Thème : Analyse

Introduction aux fonctions exponentielles

TI-82 Advanced
Edition Python

TI-83 Premium CE
Edition Python

Enoncé

Un pays imaginaire connaît une grave épidémie virale. Au premier janvier 2021, 1 million de personnes sont contaminées. On considère que le nombre de personnes contaminées augmente de 20% chaque mois.

Crédit photo : www.pixels.com – Dmitry Skvortsov

n étant un nombre entier naturel, on note c_0 le nombre de millions de personnes contaminées au premier janvier 2021 et c_n le nombre de millions de personnes contaminées au bout de n mois suivant cette date.
Ainsi $c_0 = 1$.

1. Calculer c_6, le nombre de millions de personnes contaminées au premier juillet 2021 (arrondir au millier près) puis exprimer c_n en fonction de n.

Représenter graphiquement le nuage de points $M(n, c_n)$ dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

2. On voudrait donner une estimation du nombre de millions de personnes contaminées au 15 avril 2021. Proposer une réponse en s'aidant du graphique réalisé.

3. Si on considère que le pays a 40 millions d'habitants et que l'épidémie croît au même rythme de 20% par mois, combien de temps faudrait-il pour que la totalité de la population soit contaminée ?

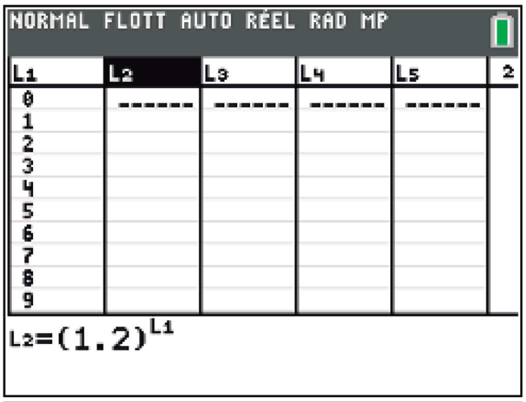
1. Suite géométrique

Nous savons qu'une augmentation de 20% correspond à multiplier par un coefficient de 1,2 soit successivement $c_1 = 1{,}2c_0$, $c_2 = 1{,}2c_1$, $c_3 = 1{,}2c_2$, $c_4 = 1{,}2c_3$, $c_5 = 1{,}2c_4$ et $c_6 = 1{,}2c_5 = (1{,}2)^6 c_0 \approx 2{,}986$ soit environ 2986000 personnes contaminées au premier juillet 2021.

On reconnaît ainsi une suite géométrique (c_n) de raison $q = 1{,}2$ et de premier terme $c_0 = 1$ d'où $c_n = c_0 q^n = (1{,}2)^n$ pour tout entier naturel n.

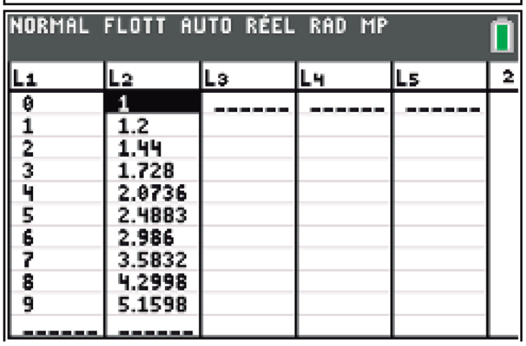
Pour représenter le nuage de points $M(n, c_n)$ on entre les données dans les listes de la calculatrice, on appuie sur stats **Modifier…**

On entre les rangs des mois dans la liste $\mathbf{L_1}$ puis on calcule les valeurs de la liste $\mathbf{L_2}$ à l'aide de la formule $(1.2)^{L_1}$.



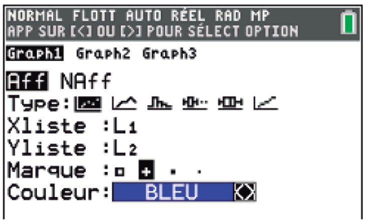
Remarque : Pour effacer des données déjà présentes :

