Hartmut Müller-Sommer

Hüllkurven in Klasse 9

Einführung

Viele Leser werden sich fragen: „Hüllkurven in Klasse 9, geht das überhaupt?“ Die Antwort lautet: „Ja, mit einem CAS-Rechner!“

Der folgende Beitrag beschreibt einen entsprechenden Unterrichtsgang mit dem TI-92 Plus und zeigt, wie im Rahmen des Themenbereichs „Quadratische Funktionen und Gleichungen“ in Klasse 9 ein sinnvoller Rechnereinsatz einen schüler- und problemorientierten Zugang zum Thema „Hüllkurven“ eröffnen kann.

Dabei ergeben sich Möglichkeiten für experimentelles, hypothesenbildendes und -überprüfendes Arbeiten. Beim Experimentieren können die Schülerinnen und Schüler sowohl auf die graphischen als auch auf die algebraischen Fähigkeiten des Rechners zurückgreifen und verschiedenartige Wege zur Bestimmung der Hüllkurvengleichung entdecken.

Beschreibung der Unterrichtsreihe

Ausgangspunkt der Unterrichtsreihe ist die Kurvenschar mit der Gleichung

$$f_t(x) = (x-t)^2 + 0{,}5t^2 \,.$$

Die Klasse erhält den folgenden Arbeitsauftrag: Stelle die Kurven der Schar mit dem TI-92 Plus graphisch dar. Wähle die Parameterwerte von t = -2,5 bis t = 2,5 bei einer Schrittweite von 0,5.

Die Schülerinnen und Schüler entdecken schnell, dass durch diese einfache Parabelschar auf ganz neuartige Weise eine Kurve erzeugt wird: Alle Parabeln der Schar liegen oberhalb einer „Hüllkurve“, die die gegebene Kurvenschar von unten her „einhüllt“. Diese Kurve ist ebenfalls von parabelförmiger Gestalt und geht durch den Ursprung (Abb. 1).

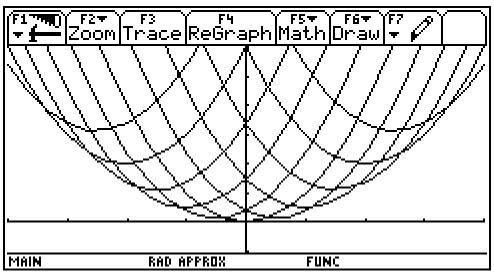

Abb.1

(Der Zeichenbereich geht von –4 bis 4 in x- und von –1 bis 6 in y-Richtung. Wichtig: Die x-Auflösung ist 10, um den Plot schnell zu bekommen.)

In einer ersten Ergebnispräsentation zeichnen wir auf einer Folie, die passend auf dem Display-Fenster liegt, die entdeckte Hüllkurve mit einem roten Folienstift nach. (Eventuell kann der Lehrer eine noch "schönere" Schar mit $t \in \{-3{,}4; .. ;3{,}4\}$ und $\Delta t = 0{,}2$ vorbereiten, als PIC-Variable speichern und schnell im Unterricht projizieren.)

Wir löschen die Kurvenschar und lassen noch einmal einige Scharparabeln in diese gezeichnete Hüllkurve „hineinregnen“ (Abb. 2).

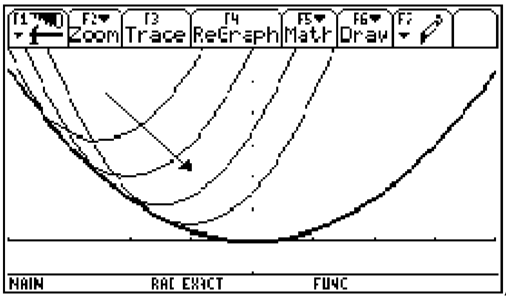

Abb.2

Diese Darstellung führt auf eine erste Charakterisierung der Hüllkurve:

Jede Scharparabel *berührt die Hüllkurve in genau einem Punkt.*

Die Schülerinnen und Schüler stellen nun selber die Frage nach der *Gleichung* der Hüllkurve. Die gesuchte Hüllkurve ist vermutlich eine Parabel mit der Gleichung $h(x) = k \cdot x^2$ $(k \in \mathbb{R})$.

