Iterationen

Robert Märki

Eine Iteration ist bekanntlich eine wiederholte Anwendung desselben Rechenverfahrens oder derselben Funktion. Iterationen finden Verwendung bei Approximationen aber auch bei der Entwicklung diskreter dynamischer Systeme. Sie gehören zu den wichtigsten Werkzeugen der numerischen Mathematik und der Informatik und sollten deshalb im Mathematikunterricht einen entsprechenden Stellenwert erhalten. Mit zeitgemäßen Hilfsmitteln, etwa der TI-Nspire™ Technologie können sowohl numerische wie grafische Darstellungen und Untersuchungen ohne großen zeitlichen Aufwand erfolgen.

Abb. 1

Im kürzlich von Texas Instruments herausgegeben Unterrichtsmittel **Funktionen und Modelle, kontinuierlich und diskret** [1] werden Iterationen und ihre Darstellungsmöglichkeiten und Anwendungen in einem eigenen Abschnitt behandelt. Es zeigt sich hier wieder einmal mehr, dass der Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungsmodi von einem großen didaktischen Wert ist und dass er hilft, Zusammenhänge zu sehen und zu verstehen. Im vorliegenden Artikel wird zuerst die Grundidee der Fixpunkt-Iteration erläutert und einige Betrachtungen zur Konvergenz angeschlossen. Mit zwei Beispielen (diskretes logistisches Wachstum und verallgemeinertes Heron-Verfahren) wird anschließend die große Vielfalt und Bedeutung dieses Themas illustriert.

1. Fixpunkt-Iteration

Die Grundidee der Fixpunkt-Iteration besteht darin, dass an Stelle der Gleichung $f(x) = 0$ das Fixpunkt-Problem $x = \varphi(x)$ mit der Iteration $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ für $n = 1,2,3\ \ldots$ approximativ gelöst wird. Die Iterationsfunktion φ ist im Allgemeinen jedoch nicht eindeutig. Oft ist es entscheidend, welche Iterationsfunktion gewählt wird.

Beispiel: Suche im Intervall $(0,\pi)$ die Nullstelle von $f(x) = x - 2 \cdot \sin(x)$. Es gibt u.a. folgende zwei Lösungsmöglichkeiten:

a) Iteration mit $x = 2 \cdot \sin(x) = \varphi_1(x)$

b) Iteration mit $x = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) = \varphi_2(x)$

Wir wählen jeweils den Anfangswert $x_1 = 1{,}4$. Beide Iterationen konvergieren, aber nur die Iteration a) führt zur Lösung der Aufgabe.

a) $\lim_{n\to\infty} x_n = 1{,}8955$

b) $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

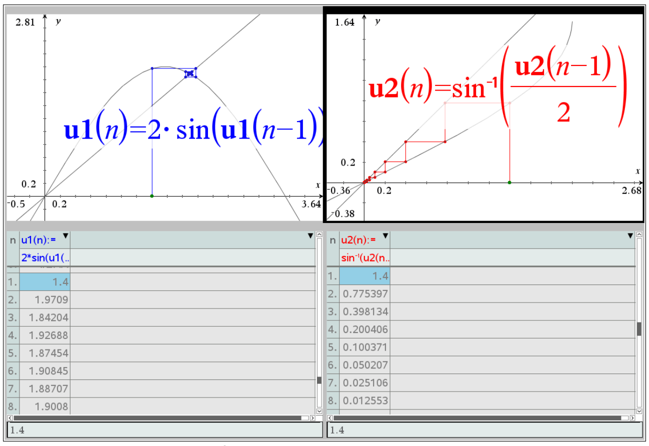

Abb.2: Wahl der Iterationsfunktion

Entscheidend für die Konvergenz ist der Banachsche Fixpunktsatz: Wenn φ: D→D die Bedingung

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \le L\,|x - y| \text{ für alle } x, y \in D$$

erfüllt (Lipschitz-Bedingung) und $L < 1$ ist, dann gibt es genau einen Fixpunkt x_* von φ in D, d.h. $\varphi(x_*) = x_*$ und für jeden Startwert $x_1 \in D$ konvergiert die Fixpunktiteration $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ für $n = 1,2,3, \ldots$ gegen diesen Fixpunkt.

Bemerkungen: Den Beweis des Satzes findet man in fast jedem Buch zur höheren Analysis, z.B. [2]. L heißt Lipschitz-Konstante, L < 1 bedeutet, dass die Abbildung kontrahierend ist. Für eine reelle Funktion φ heisst dies anschaulich, dass der Betrag der Steigung des Graphen von φ in D überall kleiner oder gleich L < 1 ist, je kleiner L ist, desto besser die Konvergenz.

