Coût total, coût marginal et bénéfice

Enoncé

Crédit photo : www.pexels.com – Pixabay

Une usine française assure la fabrication chaque semaine d'une quantité q en tonnes de produits chimiques. Elle produit entre 10 et 100 tonnes par semaine. Le coût total de q tonnes est donné par la fonction C définie sur $[10\,;100]$ par $C(q) = 3q^2 + 40q + 2700$. La fonction C_M représentant le coût moyen unitaire est définie par $C_M(q) = \frac{C(q)}{q}$: c'est le coût moyen d'une tonne de produit lorsque q tonnes sont produites.

1. a. Montrer que $C'_M(q) = \frac{3(q-30)(q+30)}{q^2}$ pour tout réel $q \in [10\,;100]$.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction C_M. Quel est le coût moyen unitaire minimal ?

2. Le coût marginal C_m est défini comme étant le supplément de coût engendré par la production d'une tonne de produit supplémentaire, soit $C_m(q) = C(q+1) - C(q)$.

a. Calculer $C_m(q)$ et interpréter le résultat. Exprimer $C_m(q)$ en fonction de q pour tout réel $q \in [10\,;100]$.

b. Déterminer $C'(q)$. Quelle est la différence entre $C_m(q)$ et $C'(q)$?

3. On souhaite comparer le coût marginal et le coût unitaire moyen. Représenter ces 2 fonctions dans un même repère et étudier leur point d'intersection. Conclure.

4. Le cours du marché offre un prix de 310 € par tonne fabriquée. Pour tout $q \in [10\,;100]$, on note $R(q)$ la recette et $B(q)$ le bénéfice générés par la production et la vente de q tonnes de produits chimiques par l'usine.

a. Exprimer $R(q)$ et $B(q)$ en fonction de q.

b. Quel est le nombre de tonnes de produits chimiques à produire par l'usine pour réaliser un bénéfice maximal ?

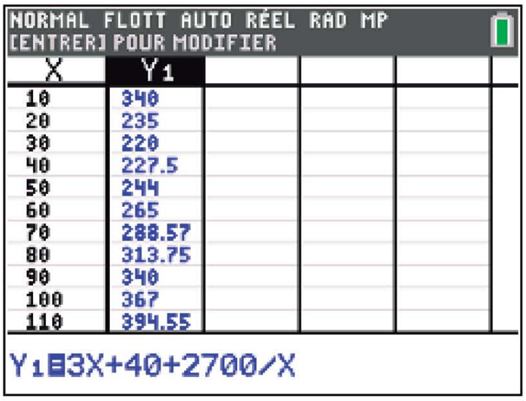
1.a. Dérivée du coût moyen unitaire

On a $C_M(q) = \frac{3q^2+40q+2700}{q} = 3q + 40 + \frac{2700}{q}$ avec $10 \leq q \leq 100$. Donc $C'_M(q) = 3 - \frac{2700}{q^2} = \frac{3q^2-2700}{q^2} = \frac{3(q^2-900)}{q^2} = \frac{3(q-30)(q+30)}{q^2}$ pour $10 \leq q \leq 100$.

1.b. Coût moyen unitaire minimal

On en déduit que $C'_M(q)$ est du signe de $(q-30)$ sur $[10\,;100]$ puis le tableau de variations de la fonction C_M sur $[10\,;100]$:

q	10		30		100
$C'_M(q)$		$-$	0	$+$	
$C_M(q)$	340	$\searrow$	220	$\nearrow$	367



Le coût moyen unitaire minimal est égal à 220 €, il est obtenu pour une production de 30 tonnes de produits chimiques.

2.a. Coût marginal

Tout d'abord $C_m(20) = C(21) - C(20) = 4\,863 - 4\,700 = 163$, cela signifie que la 21ème tonne produite coûtera 163 € !

