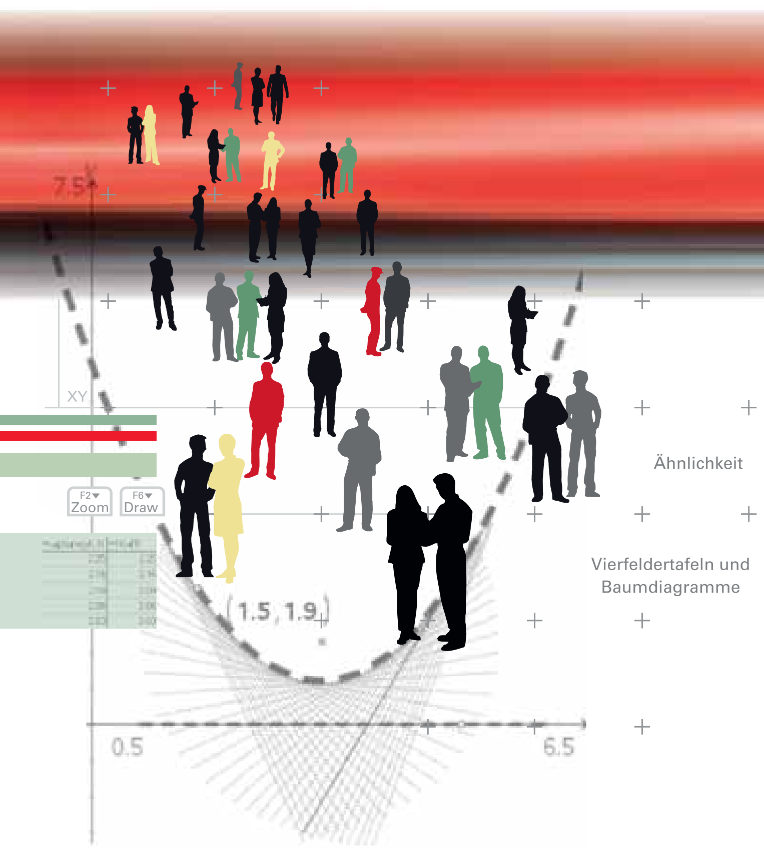
T³ DEUTSCHLAND

CAliMERO

Computer-Algebra im Mathematikunterricht: Entdecken, Rechnen, Organisieren

METHODISCHE UND DIDAKTISCHE HANDREICHUNG
BAND 6

Regina Bruder, Wilhelm Weiskirch (Hrsg.)



Niedersachsen

CAliMERO

Computer-Algebra im Mathematikunterricht: Entdecken, Rechnen, Organisieren

METHODISCHE UND DIDAKTISCHE HANDREICHUNG
BAND 6

Regina Bruder, Wilhelm Weiskirch (Hrsg.)

Die Materialien entstanden im Rahmen eines Schulversuches des Landes Niedersachsen mit dem Thema:
Computer-Algebra-Systeme im Mathematikunterricht der Jahrgänge 7-10 des Gymnasiums
hier: Ein Schulversuch zur Entwicklung eines Unterrichtskonzepts sowie von Materialien zum Einsatz im Unterricht mit wissenschaftlicher Begleitung

Die wissenschaftliche Begleitung wurde durch Frau Prof. Dr. Regina Bruder von der TU Darmstadt übernommen, Herr StD Wilhelm Weiskirch vom Ratsgymnasium Stadthagen koordinierte die Durchführung.

Unterstützt wurde der Schulversuch von der Firma Texas Instruments, die dem Verein n-21 angehört, durch die Bereitstellung der wissenschaftlichen Begleitung, die Übernahme der Veröffentlichungskosten und die Finanzierung von Arbeitstagungen.

Verlag:
Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Zentrum für Lehrerbildung

Vorwort

Liebe Kolleginnen, liebe Kollegen:

Dieses Buch ist in einem Schulversuch des Landes Niedersachsen extra zu dem Zweck entwickelt worden, um mit dem Taschencomputer (TC) ein durchgängiges Konzept für einen effektiven Unterricht zu haben. Neben neu entwickelten Aufgaben wurden auch Aufgaben aus Lehrbüchern ausgewählt, die speziell für einen Unterricht mit dem Einsatz eines TC geeignet sind.
Im Schulversuch konnte gezeigt werden, dass ein Unterricht mit diesem Aufgabenmaterial und dem Einsatz eines Taschencomputers einen Mehrwert an mathematischer Kompetenz erbringen bzw. diese wesentlich unterstützen kann. Es konnte auch gezeigt werden, dass durch den Einsatz des Taschencomputers die Kommunikation der Schülerinnen und Schüler unterstützt und eine Vorgehensreflexion gefördert wurde. Von großer Bedeutung für eine erfolgreiche Arbeit mit einem Taschencomputer ist ein ganzheitliches Unterrichtskonzept, in dem darauf geachtet wird, dass neben offenen, kreativitätsfördernden Aufgaben mit Rechnerunterstützung immer wieder auch mathematisches Grundkönnen ohne Rechner gefördert und eingefordert wird.
Um den Schülerinnen und Schülern mehr Verantwortung für ihr eigenes Lernen zu übertragen, ist es sinnvoll, ihnen Gelegenheit zur Selbsteinschätzung vor einer bewerteten Leistungskontrolle zu geben. Mit den "Ich kann ..."-Fragen werden die zum jeweiligen Thema wichtigsten inhaltlich gebundenen Fähigkeiten und Fertigkeiten der jeweiligen Unterrichtseinheit beschrieben.
Die Aufgabensammlungen für die einzelnen Unterrichtseinheiten sind so zusammengestellt, dass sie die in den Bildungsstandards geforderten Kompetenzen unterstützen und fördern. Zu dem Themenheft für Schülerinnen und Schüler gibt es entsprechend entwickelte Handreichungen für Sie.

Dieses sechste Themenheft hat vier Kapitel.

1. **Ähnlichkeit**
2. **Vierfeldertafeln und Baumdiagramme**
3. **TC-Hilfen (nur Schülermaterial)**
4. **Kopfübungen - Basiswissen**

Ausgehend vom umgangssprachlichen Begriff „ähnlich“ werden mathematische Kriterien für „Ähnlichkeit“ erarbeitet, der mathematische Begriff definiert und vom umgangssprachlichen abgegrenzt. Die zentrische Streckung wird erarbeitet und geübt, deren Eigenschaften hinsichtlich Streckenlängen, Flächen und Volumina werden durch verschiedene Aufgaben hergeleitet. Anschließend steht die quantitative Untersuchung des Zusammenhanges zwischen Streckfaktor und Flächeninhalt bzw. Volumen im Mittelpunkt. Nachdem die Ähnlichkeit und deren mathematische Fassung sowie die zentrische Streckung bekannt sind, geht es um die Vertiefung und Festigung des Gelernten. In einer Langzeitaufgabe soll man sich arbeitsteilig mit historischen Messgeräten befassen und die Mathematik herausarbeiten, die diese Messgeräte mit dem Unterrichtsthema verbindet. Die Ähnlichkeit und die zentrische Streckung werden an vielfältigen Situationen vertieft und angewendet. Dazu dienen sowohl innermathematische Aufgaben als auch solche, in denen der Anwendungsbezug besonders deutlich wird. Die Strahlensätze werden im Kerncurriculum nicht explizit erwähnt. Sie werden daher nicht bewiesen. Ihre Umkehrung wird nicht thematisiert. Nachdem Ähnlichkeit, zentrische Streckung und Verhältnisgleichungen an vielfältigen Problemstellungen eingeführt, vertieft und angewendet wurden, sollen diese mathematischen Fertigkeiten jetzt für Messungen im Gelände nutzen.

Dabei sollen die Messungen von den Schülerinnen und Schülern selbstständig geplant und durchgeführt werden. Das Geometrie-Programm „CABRI GEOMETRE“ kann hier zur Veranschaulichung und Dynamisierung der Sachverhalte dienen. Problemorientierte Zugänge führen zur Definition des Tangens eines Winkels im rechtwinkligen Dreieck. Es wird herausgearbeitet, dass ähnliche rechtwinklige Dreiecke in ihren Kathetenverhältnissen übereinstimmen. Bei ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken können aber auch andere Längenverhältnisse untersucht werden. Dieses führt auf die Definition des Sinus und des Kosinus.

