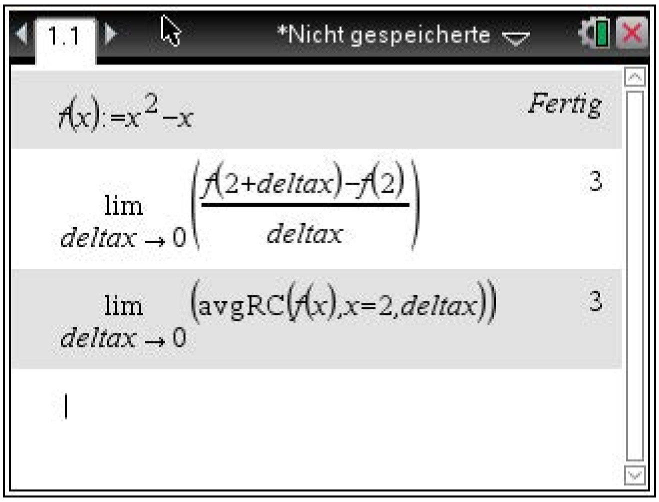
Die Vermutung von Beispiel 19.9.2 erweist sich als richtig.

2. Weg

f(x):=x^2▶ – x Enter → Fertig

limit(avgrc(f(x), x=2, deltax), deltax, 0) Enter

♦



19.10 Übungen

A. Fragen zum Grundstoff

Notieren Sie Ihre Antworten zu den folgenden Fragen. Manchmal reicht eine Zahl oder eine Formel, manchmal sind ein paar Sätze oder eine Skizze sinnvoll. Die Lösungen finden Sie im Text dieses Kapitels.

1. Wie wird bei Beispiel 19.2.1 „Anfahrendes Auto“ …
   a) die Durchschnittsgeschwindigkeit des anfahrenden Autos zwischen den Sekunden 2 und 3 berechnet? Wie gross ist sie?
   b) die Momentangeschwindigkeit bei Sekunde 2 berechnet? Wie gross ist sie?
2. Wie wird bei Beispiel 19.2.3 „Studium eines Funktionsgraphen“ …
   a) die Steigung m_s der Sekanten s durch die beiden Punkte $P(x_0, f(x_0))$ und $Q(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$ auf dem Graphen von f berechnet? Wie gross ist sie?
   b) die Steigung m_t der Tangente t an den Graphen von f im Punkt $P(x_0, f(x_0))$ berechnet? Wie gross ist sie?
3. Wie wird bei Beispiel 19.2.5 „Abkühlung von Kaffee“ …
   a) die Temperatur T des Espressos nach t Minuten berechnet? Wie hoch ist sie?
   b) die Temperatur des Espressos nach exakt 3 Minuten berechnet? Wie hoch ist sie?
   c) die durchschnittliche Abkühlungsgeschwindigkeit im Zeitraum zwischen 3:00 und 4:00 Minuten berechnet? Wie gross ist sie?
   d) die momentane Abkühlungsgeschwindigkeit nach exakt 3:00 Minuten berechnet? Wie gross ist sie?
   e) die durchschnittliche Abkühlungsgeschwindigkeit im Zeitraum zwischen t_0 und $t_0+\Delta t$ Minuten berechnet? Wie gross ist sie?
   f) die momentane Abkühlungsgeschwindigkeit nach exakt t_0 Minuten berechnet? Wie gross ist sie?