In der nachstehenden Abbildung wird die Iterationsfunktion $it(x) = m\cdot(x - 0{,}5) + 0{,}5$ betrachtet, der Fixpunkt ist natürlich $x = 0{,}5$. Verändert man mit dem Schieberegler die Steigung m, dann ist deutlich zu sehen, dass Konvergenz nur für $|m| < 1$ eintritt und diese um so rascher erfolgt, je kleiner $|m|$ ist.

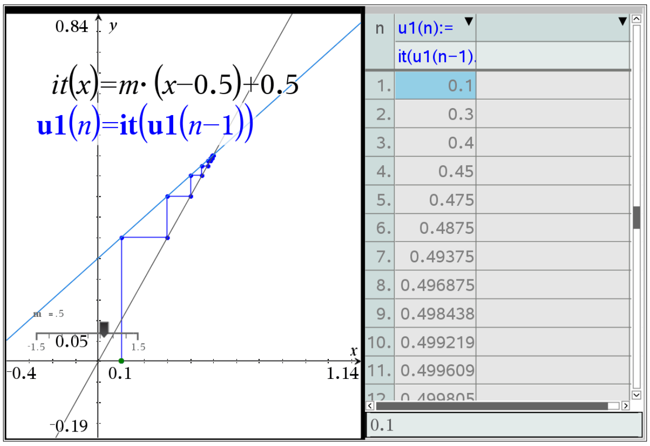

Abb.3: Konvergenzverhalten in Abhängigkeit der Steigung m

2. Diskretes logistisches Wachstum

Im schon erwähnten Unterrichtsmittel [1] erfolgt die Modellierung von Wachstumsprozessen über die (diskrete) Änderungsrate resp. über Differenzengleichungen. Ist bei einem beliebigen Wachstumsprozess eine Sättigungsgrenze *G* vorhanden, kann dies am einfachsten dadurch modelliert werden, dass man die Änderungsrate mit dem **wachstumsbegrenzenden Faktor**

$$b = \left(1 - \frac{x}{G}\right)$$

multipliziert (x ist die wachsende Größe, b heißt auch relatives Sättigungsmanko). Damit kommt das Wachstum beim Erreichen der Sättigungsgrenze zum Stillstand und wird negativ, wenn die Sättigungsgrenze übertroffen wird. Dieser wachstumsbegrenzende Faktor ist universell und kann sowohl bei diskreten wie auch bei kontinuierlichen Modellen von einer oder mehreren Größen und bei beliebigen Wachstumsvorgängen verwendet werden.

Das diskrete exponentielle Wachstum (geometrische Folge) wird durch die Änderungsrate resp. Differenzengleichung $x_{n+1} - x_n = k$ definiert. Mit Hilfe des wachstumsbegrenzenden Faktors wird dann das diskrete logistische Wachstum durch die Differenzgleichung

$$x_{n+1} - x_n = k \cdot x_n \cdot \left(1 - \frac{x_n}{G}\right)$$

definiert. Setzt man G = 1, dann erhält man

$$x_{n+1} = -k \cdot x_n^2 + (k+1) \cdot x_n,$$

respektive die Iterationsfunktion:

$$\varphi(x) = -k \cdot x^2 + (k+1) \cdot x,$$

In Abhängigkeit von *k* erhält man entweder Konvergenz gegen 1 oder periodisches oder chaotisches Verhalten.

Wenn der Betrag der Steigung der Iterationsfunktion im Fixpunkt kleiner als 1 ist, dann konvergiert die Iteration. Im Cobweb-Diagramm (Abbildung 4) sieht man dies sehr schön und erkennt den Zusammenhang mit dem Fixpunkt-Satz.