Daten lassen sich häufig so gliedern, dass sie zwei Merkmalen mit jeweils zwei verschiedenen Ausprägungen zugeordnet werden können. Die Vierfeldertafel wird als neue Darstellungsmöglichkeit für Daten mit zwei Merkmalen vermittelt. Die Interpretation der Einträge wird erarbeitet. Die Übertragung in das Baumdiagramm schließt sich an. Während die Vierfeldertafel als wesentliches Analyseelement verwendet wird, greift man das Baumdiagramm nur im Sinne der Wiederholung im Spiralcurriculum und als Ergänzung auf. Der Weg führt also von der Vierfeldertafel zum Baumdiagramm. Dabei haben die absoluten Häufigkeiten Vorrang vor den relativen. Vierfeldertafel und umgekehrte Vierfeldertafel sind gleichwertig. Eine Version ist also ausreichend. Dagegen stecken im Baumdiagramm und im umgekehrten Baumdiagramm unterschiedliche Informationen. Deshalb sollten stets beide Baumdiagramme angefertigt werden. Neben der bekannten Argumentation mit den absoluten Häufigkeiten soll erstmals auch mit den relativen Häufigkeiten bei der Berechnung von bedingten Wahrscheinlichkeiten argumentiert werden. Hierbei ist immer der Bezug zu den absoluten Häufigkeiten herauszuarbeiten. Die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten kann auf verschiedene Weise erfolgen. Es können absolute und relative Häufigkeiten verwendet werden. Die verschiedenen Berechnungsarten stehen gleichberechtigt nebeneinander. Jeweilige Vor- und Nachteile werden diskutiert.

Den Abschluss bilden einige sogenannte Kopfaufgaben und Aufgaben zum Basiswissen.
Vermischte Kopfübungen sind eine **rituelle Lerngelegenheit** für das Wachhalten von mathematischem Grundwissen aus früheren Themen und Klassenstufen. Sie enthalten jeweils Grundaufgaben bzw. deren Umkehrungen zu verschiedenen nicht zum aktuellen Stoff gehörenden Begriffen, Verfahren oder Zusammenhängen, die dauerhaft verfügbar sein sollen. Sie sind Teil einer Selbsteinschätzung der Lernenden mit dem Ziel, Aktivitäten zum Füllen individueller Lücken anzuregen.
In jedem Unterrichtsbaustein lernen die Schülerinnen und Schüler wichtige mathematische Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren sowie deren typische Anwendungen kennen. Diese Lerninhalte sind auch für erfolgreiches Weiterlernen von zentraler Bedeutung. Wir nennen solche Lerninhalte kurz **Basiswissen.**
In diesem Teil finden Sie Aufgaben, die alle wichtigen Basiskompetenzen der vergangenen Jahre aus den Bereichen Zahl, Messen, Raum und Form, Funktionale Zusammenhänge sowie Daten und Zufall wiederholen. Hier finden Sie einfache Aufgaben, für den Fall, dass die Schülerinnen und Schülern wenig Erinnerung haben, aber auch komplexere Aufgaben, um zu testen, wie viel noch gekonnt wird. Die Aufgaben aus diesem Teil helfen durch regelmäßige eigenständige Arbeit die Wissenslücken wieder zu schließen, die Schülerinnen und Schüler erinnern sich an mathematische Kenntnisse und mobilisieren ihre Fertigkeiten sowie Fähigkeiten. Langfristig kann sich so eine hohe mathematische Kompetenz entwickeln und ein gutes Basiswissen entwickeln. Diese Aufgaben zum Basiswissen sind so gestaltet worden, dass sie gleichzeitig eine Vorbereitung auf das nächste Kapitel sind.
Die Autoren dieses Themenheftes wünschen Ihnen mit dem Taschencomputer und den Arbeitsmaterialien im Verbund mit den Handreichungen viel Erfolg!
Bergkirchen im August 2009

INHALTSVERZEICHNIS

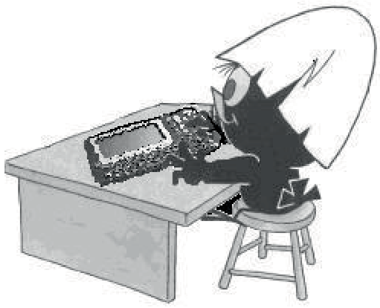
Ähnlichkeit

Vierfeldertafeln und Baumdiagramme

Training

C A l i M E R O

Computer-Algebra im Mathematikunterricht
Entdecken, Rechnen, Organisieren

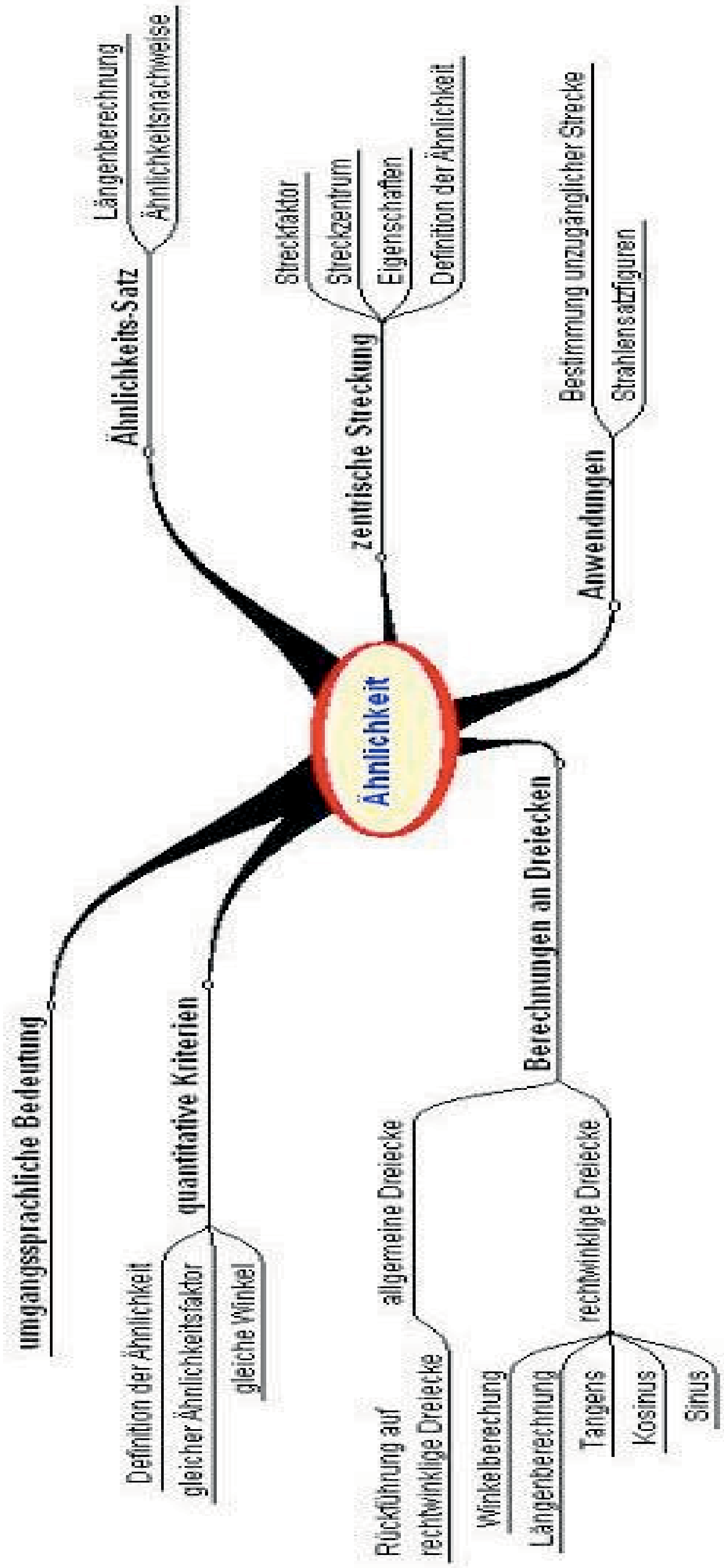


Ähnlichkeit

L e h r e r m a t e r i a l i e n

Überblick über den Unterrichtsverlauf

Mind Map mit Inhalten



Prozess- und inhaltsbezogene Kompetenzen

Anhand dieses Unterrichtsmaterials können bei entsprechender methodischer Umsetzung folgende prozessbezogenen Kompetenzen des Kerncurriculums von den Schülerinnen und Schülern schwerpunktmäßig erworben werden:

Mathematisch argumentieren	Probleme mathematisch lösen	Mathematisch modellieren	Mathematische Darstellungen verwenden	Mit symbolischen, formalen, …	kommunizieren
• erläutern präzise mathematische Zusammenhänge und Einsichten unter Verwendung der Fachsprache • kombinieren mathematisches Wissen für Begründungen und Argumentationsketten und nutzen dabei auch formale und symbolische Elemente und Verfahren • bauen mehrschrittige Argumentationsketten auf, analysieren und bewerten diese • geben Begründungen an, überprüfen und bewerten sie	• stellen sich inner- und außermathematische Probleme und beschaffen die zu einer Lösung noch fehlenden Informationen • wählen geeignete heuristische Strategien zum Problemlösen aus und wenden diese an	• analysieren und bewerten verschiedene Modelle im Hinblick auf die Realsituation	• zeichnen Schrägbilder von Körpern, entwerfen Netze und stellen Modelle her	• formen Terme um, ggf. auch mit einem Computer-Algebra-System • wählen geeignete Verfahren zum Lösen von Gleichungen	• teilen ihre Überlegungen anderen verständlich mit, wobei sie vornehmlich die Fachsprache benutzen • präsentieren Problembearbeitungen, auch unter Verwendung geeigneter Medien • verstehen Überlegungen von anderen zu mathematischen Inhalten, überprüfen diese auf Schlüssigkeit und Vollständigkeit und gehen darauf ein • beurteilen und bewerten die Arbeit im Team und entwickeln diese weiter

Mit diesem Unterrichtsmaterial werden folgende inhaltsbezogenen Kompetenzen vermittelt:

Zahlen und Operationen	Größen und Messen	Raum und Form	funktionaler Zusammenhang	Daten und Zufall
• lösen Gleichungen in einfachen Fällen algebraisch mithilfe von Umkehroperationen	• berechnen Streckenlängen und Winkelgrößen mithilfe von Ähnlichkeitsbeziehungen und trigonometrischen Beziehungen	• erkennen und begründen Ähnlichkeiten • erfassen und begründen Ähnlichkeit geometrischer Objekte und nutzen diese Eigenschaft im Rahmen des Problemlösens zur Analyse von Sachzusammenhängen	• erkennen funktionale Zusammenhänge als Zuordnungen zwischen Zahlen und zwischen Größen in Tabellen, Graphen, Diagrammen und Sachtexten, beschreiben diese verbal, erläutern und beurteilen sie • identifizieren und klassifizieren Funktionen in Tabellen, Termen, Gleichungen und Graphen	

Hinweise zu rechnerspezifischen und rechnerfreien Fertigkeiten

Rechnerfreie Fertigkeiten

Obwohl die Einheit „Ähnlichkeit" mit Verwendung des TC als Werkzeug unterrichtet wird, sollen bestimmte Fertigkeiten von den Schülerinnen und Schülern auch rechnerfrei erworben und beherrscht werden. Diese Fertigkeiten sollen in der Klassenarbeit oder in Kurztests nachgewiesen beziehungsweise abgeprüft werden. Folgende rechnerfreie Fertigkeiten erscheinen uns relevant:
Die Schülerinnen und Schüler sollen:

1. eine zentrische Streckung auf dem Papier mithilfe des Geodreiecks und des Zirkels zu gegebenem Streckfaktor und Zentrum ausführen,
2. einfache Verhältnisgleichungen lösen $\frac{a}{x+b}=\frac{c}{d}$,
3. ähnliche Figuren in anderen Figuren finden und nachweisen und
4. die Auswirkungen von zentrischen Streckungen auf Flächen- und Rauminhalte begründen.

CAS-Fertigkeiten

Im Umgang mit dem TC sollen die Schüler am Ende der Einheit über folgende Fertigkeiten verfügen:

1. mithilfe des Befehls „Streckung“ eine gegebene Figur zentrisch strecken,
2. Messdaten aus dem Geometriemenü in eine Data-Matrix einlesen und auswerten (optional),
3. Verhältnisgleichungen mithilfe des SOLVE-Befehls lösen,
4. Sin-, Cos- und Tan-Werte gegebener Winkelgrößen berechnen sowie
5. Winkelgrößen zu gegebenen Sin-, Cos- und Tan-Werten berechnen.

Thema 1: Ähnlichkeit und zentrische Streckung	**Dauer:** 7 Stunden
Ausgehend vom umgangssprachlichen Begriff „ähnlich“ werden mathematische Kriterien für „Ähnlichkeit“ erarbeitet, der mathematische Begriff definiert und vom umgangssprachlichen abgegrenzt. Die zentrische Streckung wird erarbeitet und geübt, deren Eigenschaften hinsichtlich Streckenlängen, Flächen und Volumina werden durch verschiedene Aufgaben hergeleitet.	
Besondere Materialien/Technologie: LM 1.1 bis LM 1.6 (Folienvorlagen) SM 1.1 bis SM 1.10; TC-Hilfen	

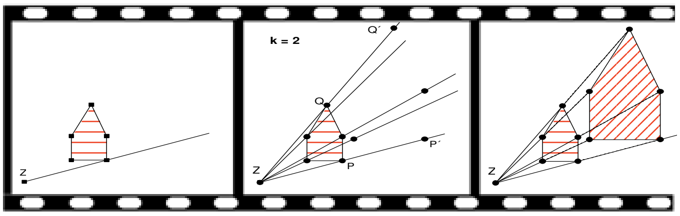
Ablauf der Stunde 1:

Inhalt	Medien	Kommentar
Einstieg: Präsentation der Folien zur Ähnlichkeit (LM 1.1, LM 1.2). *„Entscheide, welche Objekte Du als ähnlich ansiehst und begründe.“*	Folien LM 1.1, LM 1.2	
Erarbeitung: Im Unterrichtsgespräch wird der umgangssprachliche Ähnlichkeitsbegriff ausgeschärft (Farben, Formen, Funktionen, Verhaltensweisen, Gattung, …). Für die mathematische Definition braucht man quantitative Kriterien. Diese sollen die Schüler anhand von Aufgabe 1 erarbeiten: z. B. Gleichheit von Streckenverhältnissen und Winkeln.	SM 1.1	
Zusammenfassung: **Definition:** Zwei Vielecke F und G heißen **ähnlich** zueinander, wenn gilt: • Entsprechende Winkel sind gleich groß. • Alle Seiten des Vielecks G sind k-mal so lang wie die entsprechenden Seiten des Vielecks F. Der Faktor k heißt **Ähnlichkeitsfaktor**.		Die Definition wird im Wissensspeicher gesichert. Der Begriff „entsprechend“ sollte ausführlich erörtert werden.
Vertiefung: Anhand von zwei Figuren von Escher kann – falls Zeit vorhanden ist – verdeutlicht werden, dass ähnlich erscheinende Teilfiguren nach mathematischen Kriterien nicht ähnlich sind (unterschiedliche Winkel bei den Fischen verschiedener Größe in LM 1.4); in einem anderen Fall liegt auch Ähnlichkeit im mathematischen Sinne bei LM 1.3 vor.	Folien LM 1.3, LM 1.4	
Hausaufgabe: Aufgaben 2 und 3	SM 1.2	

Ablauf der 2. bis 4. Stunde

<table>
<tr><th>Inhalt</th><th>Medien</th><th>Kommentar</th></tr>
<tr><td>Hausaufgabe:
Besprechung der Aufgaben 2 und 3</td><td>
SM 1.2</td><td></td></tr>
<tr><td>Erarbeitung:
Impuls: „Mit einem Gummiband kann man an der Tafel Figuren vergrößern, indem man eine Markierung auf dem Band vornimmt und seine Dehnbarkeit nutzt. Macht Vorschläge!“
Schülervorschläge sammeln, Verfahren im Gespräch entwickeln.