4. Wie wird bei Beispiel 19.2.7 „Wachstum einer Bakterienkultur“ …
   a) die durchschnittliche Wachstumsrate im Zeitraum zwischen $t_0=60$ und $t_0+\Delta t=75$ Minuten berechnet? Wie gross ist sie?
   b) die momentane Wachstumsrate zum Zeitpunkt $t_0=60$ Minuten berechnet? Wie gross ist sie?
   c) die mittlere Wachstumsrate im Zeitraum zwischen t_0 und $t_0+\Delta t$ Minuten berechnet? Wie gross ist sie?
   d) die momentane Wachstumsrate zum Zeitpunkt t_0 Minuten berechnet? Wie gross ist sie?
5. Was ist ein Differenzenquotient, was ein Differentialquotient, was die Ableitung? Definieren Sie diese Begriffe für die Funktion f: $x \mapsto y$.
6. Wie kann man anhand des Graphen einer Funktion f herausfinden, ob f an einer bestimmten Stelle x_0 differenzierbar ist oder nicht? Geben Sie Beispiele für Funktionen an, die an der Stelle $x_0=0$ nicht differenzierbar sind.
7. Gegeben ist der Graph einer Funktion f. Wie bestimmt man graphisch einen Differenzenquotienten, wie die Ableitung $f'(x_0)$?

B. Fragen zum Ergänzungsstoff

Notieren Sie Ihre Antworten zu den folgenden Fragen. Manchmal reicht eine Zahl oder eine Formel, manchmal sind ein paar Sätze oder eine Skizze sinnvoll. Die Lösungen finden Sie im Text dieses Kapitels.

1. Wie ist $f'(x_0)$ definiert? Weshalb darf man bei der Berechnung von $f'(x_0)$ für Δx nicht einfach eine „winzige“ Zahl einsetzen und auf die nächste „schöne“ Zahl runden?
2. Welche Beziehung gilt zwischen den Differentialen dx und dy der Funktion f?
3. Der Verlauf eines Gleisstücks werde durch die Funktion f beschrieben. Weshalb ist es in diesem Zusammenhang wichtig, dass f überall differenzierbar ist?

C. Aufgaben zum Grundstoff

1. Ein anfahrendes Auto lege in t Sekunden den Weg $s(t)=1.5\cdot t^2$ Meter zurück.
   a) Welches ist seine Durchschnittsgeschwindigkeit in den ersten 4 Sekunden?
   b) Welches ist seine Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen den Sekunden 3 und 4?
   c) Welches ist seine Momentangeschwindigkeit nach exakt 3 Sekunden?
   d) Welches ist seine Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen den Sekunden 4 und 5?
   e) Welches ist seine Momentangeschwindigkeit nach exakt 4 Sekunden?
   f) Welches ist seine Momentangeschwindigkeit nach exakt 5 Sekunden?
2. Wir untersuchen den Graphen der Funktion f: $x \mapsto 1.5\cdot x^2$.
   a) Welches ist die Steigung der Sekanten s zwischen den beiden Stellen $x_0=0$ und $x_0+\Delta x=4$?
   b) Welches ist die Steigung der Sekanten s zwischen den beiden Stellen $x_0=3$ und $x_0+\Delta x=4$?
   c) Welches ist die Steigung der Tangenten t an den Graphen von f an der Stelle $x_0=3$?

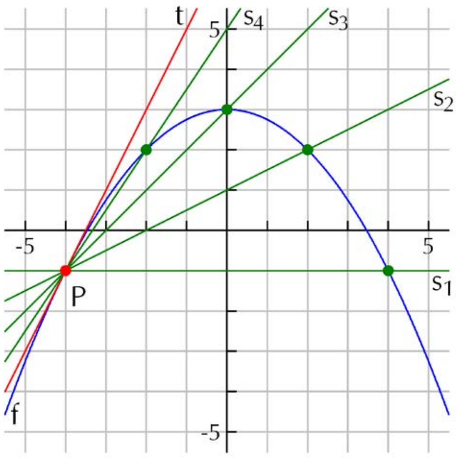
d) Welches ist die Steigung der Sekanten s zwischen den beiden Stellen $x_0=4$ und $x_0+\Delta x=5$?

e) Welches ist die Steigung der Tangenten t an den Graphen von f an der Stelle $x_0=4$?