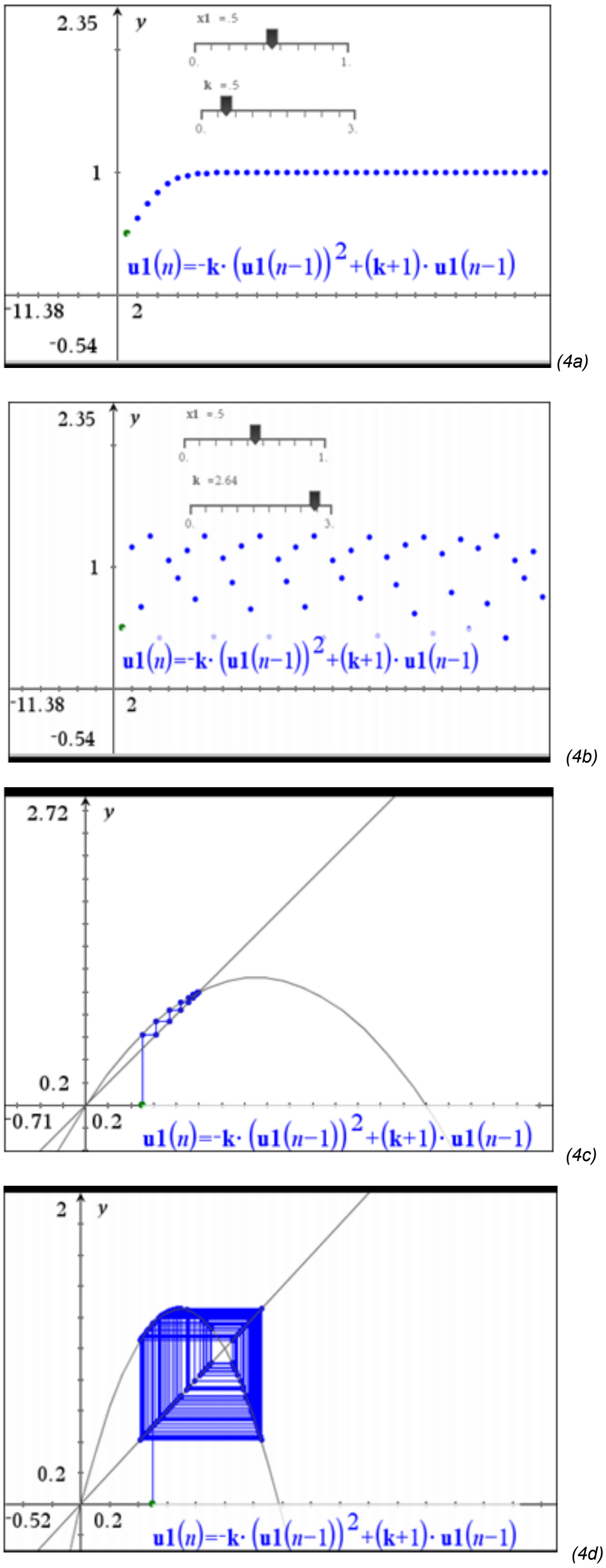

Abb.1a-4b: Diskretes logistisches Wachstum

3. Verallgemeinertes Heronverfahren

Im schon erwähnten Heft [1] wird das Heron-Verfahren ausführlich erklärt und eine offene Aufgabe dient der Verallgemeinerung.

Heron (Quadratwurzel): Aus $x^2 = a$ mit $a > 0$ folgt,

$$x = \frac{a}{x} = \varphi(x)$$

Diese Iterationsfunktion φ ist jedoch nicht geeignet. Ist x_1 irgendein Näherungswert für die Wurzel aus a, dann ist

$$\frac{a}{x_1} > \sqrt{a}$$

und umgekehrt. Es ist deshalb naheliegend, als nächste Näherung einen Mittelwert, z.B. den arithmetischen zu nehmen:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{a}{x} \right) \quad \text{resp.} \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$$

Diese Iteration konvergiert bekanntlich sehr rasch.

1. Verallgemeinerung (k-te Wurzel):

Es scheint naheliegend die Methode auf höhere Wurzeln zu verallgemeinern. Aus $x^k = a$, $(a > 0)$ folgt:

$$x = \frac{a}{x^{k-1}}$$

Ist x_1 irgendein Näherungswert und ist

$$x_1 < \sqrt[k]{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{x_1^{k-1}} > \sqrt[k]{a}$$

und umgekehrt. Dies führt auf die Iteration

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}} \right)$$

Diese Verallgemeinerung konvergiert jedoch nur für $k < 4$. Für $k > 3$ ist die Lipschitzbedingung (s.o.) für kein offenes Intervall, welches x_* enthält, erfüllt.