Bearbeitung der Aufgabe 4 durch die Schüler.</td><td>Gummi-
band,
Tafel

SM 1.3</td><td>Das Verfahren kann zu zweit an der Tafel durchgeführt werden.
Alternativ kann auf die Verwendung des Bands verzichtet werden.
Es kann auch mit dem Geobrett gearbeitet werden.</td></tr>
<tr><td>Sicherung:
Definition: Eine zentrische Streckung mit Zentrum Z und Streckfaktor k ist eine Abbildung, die eine Figur F auf eine dazu ähnliche Figur G abbildet.
Verdeutlichung ggf. mit der folgenden Zeichnung aus dem Wissensspeicher:

</td><td>Wissens-
speicher

Folie
LM 1.5</td><td></td></tr>
<tr><td>Sicherung der Eigenschaften:
Entsprechende Winkel in Ausgangs- und Bildfigur sind gleich: $\alpha = \alpha'$
Ausgangsstrecke und Bildstrecke sind parallel zueinander.
Der Streckfaktor gibt die Veränderung der Streckenlänge an: $\overline{A'B'} = k \cdot \overline{AB}$</td><td></td><td>Die Eigenschaften werden lediglich aus Beobachtungen gefolgert und nicht bewiesen.</td></tr>
<tr><td>Übung:
Konstruktionsaufgaben je nach Bedarf und Zeit im Unterricht und als Hausaufgabe:
<table>
<tr><th></th><th>Bildfigur konstruieren</th><th>Streckzentrum konstruieren</th><th>Streckfaktor bestimmen</th></tr>
<tr><td>5</td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td></tr>
<tr><td>7</td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>8</td><td></td><td>X</td><td>X</td></tr>
<tr><td>9</td><td></td><td>X</td><td>X</td></tr>
<tr><td>10</td><td></td><td></td><td>X</td></tr>
</table></td><td>
SM 1.3
bis
SM 1.5</td><td>Die Aufgaben 5 – 10 dienen der Übung und Vertiefung. Die Tabelle gibt an, welcher Aufgaben-typ vorliegt.
Aufgabe 7 führt die zentrische Streckung mit-hilfe von DGS ein und sollte im Unterricht behandelt werden.</td></tr>
</table>

Ablauf der 5. und 6.Stunde

Inhalt	Medien	Kommentar
Besprechung der Hausaufgabe ggf. Aufgaben aus SM 1.3-1.5	SM 1.3 bis SM 1.5	(Siehe Kommentar Ende der 4. Stunde)
Erarbeitung Bearbeitung der Aufgabe 11: Die Schüler beobachten ver– schiedene Fälle: Bildfigur in Urbildfigur, Urbildfigur in Bildfigur, Bildstrecke auf Urbildstrecke, Fixpunkte. Sie benennen die Bedingungen, unter denen diese Fälle eintreten.	SM 1.6	Man kann diese Aufgabe arbeitsteilig bearbeiten lassen, ggf. auch mit DGS (falls Zeit vorhanden), damit man mehr Beispiele und diese dynamisch erhält.
Verallgemeinernde Sicherung (optional): Grundsätzlich gilt: • Das Streckzentrum wird als einziger Punkt auf sich selbst abgebildet (Fixpunkt). • Jede Gerade, die durch das Streckzentrum verläuft, wird auf sich selbst abgebildet (Fixgerade).	Tafel	Es ist eine Frage der individuellen Entscheidung, inwiefern man auf diese allgemeinen Aspekte der Abbildung eingehen will.
Einstieg: Flächeninhalt bei Streckungen Als Einstiegsproblem dient die Aufgabe 12: Die Diskussion ergibt, dass die Fläche nicht im selben Maße zunimmt wie der Streckfaktor.	SM 1.6	Anhand eines üblichen Fehlers in Diagrammen wird der Flächeninhalt der Bildfigur einer Streckung thematisiert.
Erarbeitung: Die quantitative Untersuchung des Zusammenhanges zwischen Streckfaktor und Flächeninhalt bzw. Volumen erfolgt in den Aufgaben 13 (händisch), 14A und 14B (mit DGS). Das zu untersuchende Problem wird dabei um die Frage nach den Volumina erweitert. **Ergebnis:** Wenn man ein Objekt mit k streckt, dann wird die Länge mit k, der Flächeninhalt mit k^2 und das Volumen mit k^3 multipliziert.	SM 1.7, SM 1.8 TC-Hilfen	Bei der Arbeit mit DGS ist eine Binnendifferenzierung empfehlenswert (14B ist anspruchsvoller als 14A). Die Vernetzung zum Thema „Funktionale Zusammenhänge“ sollte genutzt werden.
Übung Bearbeitung der Aufgaben 15 – 17	SM 1.8	
Sicherung: Bei einer Streckung mit Faktor k • verlängern sich die Strecken um Faktor k. • vergrößert sich die Fläche um Faktor k^2. • vergrößert sich das Volumen um Faktor k^3.	Wissens- speicher	Die neuen Erkentnisse werden ausgehend von der Darstellung im Wissensspeicher formuliert und erläutert.

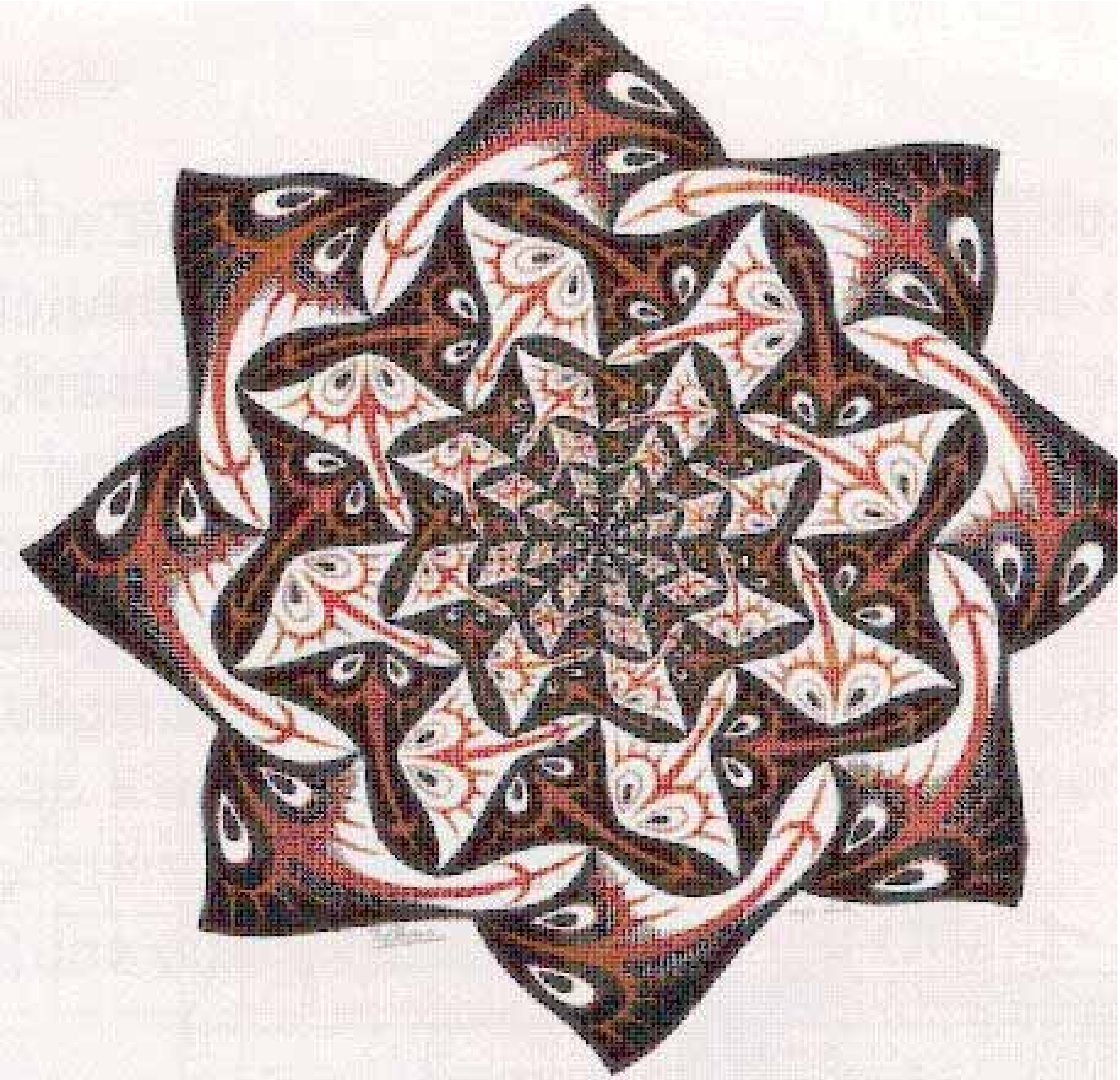
Ablauf der 7. Stunde

Inhalt	Medien	Kommentar
Einstieg und Erarbeitung: Präsentation der Folie LM 1.6 mit ähnlichen Dreiecken, in denen jeweils zwei Winkelgrößen angegeben sind. Aufgabe 18: Die Schüler sollen Vermutungen zur Ähnlichkeit äußern und diese argumentativ mithilfe der gegebenen Winkel und des fehlenden dritten Winkels begründen. Dabei muss ihnen die Lösbarkeit dieser Aufgabe ohne Längenangaben deutlich werden.	Folie LM 1.6 SM 1.9	
Sicherung: **Ähnlichkeitssatz** Wenn zwei Dreiecke in der Größe von zwei Winkeln übereinstimmen, dann sind sie ähnlich.	Wissens- speicher	
Erarbeitung: Anwendung des Ähnlichkeitssatzes Die Aufgaben 19, 20 und 21 werden noch nicht über Verhältnisgleichungen gelöst, sondern über Ähnlichkeitsargumentation. Die Schüler bestimmen den Streckfaktor aus den gegebenen Daten und können so die gesuchte Streckenlänge bestimmen. Anhand der Aufgabe 19 wird im Unterrichtsgespräch die folgende Lösungsstrategie erarbeitet: • Suche zueinander ähnliche Dreiecke, die Ähnlichkeit wird mithilfe zweier Winkel begründet. • Ordne die Seiten der Dreiecke einander zu. • Bestimme den Streckfaktor und mit diesem die gesuchte Seitenlänge. Durch den Zugang über die Ähnlichkeit der Dreiecke stellt sich die Frage nach negativen Streckfaktoren für die Schülerinnen und Schüler nicht.	SM 1.10 Aufg. 19 Tafel	Die Verhältnis- gleichungen werden erst im nächsten Kapitel thematisiert.
Übung: Bearbeitung der Aufgaben 20 und 21	SM1.10	Bearbeitung der Aufgaben in Partnerarbeit und anschließend Besprechung im Plenum