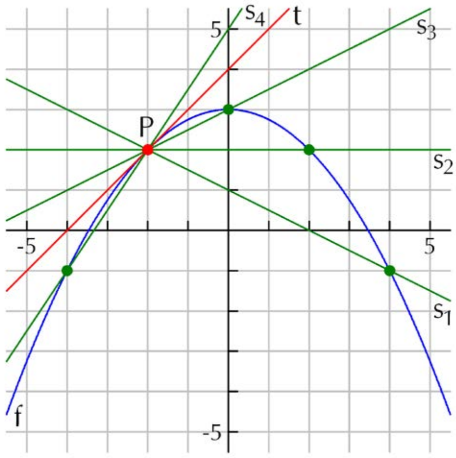
f) Welches ist die Steigung der Tangenten t an den Graphen von f an der Stelle $x_0=5$?

3. Ein Stein wird (theoretisch im luftleeren Raum) fallen gelassen. Nach t Sekunden Fallzeit hat er den Weg $s(t)=\frac{1}{2}g\cdot t^2$ zurückgelegt, wobei $g=9.81\,m/s^2$ ist.
   a) Welchen Weg legt der Stein in der ersten Sekunde zurück?
   b) Welches ist seine Durchschnittsgeschwindigkeit in der ersten Sekunde?
   c) Welches ist seine Momentangeschwindigkeit nach exakt einer Sekunde?
   d) Welchen Weg legt der Stein in den ersten 2 Sekunden zurück?
   e) Welches ist seine Durchschnittsgeschwindigkeit in den ersten 2 Sekunden?
   f) Welches ist seine Momentangeschwindigkeit nach exakt 2 Sekunden?
   g) Nach 50 m freiem Fall trifft der Stein auf dem Boden auf. Mit welcher Geschwindigkeit geschieht das?
4. Bestimmen Sie die Steigung der eingezeichneten Sekanten durch den Punkt P und die Steigung der Tangente im Punkt P des Graphen der Funktion f.

a) P(–4, –1)

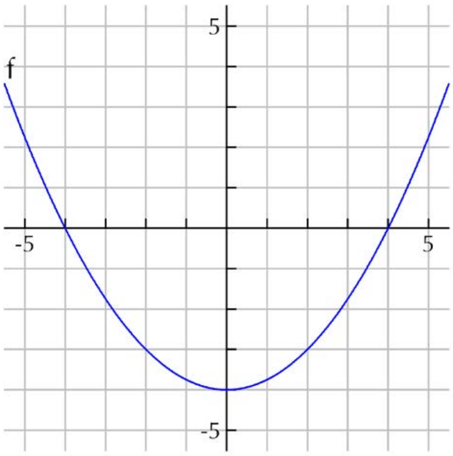


b) P(–2, 2)

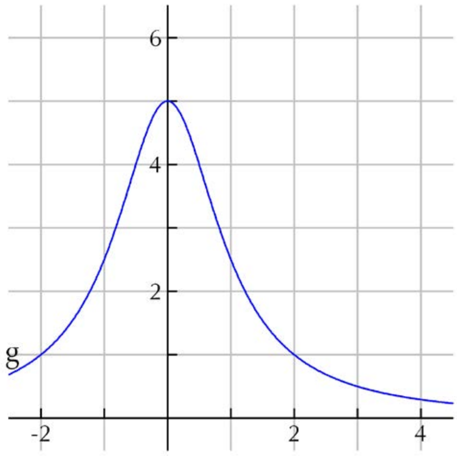


5. Bestimmen Sie graphisch die Ableitung der dargestellten Funktion an den angegebenen Stellen möglichst genau.

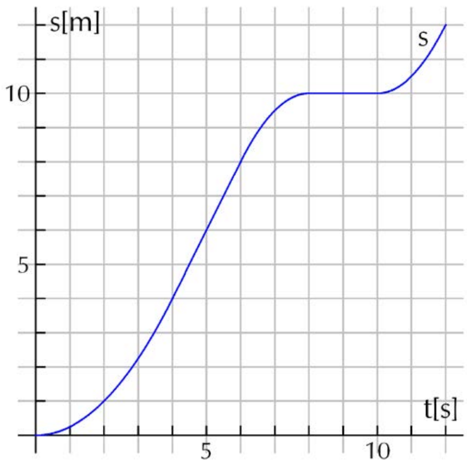
a) Funktion f, $x_0=-4$, $x_1=0$, $x_2=2$