2. Verallgemeinerung: *k*-te Wurzel mit gewichtetem Mittelwert (gewichtetes arithmetisches Mittel):

Das arithmetische Mittel

$$m = \frac{a+b}{2}, \ a < b$$

teilt das Intervall $[a,b]$ im Verhältnis 1:1. Möchte man dieses Intervall in einem andern Verhältnis u:v teilen, dann wird dies durch das **gewichtete arithmetische Mittel**

$$m' = \frac{v \cdot a + u \cdot b}{u + v}$$

bewirkt, wie leicht nachgerechnet werden kann. Betrachtet man die beiden erwähnten Näherungen x_1 und x_1'

$$x_1' = \frac{a}{x_1^{k-1}}$$

für die *k*-te Wurzel

$$x_* = \sqrt[k]{a}$$

etwas genauer, dann stellt man fest, dass das arithmetische Mittel von x_1 und x_1' nicht besonders gut als nächste Näherung geeignet ist. Setzen wir $x_1 = x_* + \Delta x$ ($\Delta x \approx 0$, so dass Summanden, welche die zweite, dritte, vierte etc. Potenz von Δx enthalten, vernachlässigt werden können), dann ist

$$\begin{aligned} x_1' = \frac{a}{x_1^{k-1}} &= \frac{x_*^k}{(x_* + \Delta x)^{k-1}} \\ &\approx \frac{x_*^k}{x_*^{k-1} + (k-1) \cdot \Delta x \cdot x_*^{k-2}} \\ &= \frac{x_*^2}{x_* + (k-1) \cdot \Delta x} \cdot \frac{x_* - (k-1) \cdot \Delta x}{x_* - (k-1) \cdot \Delta x} \\ &= \frac{x_*^2 \cdot (x_* - (k-1) \cdot \Delta x)}{x_*^2 - (k-1)^2 \cdot (\Delta x)^2} \approx x_* - (k-1) \cdot \Delta x \end{aligned}$$

Vergleicht man die beiden Näherungen $x_1 = x_* + \Delta x$ und $x_1' \approx x_* - (k-1) \cdot \Delta x$, dann teilt x_* das Intervall $[x_1, x_1']$ ungefähr im Verhältnis $1:(k-1)$. Folglich ist es naheliegend, als nächsten Näherungswert den gewichtetet Mittelwert

$$x_2 = \frac{(k-1) \cdot x_1 + x_1'}{k}$$

zu verwenden. Man erhält die Iterationsfunktion

$$\varphi(x) = \frac{(k-1) \cdot x + \dfrac{a}{x^{k-1}}}{k} \quad \text{resp.} \quad x_{n+1} = \frac{(k-1) \cdot x_n + \dfrac{a}{x_n^{k-1}}}{k}$$

Damit kann jede *k*-te Wurzel aus einer positiven reellen Zahl iterativ approximiert werden. In der nachstehenden Abbildung 5 sieht man, wie sowohl der Wurzelexponent k wie auch der Radikand *r* und der Anfangswert a1 der Iteration mit einem Schieberegler verändert werden können. Weil die Steigung der Iterationsfunktion im Fixpunkt verschwindet, ist die Konvergenz besonders gut.

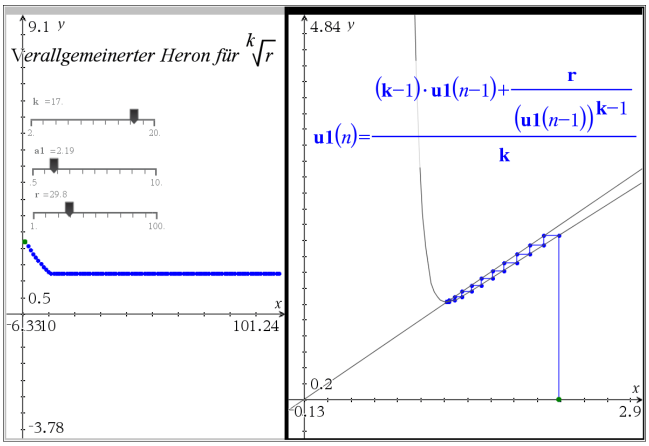

Abb.5: Verallgemeinertes Heron-Verfahren

Bemerkung: Das Newton-Verfahren, welches jedoch die Analysis voraussetzt, führt auf dasselbe Ergebnis. Die vorliegende Herleitung zeigt, wie auch mit elementaren Mitteln ein universelles Verfahren entwickelt werden kann.

Literatur

[1] B. Frei, R. Hugelshofer, R. Märki: *Funktionen und Modelle, kontinuierlich und diskret*; Texas Instruments 2014

[2] H. Heuser: *Lehrbuch der Analysis*, *Teil 2*; Teubner 1981

Autor:
Robert Märki (T^3-Schweiz)