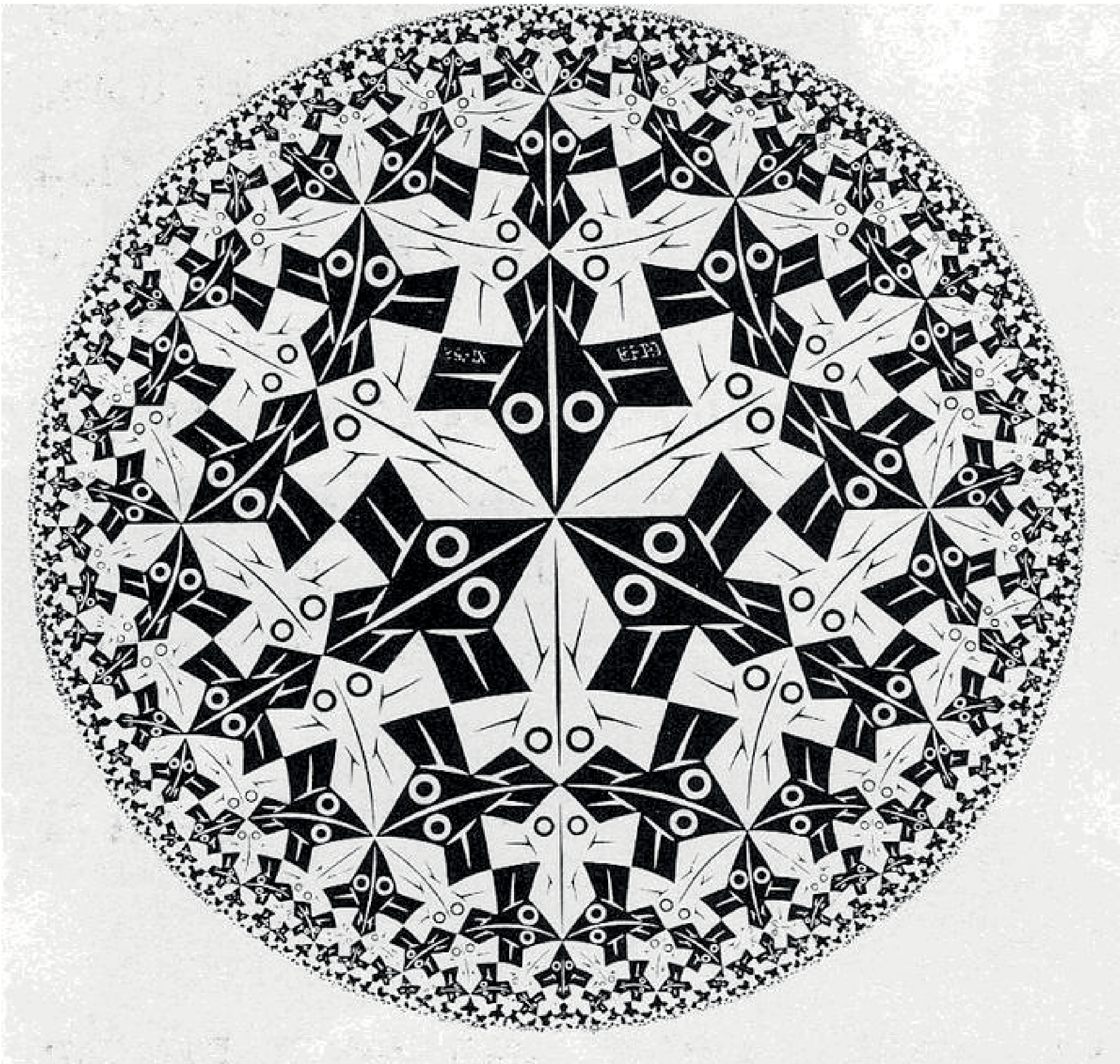
Folienvorlage LM 1.1

Folienvorlage LM 1.2

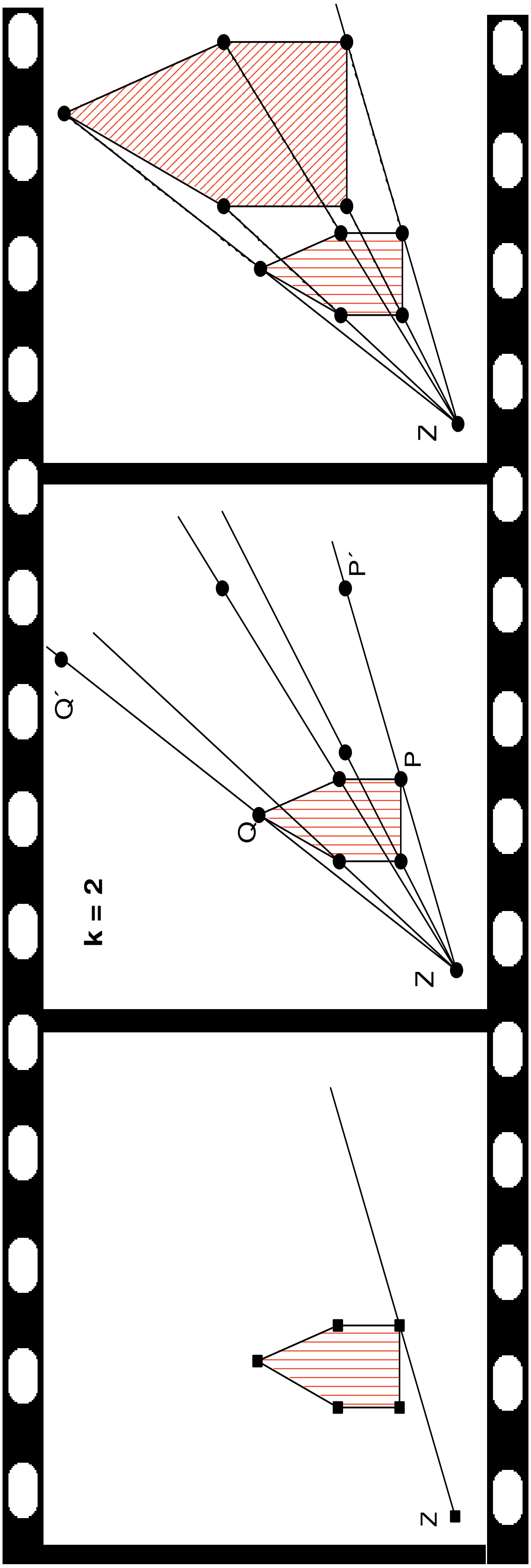
Folienvorlage LM 1.3



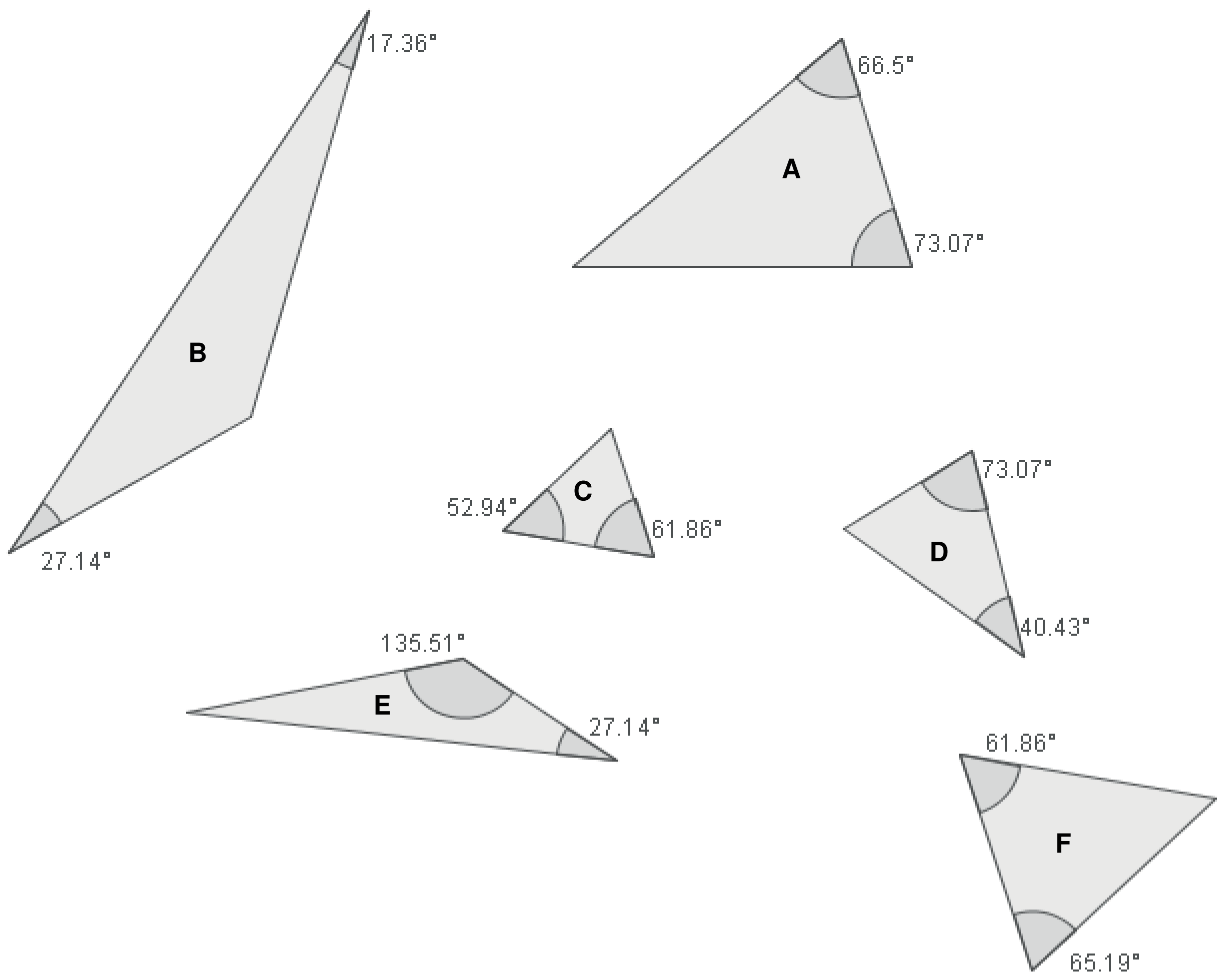
Folienvorlage LM 1.4



Folienvorlage LM 1.5



Folienvorlage LM 1.6



Thema 2.1: Langzeitaufgabe: Historische Messgeräte	**Dauer:** 1 Woche
Nachdem die Schülerinnen und Schüler die Ähnlichkeit und deren mathematische Fassung sowie die zentrische Streckung kennen gelernt haben, geht es in diesem Kapitel um die Vertiefung und Festigung des Gelernten. In einer Langzeitaufgabe sollen sich die Schülerinnen und Schüler arbeitsteilig mit historischen Messgeräten befassen und die Mathematik herausarbeiten, die diese Messgeräte mit dem Unterrichtsthema verbindet.	
Besondere Materialien/Technologie: SM 2.1.1 bis SM 2.1.2; LM 2.1.1 bis LM 2.1.3 (Anleitungen Pantograph); Modelle der Messgeräte	

Ablauf der Stunde:

Inhalt	Medien	Kommentar
Vorbemerkung: In Form von arbeitsteiligen Gruppenarbeiten sollen sich die Schüler als Langzeitaufgabe über die Verwendung, Geschichte und Funktionsweise von historischen Instrumenten (Messkeil, Messlehre, Messzange, Försterdreieck, Jakobsstab, Pantograph) informieren.	LM 2.1.1 bis LM 2.1.3 SM 2.1.1 und 2.1.2	Die Langzeitaufgabe soll zum Ende der ersten Stunde des Teiles 2.2 verteilt werden.
Arbeitsauftrag: Informiert euch im Internet oder in anderen Quellen über die Verwendung, die Geschichte und die Funktionsweise des Messgeräts. Versucht, ein oder mehrere solcher Messgeräte aus Pappe oder anderen geeigneten Materialien herzustellen. Bereitet eine geeignete Präsentation vor, in der ihr der Klasse das Messgerät vorführt und eure Mitschüler über die Mathematik informiert, die die Verwendung dieses Instruments mit unserem Unterrichtsthema verbindet	Modelle der Geräte	Die Schülerinnen und Schüler sollen auch Modelle der Geräte herstellen und diese zur Präsentation benutzen. GA
