

Énoncé

Un centre de loisirs d'une station balnéaire du sud de la France, propose de prendre une carte d'abonnement annuelle de 140 €, commune à la discothèque et au cinéma.

A la discothèque, l'entrée sans réduction est de 15 € et l'abonnement donne droit à une réduction de 40 %. Au cinéma, l'entrée sans réduction est de 8 € et l'abonnement donne droit à une réduction de 50 %. Soit x le nombre annuel d'entrées à la discothèque et y le nombre annuel d'entrées au cinéma. On note A les dépenses annuelles effectuées par un utilisateur pour la discothèque et le cinéma avec la carte d'abonnement, B les dépenses annuelles sans carte d'abonnement. Enfin, on pose $E = B - A$.

1. Comparer A et B si l'utilisateur effectue 12 entrées à la discothèque et 15 entrées au cinéma.

2. a. Exprimer A , B et E en fonction de x et y .

b. Pour quelles valeurs du couple $(x; y)$ a-t-on $E = 0$? Qu'est-ce que cela représente dans notre situation ?

c. Représenter dans un repère l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan pour lesquels la carte d'abonnement est rentable.



Crédit photo : www.pexels.com – Edoardo Tommasini

1. Comparaison

Sans la carte d'abonnement, l'utilisateur dépense $12 \times 15 = 180$ € pour la discothèque et $15 \times 8 = 120$ € pour le cinéma soit des dépenses annuelles de $B = 180 + 120 = 300$ €.

Si l'achète la carte d'abonnement d'un montant de 140 € il dépensera $180 \times \left(1 - \frac{40}{100}\right) = 108$ € pour la discothèque et $120 \times \left(1 - \frac{50}{100}\right) = 60$ € pour le cinéma soit des dépenses annuelles de $A = 140 + 108 + 60 = 308$ €.

On obtient $B \leq A$ donc dans ce cas, il est plus économique pour l'utilisateur de ne pas acheter la carte d'abonnement.

2.a. Cas général

Tout d'abord $B = 15x + 8y$ et puisque nous savons qu'une baisse de 40% correspond à multiplier par un coefficient de 0,6 et qu'une baisse de 50 % correspond à multiplier par un coefficient de 0,5 on obtient $A = 140 + (15 \times 0,6)x + (8 \times 0,5)y = 140 + 9x + 4y$.




Ainsi $E = B - A = (15x + 8y) - (140 + 9x + 4y) = 6x + 4y - 140$.

On retrouve alors avec $x = 12$ et $y = 15$ que $E = -8$ soit une économie de 8 € sans acheter la carte d'abonnement.

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP	
$12*15+15*8$	300
$180*(1-0.4)$	108
$120*(1-0.5)$	60
$6*12+4*15-140$	-8

2.b. Situation E=0

On a $E = 0 \Leftrightarrow 6x + 4y - 140 = 0 \Leftrightarrow y = -1,5x + 35$. On obtient l'équation réduite d'une droite : tous les couples d'entiers $(x ; y)$ vérifiant cette équation sont solutions de $E = 0$ c'est-à-dire qu'ils vérifient une dépense annuelle identique avec ou sans la carte d'abonnement. Par exemple, grâce au tableau de valeurs ci-contre obtenu avec la calculatrice

dans le menu   après avoir rentré la fonction dans , avec 16 entrées à la discothèque et 11 entrées au cinéma l'utilisateur dépensera 328 € avec ou sans la carte d'abonnement.




X	Y1			
8	23			
9	21.5			
10	20			
11	18.5			
12	17			
13	15.5			
14	14			
15	12.5			
16	11			
17	9.5			
18	8			

Y1 = -1.5X+35


2.c. Régionnement


On veut obtenir dans un repère une région du plan où la carte d'abonnement est rentable c'est-à-dire lorsque $B \geq A$ soit $E \geq 0$. Cela se traduit par $y \geq -1,5x + 35$. On cherche donc tous les couples d'entiers $(x ; y)$ vérifiant

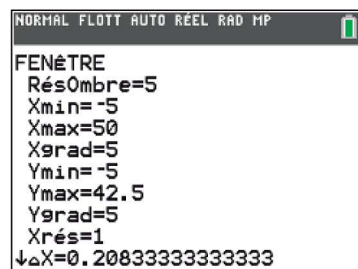
$$\text{les contraintes : } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \geq -1,5x + 35 \end{cases}$$

On ouvre alors l'application **Inequalz** de la calculatrice en appuyant sur le menu  . D'un point de vue pratique pour la lisibilité, nous allons hachurer la région du plan qui ne convient pas c'est-à-dire le contraire des inégalités précédentes. En plaçant le curseur sur le rectangle de couleur et en appuyant sur , il est possible de modifier la couleur ainsi que la partie du plan à hachurer pour Y_1 et Y_2 .



Puis on se déplace sur **X=** en haut à gauche, on appuie sur  et on fait de même pour les droites verticales.

Enfin on règle la fenêtre d'affichage avec la touche  en paramétrant la taille des hachures avec **RésOmbre** et les graduations toutes les 5 unités.



Il est aussi possible de rajouter des points dans la partie des solutions à l'aide des listes L_1 et L_2 et de les afficher comme ci-dessus.

Les points de coordonnées $(5 ; 29)$, $(10 ; 21)$ et $(15 ; 18)$ sont par exemple des solutions pour lesquelles l'achat de la carte d'abonnement est rentable. Attention, ne pas oublier de quitter l'application pour ne pas gêner l'étude classique des fonctions !