In der sich anschließenden Partnerarbeitsphase sollen sie durch experimentelle Untersuchungen zur Hüllkurvengleichung gelangen. *Wie* sie experimentieren bleibt ihnen überlassen. Erste *graphische Experimente* können bereits zur Vermutung $k = \frac{1}{3}$ führen (Abb. 3).

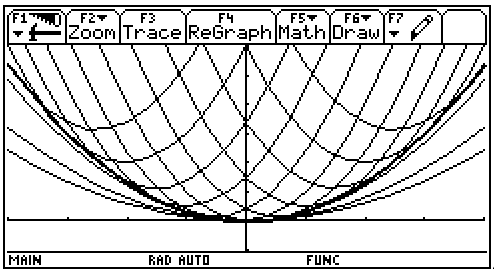

Abb. 3

Die Gleichungen der hier dargestellten Graphen lauten (von unten nach oben):

$h_1(x) = 0{,}15x^2$, $h_2(x) = 0{,}2x^2$, $h_3(x) = 0{,}3x^2$ und

$h_4(x) = \frac{1}{3}x^2$.

Die Schülerinnen und Schüler können aber auch von Anfang an *CAS-Experimente* durchführen und beispielsweise Schritt für Schritt die Lösungen der Gleichungen $f_t(x) = 0.3 \cdot x^2$, $f_t(x) = 0.4 \cdot x^2$,

$f_t(x) = 0.5 \cdot x^2$, ... , $f_t(x) = \frac{1}{3} \cdot x^2$

untersuchen. Die erste Charakterisierung der Hüllkurve zeigte uns ja:

Diejenige Parabel ist die gesuchte Hüllkurve, bei der es genau eine „Schnittstelle" gibt!

Die Protokolle der CAS-Experimente belegen (Abb. 4), dass der Rechner für die erste der oben angegebenen Gleichungen *keine* und für die beiden nächsten Gleichungen jeweils *zwei verschiedene* Lösungen angibt.

Nur die Gleichung $f_t(x) = \frac{1}{3} \cdot x^2$ liefert für jedes t ∈ $\mathbb{R}$ *genau eine* Lösung: $x = x(t) = \frac{3}{2}t$.

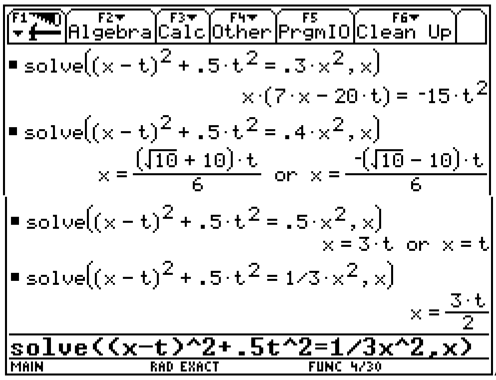

Abb. 4

Diese Ergebnisse sind nun sorgfältig zu interpretieren. Insbesondere muss herausgearbeitet werden, dass es sich bei $x = \frac{3}{2}t$ tatsächlich um eine *Berührstelle* handelt:

Würde eine Scharparabel die Parabel mit der Gleichung $h(x) = \frac{1}{3} \cdot x^2$ an dieser Stelle *schneiden*, so gäbe es aufgrund der geringeren Öffnungsweite der Scharparabeln noch eine zweite „Schnittstelle"!

Jede Scharparabel mit dem Parameter t *berührt* also den Graphen von h an genau einer Stelle, nämlich bei $x = \frac{3}{2}t$.

Beispielsweise gehört zum Parameter $t = 1$ die Berührstelle $x = \frac{3}{2}$ (Abb. 5).

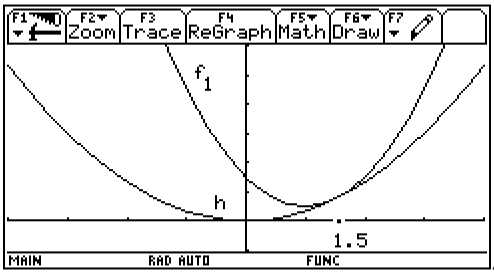

Abb. 5

Damit haben wir nachgewiesen, dass $h(x) = \frac{1}{3} \cdot x^2$ die gesuchte Hüllkurvengleichung ist.