Hinweis: Bei der Vergabe der Themen ist darauf zu achten, dass das Thema für Gruppe 6 (Pantograph) deutlich komplexer als die anderen Themen ist und daher möglichst leistungsstarken Schülern übertragen werden sollte. Als Präsentationsform kann man sich z. B. auf ein Plakat verbunden mit einem mündlichen Vortrag und einer Vorführung der Instrumente verständigen.	Plakate der Schüler	Zum Pantographen liegen eine Bauanleitung und eine Schablone für ein Modell vor (LM 2.1.1 bis 2.1.3).
Hausaufgabe: Die Schüler werden beauftragt, die Präsentation der anderen Gruppen zu bewerten.		Eine solche Bewertung muss entsprechend vorbereitet sein.

Folienvorlage LM 2.1..

Bastelanleitung für einen Pantographen

Im Folgenden wird eine Bauanleitung für einen Pantographen aus Pappe gegeben. Sein Gebrauch erfordert etwas Übung und Geschick. Natürlich arbeitet dieser Papp-Pantograph nicht so ideal wie einer aus Metall. Der versierte Bastler wird keine Probleme haben, sich nach dieser Anleitung einen Pantographen aus Sperrholz zu bauen, um dann fast einen Präzisionspantographen zu haben, mit dem man wesentlich besser und genauer arbeiten kann.

Was verwendet wird - Bastelmaterialien

- Pappe, Zeichenpapier, Kleber
- vier Klammern für Musterbeutel als Gelenke
- ein dünner spitzer Bleistift, Fineliner oder Minenhalter vom Zirkel als Zeichenstift
- eine ca. 2 cm lange Holzschraube als Fahrstift
- ein Nagel, etwas länger als die Schraube, als Befestigungsstift
- eine Pinwand zum Befestigen des Pantographen und als Zeichenunterlage