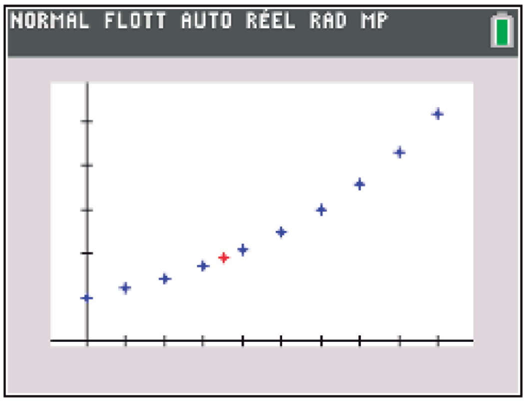
Appuyer sur stats **EffListe** puis choisir le nom des listes à effacer en les séparant par une virgule. Par exemple pour effacer le contenu des listes $\mathbf{L_1}$ et $\mathbf{L_2}$ on entre



Pour représenter graphiquement ces deux listes, on paramètre la fenêtre graphique en appuyant sur 2nde f(x) (graph stats).
Afin d'ajuster au mieux la fenêtre, appuyer sur zoom choix 9:**`ZoomStat`**

Remarque : Pensez à bien effacer les expressions des fonctions pour ne pas avoir un affichage « parasite ».



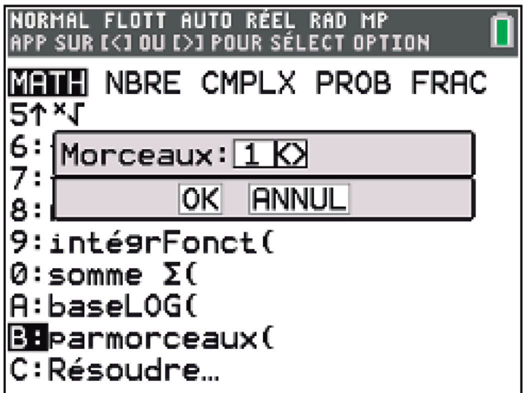


2. Estimation

Nous allons estimer le nombre de millions de personnes contaminées au 15 avril 2021.

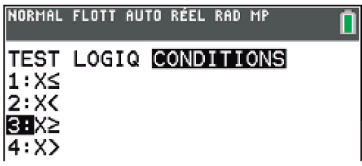
1ère idée : on s'aperçoit que le 15 avril se situe au milieu des mois de rang 3 et 4 : on réalise donc une interpolation linéaire en intercalant entre les deux points déjà construits des mois de rang 3 et 4 un troisième point ayant pour abscisse (respectivement pour ordonnée) la moyenne arithmétique des abscisses (respectivement des ordonnées) des deux points initiaux. On trouve ici $\frac{(1{,}2)^3+(1{,}2)^4}{2} \approx 1{,}9$ pour l'ordonnée de ce point.

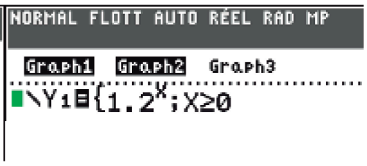
2ème idée : puisque le 15 avril correspond à la moitié du mois d'avril on essaie de prolonger à des valeurs positives non entières la suite géométrique (c_n) et on calcule alors $c_{3,5} = (1{,}2)^{3,5} \approx 1{,}89$.

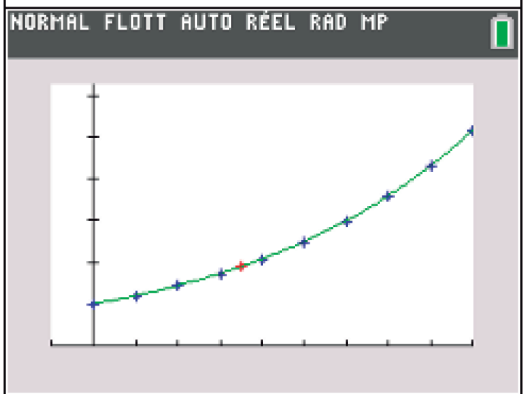


Nous venons donc de définir une nouvelle fonction f sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = 1{,}2^x$. (Passage d'un modèle **discret** à un modèle **continu**).

Pour tracer cette fonction sur le même graphique, appuyer sur f(x) puis sur math choix **`B:parmorceaux`** avec un morceau et grâce à 2nde math (tests) on rajoute des conditions pour respecter l'intervalle de définition :







3. Prévision

Avec cette nouvelle fonction, on doit résoudre l'inéquation $f(x) \geq 40$ soit $1{,}2^x \geq 40$.

Par balayage à l'aide de la calculatrice on trouve $x \approx 20{,}3$ mois c'est-à-dire que sur la base de ce modèle, la totalité de la population sera contaminée après 1 an 8 mois et 9 jours environ.