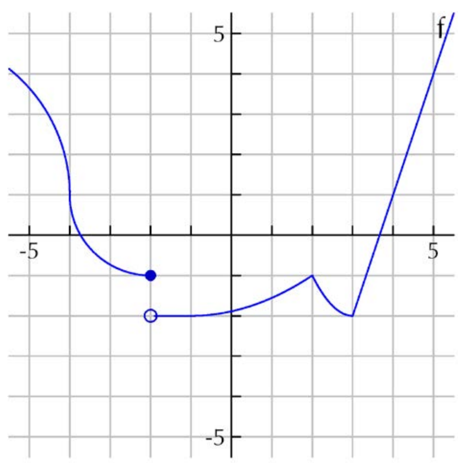
b) Funktion g, $x_0=-1$, $x_1=0$, $x_2=2$



6. Zeichnen Sie sorgfältig den Graphen der Funktion f und bestimmen Sie graphisch die Ableitung von f an den angegebenen Stellen möglichst genau.
   a) $f: x \mapsto 2x-3$, $x_0=-1$, $x_1=2$
   b) $f: x \mapsto |x|$, $x_0=-3$, $x_1=3$, $x_2=0$
   c) $f: x \mapsto \frac{1}{2}x^2$, $x_0=-3$, $x_1=2$, $x_2=0$
   d) $f: x \mapsto \log_2 x$, $x_0=1$, $x_1=4$
   e) $f: x \mapsto \sin x$, $x_0=0$, $x_1=\frac{1}{3}\pi$, $x_2=\pi$ (x im Bogenmass)
   f) $f: x \mapsto e^x$, $x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=-\ln 2$
7. Schätzen Sie mit einer aus mindestens 4 Gliedern bestehenden Folge von Differenzenquotienten die Ableitung von f an den angegebenen Stellen ab.
   a) $f: x \mapsto 2x-3$, $x_0=-1$, $x_1=2$
   b) $f: x \mapsto |x|$, $x_0=-3$, $x_1=3$, $x_2=0$
   c) $f: x \mapsto \frac{1}{2}x^2$, $x_0=-3$, $x_1=2$, $x_2=0$
   d) $f: x \mapsto \log_2 x$, $x_0=1$, $x_1=4$
   e) $f: x \mapsto \sin x$, $x_0=0$, $x_1=\frac{1}{3}\pi$, $x_2=\pi$ (x im Bogenmass)
   f) $f: x \mapsto e^x$, $x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=-\ln 2$
8. Schätzen Sie mit einer aus mindestens 4 Gliedern bestehenden Folge von Differenzenquotienten die Ableitung von f an den angegebenen Stellen ab.
   $f: x \mapsto \sqrt{4-x}$ $x_0=0$, $x_1=3.99$, $x_2=4$
9. Ein Fahrzeug entfernt sich geradlinig von seinem Startpunkt. Der Graph rechts gibt den nach t Sekunden zurückgelegten Weg s an.
   a) Welches ist seine Startgeschwindigkeit?
   b) Wann ist die Geschwindigkeit konstant?
   c) Was geschieht zwischen den Sekunden 8 und 10?
   d) Welches ist die Durchschnittsgeschwindigkeit während der ersten 12 Sekunden?
   e) Welches ist die Geschwindigkeit nach 2s?
   f) Wann beschleunigt das Fahrzeug, wann bremst es ab?