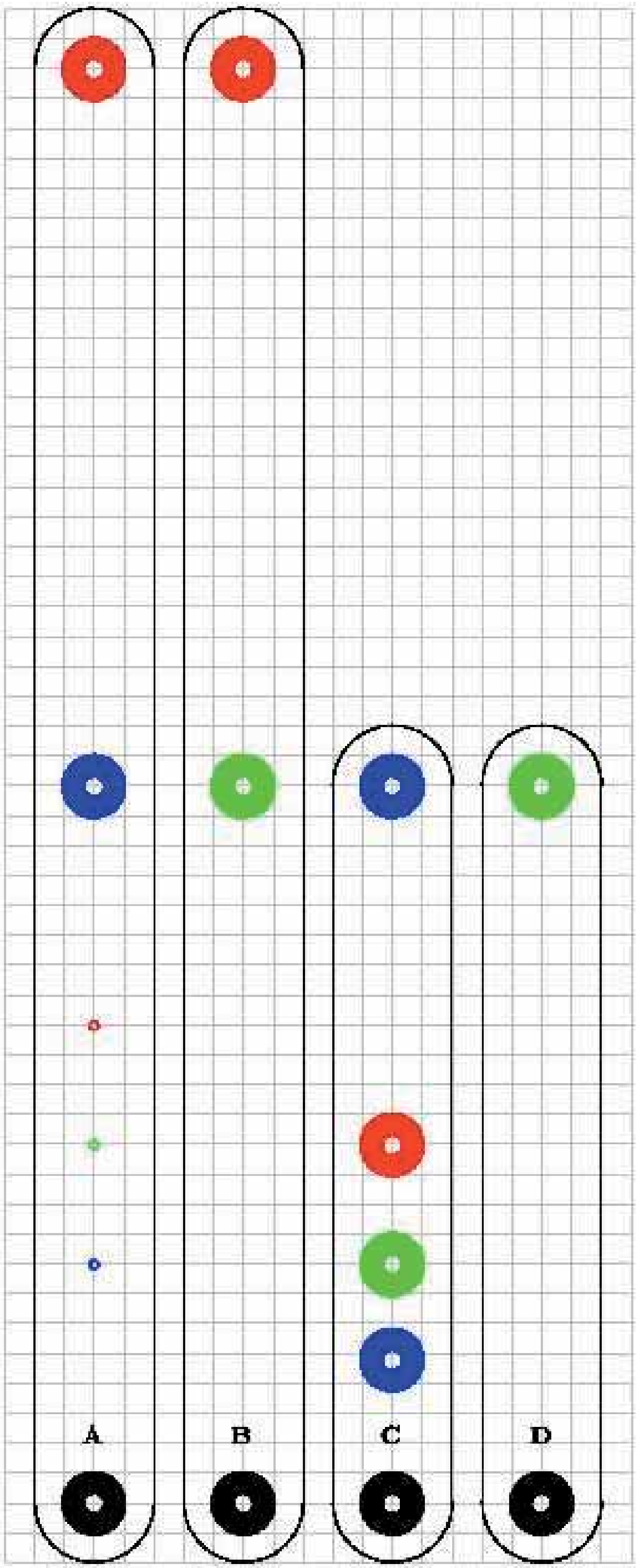
Was zu tun ist - Bastelschritte

(1) Bastelvorlage (Anlage) ausschneiden und mit dahinter geklebter Pappe verstärken.
(2) Pantograph wie in Abb. 2 zusammenbauen; dazu die entsprechenden zwei roten, blauen und grünen Kreise mit einer Lochzange oder einem Handbohrer lochen und die beiden Teile mit einer Klammer verbinden.
(3) Drei gleich große Unterlegklötzchen aus zusammengeklebter Pappe, etwa so hoch wie die Schraube, für die Teile A und B herstellen.
(4) Ein Unterlegklötzchen unter die obere Hälfte von A und eins unter die untere Hälfte von B kleben; das dritte unter den schwarzen Kreis von A legen und den Nagel durch diesen Kreis in die Pinwand schlagen - Befestigungsstift (Pol).
(5) Die Schraube durch die schwarzen Kreise in C und D fest durchdrehen – Fahrstift.
(6) Den Bleistift durch den schwarzen Kreis von B so weit wie die Schraube durchstecken – Zeichenstift.
(7) Der nunmehr arbeitsbereite Pantograph gleitet waagrecht im Abstand von ca. 2 cm über der Zeichenunterlage.

Variationen

- Der nach obiger Abbildung zusammengebaute Pantograph vergrößert die Vorlage auf das Doppelte.
- Wenn für die Position von Befestigungs- und Fahrstift, also von Nagel und Schraube, andersfarbige Kreise verwendet werden, so verändert sich das Vergrößerungsverhältnis. Die blauen Kreise entsprechen einer Vergrößerung von 1:2,5, die grünen von 1:3 und die roten von 1:4. In diesen Fällen sind C und D durch die schwarzen Kreise mittels der vierten Klammer zu verbinden.
- Wenn die Position von Fahr- und Zeichenstift vertauscht wird, so wird vom Vergrößern zum Verkleinern gewechselt.
- Mit welchen Einstellungen am Pantographen kann eine gleich große Kopie erzeugt werden?