Einige Schülerinnen und Schüler werden sofort die Lösung der Gleichung $f_t(x) = k \cdot x^2$ untersuchen.

Der Befehl „ solve($(x-t)^2 + 0.5t^2 = k \cdot x^2$,x) " liefert hier:

$$x = \frac{-(\sqrt{2(3k-1)} + 2) \cdot t}{2(k-1)} \text{ oder } x = \frac{(\sqrt{2(3k-1)} - 2) \cdot t}{2(k-1)}.$$

Offenbar gibt es genau dann *nur eine* Lösung, wenn der Radikand Null wird. Dies ist aber gerade für $k = \frac{1}{3}$ der Fall: Als einzige Lösung erhalten wir wieder $x = \frac{3}{2}t$.

Die Gleichung $x = \frac{3}{2}t$ lässt sich offenbar eindeutig nach t auflösen: $t = \frac{2}{3}x$. Damit haben wir für die Hüllkurve eine zweite Charakterisierung gefunden:

Jede Stelle x der Hüllkurve ist auch Berührstelle für genau eine Scharparabel.

Beispielsweise wird die Hüllkurve an der Stelle x = 1,5 von der Parabel mit dem Parameter t = 1 (Abb. 5) und an der Stelle x = 3 von der Parabel mit dem Parameter t = 2 berührt (Abb. 6).

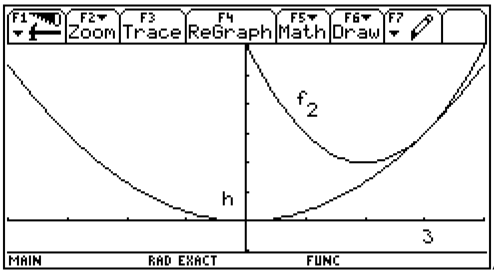

Abb. 6

Diese zweite Berühreigenschaft der Hüllkurve eröffnet uns auch einen weiteren Zugang zur Gleichung der Hüllkurve: Unter den „Kandidaten" $h(x) = k \cdot x^2$ für die Hüllkurvengleichung wäre diejenige Gleichung die richtige, bei der „$solve((x-t)^2+0.5t^2=k\cdot x^2,t)$" genau eine Lösung für t liefert.

Wir wählen zunächst spezielle Werte für k und führen die folgenden CAS-Experimente durch:

(1) $solve((x-t)^2+0.5t^2=0.5x^2,t)$

(2) $solve((x-t)^2+0.5t^2=0.2x^2,t)$

(3) $solve((x-t)^2+0.5t^2=\frac{1}{3}x^2,t)$.

Bei (1) erhalten wir (für $x \neq 0$) zwei Lösungen: $t=\frac{x}{3}$ oder t = x. Beispielsweise liefert x = 3 die Parameterwerte t = 1 oder t = 3 (Abb. 7).

Bei (2) findet der Rechner keine Lösung: Für alle x $\neq 0$ liegt der Graph von $y=0{,}2x^2$ unterhalb der Kurvenschar (Abb. 8).

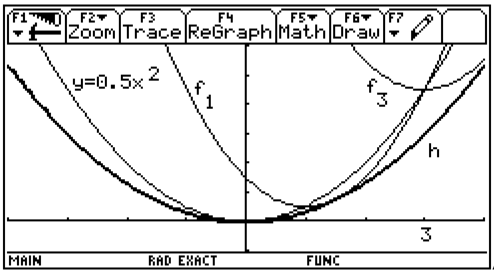

Abb. 7

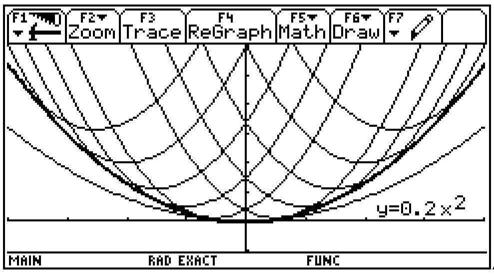

Abb. 8

Schließlich ergibt sich bei (3) die bekannte Lösung $t=\frac{2}{3}x$.