10. Rechts ist der Graph einer Funktion f abgebildet. An welchen Stellen ist f nicht differenzierbar? Geben Sie den jeweiligen Grund an.



11. Wetterfrösche wissen es: Die Lufttemperatur T [°C] hängt davon ab, auf welcher Höhe h [m] über dem Meeresspiegel die Temperatur gemessen wird. Im Allgemeinen gilt: Je grösser h, desto niedriger ist T.
    a) Was bedeuten die Differenzenquotienten
    $$\frac{T(1000)-T(700)}{300} \text{ und } \frac{T(700+\Delta h)-T(700)}{\Delta h}?$$
    b) Welches ist ihr Vorzeichen?

c) Was bedeutet $T'(700)$?
d) Ist $T'(700)$ im Allgemeinen positiv oder negativ?

D. Anspruchsvollere Aufgaben zum Grundstoff

1. Ein anfahrendes Auto lege in t Sekunden den Weg $s(t)=1.5\cdot t^2$ Meter zurück.
   a) Welches ist seine Durchschnittsgeschwindigkeit in den ersten t_0 Sekunden?
   b) Welches ist eine Momentangeschwindigkeit nach genau t_0 Sekunden?
2. Ein anfahrendes Fahrzeug lege in t Sekunden den Weg $s(t)=\frac{a}{2}\cdot t^2$ Meter zurück. (Dabei bezeichnet a die Beschleunigung.)
   a) Welches ist seine Durchschnittsgeschwindigkeit in den ersten t_0 Sekunden?
   b) Welches ist seine Momentangeschwindigkeit nach genau t_0 Sekunden?
3. Ein Stein wird (theoretisch im luftleeren Raum) fallen gelassen. Nach t Sekunden Fallzeit hat er den Weg $s(t)=\frac{1}{2}g\cdot t^2$ zurückgelegt, wobei $g=9.81\,m/s^2$ ist.
   a) Welchen Weg legt der Stein in den ersten t_0 Sekunden zurück?
   b) Welches ist seine Durchschnittsgeschwindigkeit in den ersten t_0 Sekunden?
   c) Welches ist seine Momentangeschwindigkeit nach exakt t_0 Sekunden?
4. Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f\colon x \mapsto x^2$ an den Stellen
   a) $x_0=-3$ b) $x_1=-2$ c) $x_2=0$ d) $x_3=1$ e) $x_4=5$,
   indem Sie an jeder Stelle zunächst den Differenzenquotienten und anschliessend den Differenzialquotienten bilden.
5. In einen aufrecht stehenden zylinderförmigen und zunächst leeren Tank mit Radius r=1.2 m fliessen pro Sekunde 50 l Wasser. Mit welcher Geschwindigkeit steigt der Wasserspiegel an, und zwar nach exakt
   a) 10 s b) 20 s c) 60 s d) t_0 s?
6. Ausgelaufenes Öl bildet auf einem See einen Kreis, dessen Radius sich pro Minute um 2 m vergrössert. Mit welcher Geschwindigkeit nimmt die Kreisfläche dann zu, wenn der Radius 50 m misst?
7. Ein parallel zum Boden fliegendes Flugzeug überfliegt eine Radarstation in 8 km Höhe. Etwas später stellt die Crew der Radarstation fest, dass das Flugzeug 10 km von der Radarstation entfernt ist und der Abstand zwischen Radarstation und Flugzeug sich mit 600 km/h vergrössert. Welches ist die horizontale Geschwindigkeit des Flugzeugs?
8. Eine h=1.75 m grosse Frau bewegt sich mit v=1.5 m/s auf eine H=7 m hohe Strassenlaterne zu. Mit welcher Geschwindigkeit ändert sich die Länge s ihres von der Strassenlaterne erzeugten Schattens dann, wenn sie 3 m von der Strassenlaterne entfernt ist?
9. *Fensterln, Kiltgang:* Ein Geliebter möchte mithilfe einer 5 m langen Leiter seine Angebetete durch das Fenster ihres Zimmers besuchen. Das untere Leiterende steht 1 m von der Hauswand entfernt. In dem Moment, als der Geliebte durchs Fenster steigen will, erscheint ein Nebenbuhler und zieht das untere Leiterende mit einer konstanten Geschwindigkeit von 0.5 m/s von der Hauswand weg. Dadurch rutscht das obere Leiterende – und auf ihm der Geliebte – nach unten. Welches ist die Geschwindigkeit des oberen Leiterendes nach genau
   a) $t_0=1$ s b) $t_0=2$ s c) $t_0=4$ s d) $t_0=6$ s?