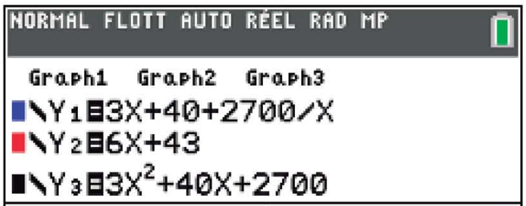
D'autre part $C_m(q) = C(q+1) - C(q)$ avec $C(q) = 3q^2 + 40q + 2700$ soit $C_m(q) = 6q + 43$ pour tout réel $q \in [10\,;100]$.

2.b. Dérivée du coût total

On a $C'(q) = 6q + 40$, rajoutons alors dans le menu fonction f(x) de la calculatrice, la fonction C_m en **Y₂** et la fonction C en **Y₃**.

On calcule alors la différence $C_m(q) - C'(q) = 6q + 43 - (6q + 40) = 3$ pour tout réel $q \in [10\,;100]$. Il y a une différence de seulement 3 € entre le coût marginal et la dérivée du coût total : *en pratique, on assimile le coût marginal de production à la dérivée du coût total.*

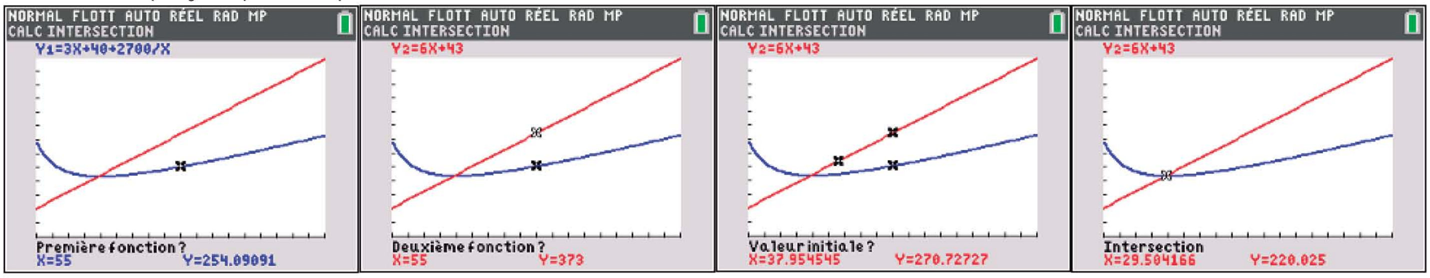
On vérifie ce résultat sur l'écran de calculs en utilisant le nombre dérivé d'une fonction accessible dans le menu math choix `8:nbreDérivé` puis on complète tous les champs manquants : les fonctions **Y₂** et **Y₃** sont accessibles avec la touche var puis onglet **VAR Y** choix `1:Fonction`.



3. Comparaison de fonctions

Après avoir représenté ces 2 fonctions dans un même repère, on sélectionne la commande `5:intersection` dans le menu 2nde trace (calculs f4).

De retour au graphique, on valide le choix de Y_1, celui de Y_2 et enfin la valeur initiale en se plaçant près du point d'intersection recherché.



On trouve $q \approx 29{,}5$ c'est-à-dire que le coût marginal et le coût unitaire se coupent très proche de la valeur minimisant le coût moyen unitaire.

4.a. Recette et bénéfice

On a $R(q) = 310q$ et $B(q) = R(q) - C(q) = 310q - (3q^2 + 40q + 2700)$ soit $B(q) = -3q^2 + 270q - 2700$ pour tout $q \in [10\,;100]$.

4.b. Bénéfice maximal

La fonction B est un polynôme du second degré dont l'abscisse du sommet S de la parabole est donné par la formule $-\frac{b}{2a}$. Ici on a $x_S = -\frac{270}{2\times(-3)} = 45$.

De plus, $y_S = B(45) = 3375$. L'usine réalise donc un bénéfice maximal hebdomadaire de 3 375 € pour une production optimale de 45 tonnes de produits chimiques. Avec la calculatrice, on sélectionne la commande `4:maximum` dans le menu `calculs`, obtenu à l'aide des touches 2nde trace (calculs f4).