Auch hier würde die *allgemeine* Untersuchung der Gleichung $f_t(x)=k\cdot x^2$ zum Ziel führen: Der Befehl „$solve((x-t)^2+0.5t^2=k\cdot x^2,t)$" liefert

$t=\frac{(\sqrt{2(3k-1)}+2)x}{3}$ oder $t=\frac{-(\sqrt{2(3k-1)}-2)x}{3}$.

Genau eine Lösung gibt es offensichtlich nur für $k=\frac{1}{3}$. Als einzige Lösung erhalten wir wieder $t=\frac{2}{3}x$.

Für die Schülerinnen und Schüler ist die beschriebene Vorgehensweise zwar einsichtig, sie fragen sich aber an dieser Stelle, ob es nicht eine „**schnellere**" **Methode** gibt, die auch dann „funktioniert", wenn der Funktionsterm der Hüllkurve komplizierter ist. Wir fragen uns also: Wie groß muss an der Stelle x der Funktionswert y der Hüllfunktion sein, damit der Befehl „$solve((x-t)^2+0.5t^2=y,t)$" nur genau einen Wert für t liefert ?

Die Ausführung ergibt:

$t=\frac{\sqrt{-2(x^2-3y)}+2x}{3}$ oder $t=\frac{-(\sqrt{-2(x^2-3y)}-2x)}{3}$.

Wir erkennen, dass offenbar genau dann nur eine Lösung für t existiert, wenn der Term unter der Wurzel Null wird: $-2(x^2-3y)=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{3}x^2$.

Für t ergibt sich dann der bekannte Wert $t=\frac{2}{3}x$.

Diese neue Methode liefert also mit *einem* Tastendruck (und einer kleinen Umformung) die vollständige Hüllkurvengleichung!

Zur Überprüfung und Bestätigung bieten sich zwei weitere Aufgaben an:

1. Bestimme die Hüllkurve zu $f_t(x)=t\cdot x-t^2+1$.
2. Für welchen Wert von k wird $h(x)=\frac{1}{5}x^2$ Hüllkurve zu $f_t(x)=(x-t)^2+k\cdot t^2$?

Zusammenfassung und Ausblick

Wir haben erkannt, dass CAS-Experimente von der Kurvenschar zur Hüllkurve und umgekehrt auch von der Hüllkurve zur Kurvenschar führen können. Ist der Term $f_t(x)$ der Kurvenschar bei festem x eine quadratische Funktion von t, so sind offensichtlich die Methoden der Differenzialrechnung nicht erforderlich.

Hüllkurven sind „Verdichtungslinien" einer Kurvenschar, und in gewisser Weise bildet der vorgestellte Unterrichtsgang für die Schülerinnen und Schüler auch eine „Verdichtung" des Themas „Quadratische Gleichungen". Dabei erhält der Begriff der "Diskriminante" eine anschauliche Bedeutung. Bei der Lerngruppe muss selbstverständlich ein sicherer Umgang mit quadratischen Gleichungen vorausgesetzt werden. Im Unterricht der Sekundarstufe II eröffnet die Thematik „Hüllkurven" in Verbindung mit dem Einsatz des Rechners sinnstiftende Querverbindungen zwischen den Teilgebieten Analysis und Geometrie. Die Wiederholung der hier vorgestellten Untersuchungen sollte später in die Erarbeitung der neuen Methoden integriert werden: Die Schülerinnen und Schüler können dann die Grenzen des alten Verfahrens und die Möglichkeiten der Differenzialrechnung erkennen (vgl. [1]).

Literatur:

[1] Kroll, W.: Grund- und Leistungskurs Analysis, Bd. 1. Bonn: Dümmler 1988

Autor:
Hartmut Müller-Sommer
Kringelkamp 28, D-49377 Vechta
Mueller-Sommer@t-online.de