10. Im legendären Zürcher Stadion Letzigrund findet ein Rennen über 100 m statt. Ein Trainer will „seinen" Läufer filmen. Er steht mit seiner Kamera genau auf der Höhe der Ziellinie und 5.00 m neben der Bahn „seines" Läufers. Der Läufer benötigt 10.00 s, und wir nehmen an, dass er während des ganzen Rennens dieselbe Geschwindigkeit hat.
    a) Mit welcher Geschwindigkeit verändert sich der Abstand zwischen dem Läufer und seinem Trainer nach exakt 5 Sekunden?
    b) Mit welcher Winkelgeschwindigkeit muss der Trainer die Kamera nach exakt 5 Sekunden drehen, damit sein Läufer immer in der Mitte des Bildes bleibt?
11. Aus einem Tank wird Wasser abgelassen. Die Funktion V: $t \mapsto V(t)$ gibt den Inhalt des Tanks zum Zeitpunkt t an.
    a) Wie gross ist die mittlere Ausflussgeschwindigkeit im Zeitintervall $[t_0, t_1]$?
    b) Wie gross ist die Ausflussgeschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0?
    c) Was können Sie über das Vorzeichen der Ausflussgeschwindigkeit sagen?
12. Die Funktion A: $t \mapsto A(t)$ gibt an, wie viele Autos seit 0:00 Uhr in einen Tunnel gefahren sind. Wie ist $A'(t)$ definiert, und wie kann $A'(t)$ gedeutet werden?
13. Untersuchen Sie, ob die Funktion an der Übergangsstelle zwischen den beiden Teilfunktionen stetig und/oder differenzierbar ist oder nicht.

    a) $f: x \mapsto \begin{cases} x^2, & \text{falls } x \ge 0 \\ 0, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$ b) $f: x \mapsto \begin{cases} x^2, & \text{falls } x \ge 0 \\ 1, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$

    c) $f: x \mapsto \begin{cases} x^2, & \text{falls } x \ge 0 \\ x^3, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$ d) $f: x \mapsto \begin{cases} x^2, & \text{falls } x \ge 1 \\ x^3, & \text{falls } x < 1 \end{cases}$

    e) $f: x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}x + 2, & \text{falls } x > 4 \\ 2\sqrt{x}, & \text{falls } 0 \le x \le 4 \end{cases}$ f) $f: x \mapsto \begin{cases} e^x, & \text{falls } x \ge 0 \\ x+1, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$
14. a) Stellen Sie den Graphen der Funktion f in einem Koordinatensystem für $x \in [-1, +1]$ sorgfältig dar:
    $$f: x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{1/x}}, & \text{falls } x \ne 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases}.$$
    b) Ist f an der Stelle $x=0$ stetig?
    c) Ist f an der Stelle $x=0$ differenzierbar?
15. a) Stellen Sie den Graphen der Funktion $f: x \mapsto |x|^{|x|}$ sorgfältig dar.
    b) Ist f an der Stelle $x=0$ definiert? Wenn nein: Wie kann $f(0)$ definiert werden, damit f an der Stelle $x=0$ stetig wird? Ist f an der Stelle 0 dann differenzierbar?
16. Klären Sie anhand des Graphen der Funktion f ab, wo f differenzierbar ist und wo nicht.

    a) f: $x \mapsto -|x+3|$ b) $f: x \mapsto \big||x-4|-3\big|$ c) $f: x \mapsto \sqrt{25-x^2}$

    d) $f: x \mapsto \dfrac{1}{x}$ e) $f: x \mapsto |9-x^2|$ f) f: $x \mapsto x \cdot \sqrt{x+4}$

    g) f: $x \mapsto \sqrt{x^2-9}$ h) f: $x \mapsto (x-3)^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}$ i) $f: x \mapsto \begin{cases} 1, \text{ falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0, \text{ falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$
17. Die bei Beispiel 19.8.3 untersuchte Funktion ist z. B. an der Stelle $t=180$ nicht stetig und gemäss Satz 19.4.3. auch nicht differenzierbar.

Anderseits verläuft der Graph von f sowohl links als auch rechts von t=180 waagrecht, hat also die (Tangenten-)Steigung 0. Also existiert an der Stelle t=180 ein gemeinsamer Wert der Tangentensteigungen, nämlich 0. Das bedeutet aber, dass f an der Stelle t=180 differenzierbar ist.
Was stimmt da nicht?

E. Aufgaben zum Ergänzungsstoff

1. In Ihrem Studentenleben und in Ihrem Privatleben treten Beziehungen zwischen zwei Grössen auf, die man durch Funktionen beschreiben kann.
   a) Geben Sie solche Funktionen an.
   b) Was bedeuten Differenzenquotient und die Ableitung bei diesen Funktionen konkret?
   c) Sind diese Funktionen auf ihrem ganzen Definitionsbereich D(f) differenzierbar?
2. Wo ist die Funktion f definiert? Wo ist sie differenzierbar, wo ist sie es nicht?
   a) $f: x \mapsto \operatorname{sign} x$ b) $f: x \mapsto [x]$
3. Wo ist die Funktion f definiert? Ist f an der Stelle x=0 stetig? Differenzierbar?
   a) $f: x \mapsto \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), \text{ falls } x \neq 0 \\ 0, \text{ falls } x = 0 \end{cases}$ b) $f: x \mapsto \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), \text{ falls } x \neq 0 \\ 0, \text{ falls } x = 0 \end{cases}$
   c) $f: x \mapsto \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), \text{ falls } x \neq 0 \\ 0, \text{ falls } x = 0 \end{cases}$

F. Aufgaben für Freaks

1. Lösen Sie die Aufgabe D.9. für die Zeitpunkte
   a) t_0=8 s b) t_0=7.99 s c) t_0=7.9999 s d) t_0=7.999999 s
   e) t_0=7.99999999 s.
   f) Offenbar beschreibt die gefundene Funktion h: $t \mapsto h(t)$ für die Höhe des oberen Leiterendes über dem Boden die Wirklichkeit für diese Zeiten nicht gut. Untersuchen Sie, wie die Leiter und der Liebhaber wirklich nach unten gelangen.
2. Wie könnte eine Funktion aussehen, die überall stetig, aber nirgends differenzierbar ist? Weierstraß[3] hat eine solche Funktion konstruiert, sie trägt seinen Namen. Ab und zu wird sie als *Weierstraß-Monster* bezeichnet.
3. Wie wird bei einer Geschwindigkeitskontrolle der Polizei die momentane Geschwindigkeit gemessen? Es gibt mehrere Methoden.
4. Viele Smartphones verfügen über ein eingebautes GPS. Es gibt Apps, die auf das GPS zugreifen und die momentane Geschwindigkeit angeben, mit der das Smartphone bzw. sein Besitzer unterwegs ist. Wie machen das diese Apps?

[3] Weierstraß Karl Theodor Wilhelm, deutscher Mathematiker, 31.10.1815 (Ostenfelde, Westfalen) bis 29.2.1897 (Berlin)