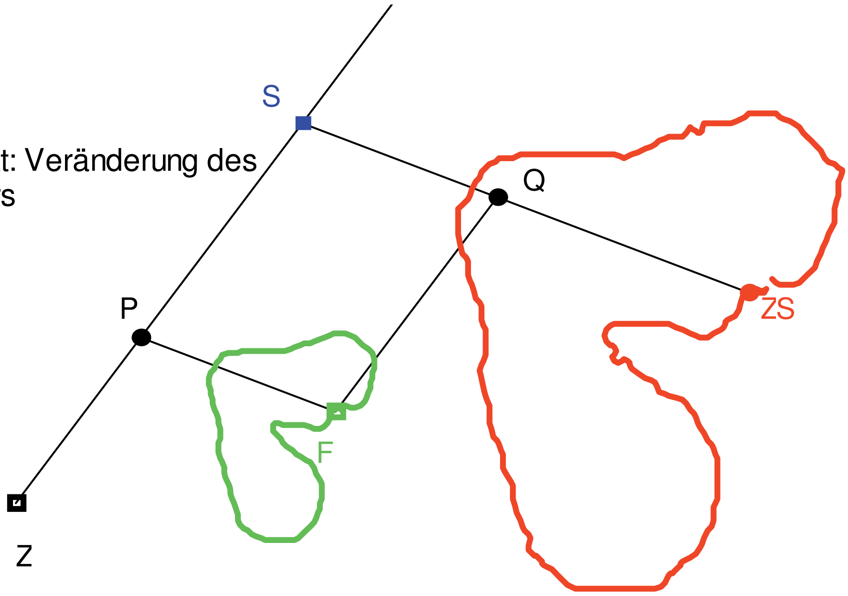
Folienvorlage LM 2.1.2

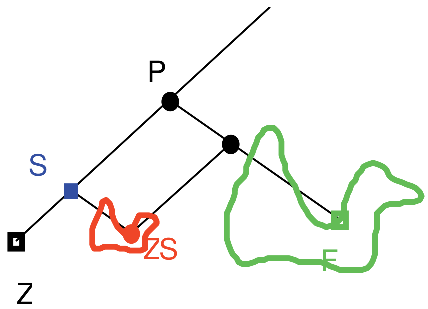


Folienvorlage LM 2.1.3

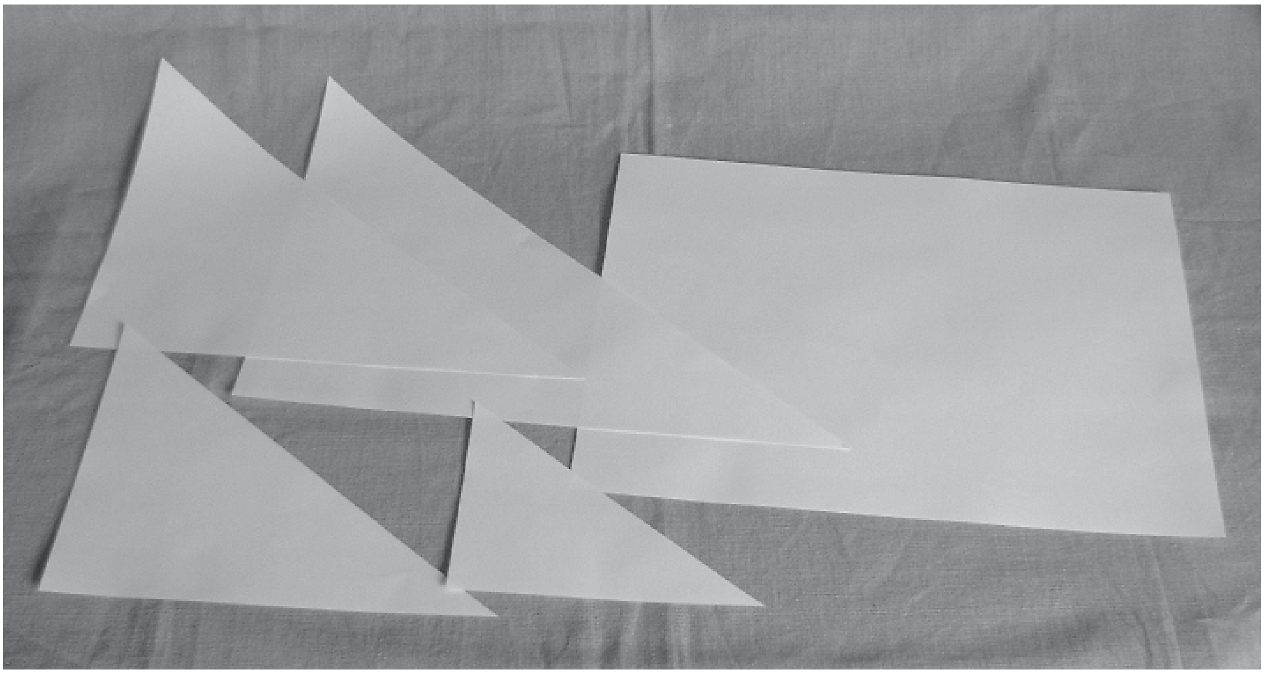
Pantograph

Blauer Punkt: Veränderung des Streckfaktors





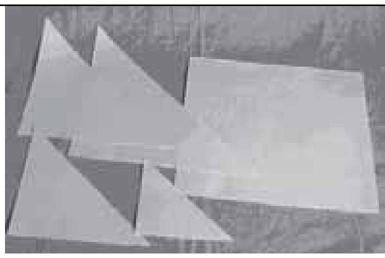
Folienvorlage LM 2.1.4

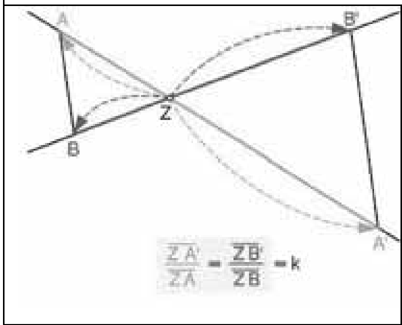
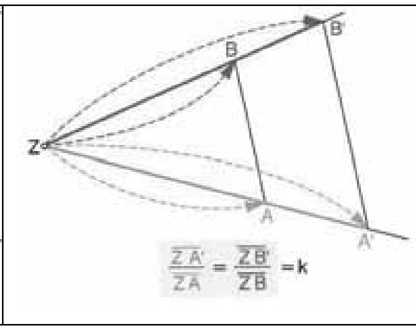
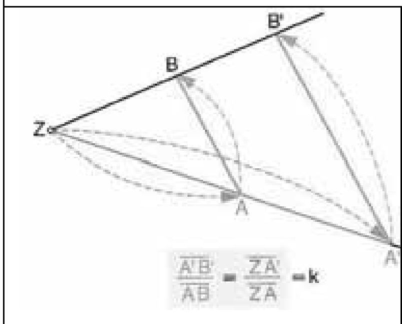
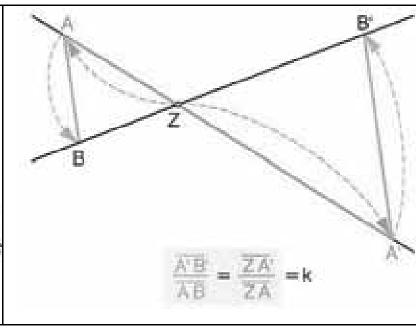


Dreieck	Kathete 1	Kathete 2	$\frac{\text{Kathete 1}}{\text{Kathete 2}}$
1			
2			
3			
4			
....			
...			

Thema 2.2: Streckenverhältnisse	**Dauer:** 5 Stunden
Die Ähnlichkeit und die zentrische Streckung sollen an vielfältigen Situationen vertieft und angewendet werden. Dazu dienen sowohl innermathematische Aufgaben als auch solche, in denen der Anwendungsbezug besonders deutlich wird. Die Strahlensätze werden im Kerncurriculum nicht explizit erwähnt. Sie werden daher nicht bewiesen. Ihre Umkehrung wird nicht thematisiert.	
Besondere Materialien/Technologie: SM 2.2.1 bis 2.2.5; Papier; OHP; Dateien „strasse.v2a“ und „trapez1.v2a	

Ablauf der Stunde 1:

Inhalt	**Medien**	**Kommentar**
Einstieg: Die Schülerinnen und Schüler sollen Verhältnisgleichungen handlungsorientiert aufstellen. 	SM 2.2.1 Aufg. 1	PA Zur Zeitoptimierung können die Materialien durch den Lehrer vorbereitet werden.
Arbeitsauftrag: Zerschneide mindestens zwei DIN–A4–Blätter entlang einer Diagonale. Schneide anschließend bei den nun vorliegenden Dreiecken verschieden breite Streifen entlang der Hypotenuse ab (s. Abb. oben). a) Miss die Längen der Katheten und trage die Werte in die Tabelle ein. Interpretiere deine Ergebnisse. b) Miss die Längen der Hypotenusen und bilde weitere Verhältnisse zwischen den Dreiecksseiten.	Papier	PA
Erarbeitung: Ziel der Bearbeitung ist, Verhältnisgleichungen an den Figuren zu entdecken. Durch die Bearbeitung und Lösung der Aufgabe wird 1. ein Bezug zum Ähnlichkeitssatz hergestellt. 2. die zentrische Streckung wieder aufgegriffen. 3. die Verhältnisgleichungen motiviert.	OHP Zerschnit-tenes Papier aus SM 2.2.1	UG

Sicherung: Als Extrakt der Bearbeitung der Aufgabe ergeben sich die Aussagen der Strahlensätze als Verhältnisgleichungen. Diese sind entsprechend zu sichern: **Entsprechende Streckenverhältnisse auf den „Strahlen“ durch Z sind gleich.**	Tafel	Die Strahlensätze kommen als Begriff nicht vor. Sie werden daher auch nicht bewiesen.
 	Tafel	Ihre Umkehrung wird nicht thematisiert.
Das Verhältnis zwischen Bild- und Ausgangsstrecke ist gleich den Streckenverhältnissen auf den Strahlen durch Z.	Tafel	Hier steht die Nutzung als Verhältnisgleichung zur Berechnung unbekannter Streckenlängen im Vordergrund.
 	Tafel	
Diese Verhältnisgleichungen sind den Schülerinnen und Schülern von der Behandlung der zentrischen Streckung bereits bekannt. Sie werden hier und im Themenkomplex der Trigonometrie lediglich wieder aufgegriffen.		
Langzeitaufgabe: Die Langzeitaufgabe wird gestellt, eine Gruppeneinteilung wird vorgenommen. In Form von arbeitsteiligen Gruppenarbeiten sollen sich die Schüler als Langzeitaufgabe über die Verwendung, Geschichte und Funktionsweise von historischen Instrumenten (Messkeil, Messlehre, Messzange, Försterdreieck, Jakobsstab, Pantograph) informieren. Die Schüler können beauftragt werden, die Präsentation der anderen Gruppen zu bewerten. Eine solche Bewertung muss entsprechend vorbereitet sein.	SM 2.1.1 SM 2.1.2 Aufg. 1 – 6	Vgl. Abschnitt 2.1

Ablauf der Stunden 2 bis 4:

Inhalt	**Medien**	**Kommentar**
Einstieg und Erarbeitung: Zur Aufgabe 2 sollen Verhältnisgleichungen aufgestellt werden. Die Lösungen der Gleichungen können zunächst z. B. mithilfe des TC ermittelt werden. Anschließend wird eine eingängige Merkregel zum Umformen einfacher Verhältnisgleichungen motiviert, die „Hosenträger-Kreuz-Methode“.	 SM 2.2.1 Aufg. 2	
Erarbeitung: Zunächst wird die „Hosenträger-Kreuz-Methode“ erarbeitet und kontextfrei geübt. Die Schüler bearbeiten die Aufgabe 3. Anschließend wird an der Tafel die „H-K-M“ vorgeführt: $\frac{4}{x+6} = \frac{2}{7}$ $4 \cdot 7 = 2 \cdot (x+6)$ $28 = 2x + 12$ $8 = x$ Die andere Aufgabe wird entsprechend vorgeführt. Die Schüler übernehmen das Tafelbild in ihr Heft. Das Wort „Hosenträger-Kreuz-Methode“ soll als Eselsbrücke dienen.	 SM 2.2.1 SM 2.2.2 Aufg. 3 – 6	
Vertiefung/Übung: Es wird vielfältig im Kontext geübt. Die Aufgaben sollen vom Lehrer geeignet ausgewählt werden. Die Verhältnisgleichungen können sowohl mit als auch ohne Hilfe des TC gelöst werden.	SM 2.2.2 bis SM 2.2.7 Aufg. 7 ff.	
Hinweis: Die Aufgabe 17 kann auch mithilfe des Geometrieprogramms bearbeitet werden. Dafür steht die Datei „strasse.v2a“ zur Verfügung.	 SM 2.2.4 Aufg. 17	 Datei „strasse.v2a
Hinweis: Die Aufgabe 21 soll mithilfe des Geometrieprogramms bearbeitet werden. Dafür steht die Datei „trapez1.v2a“ zur Verfügung.	 SM 2.2.6 Aufg. 21	 Datei „trapez1.v2a

Ablauf der Stunde 5:

Inhalt	**Medien**	**Kommentar**
Präsentation der Langzeitaufgabe: In dieser Stunde werden die Ergebnisse der Langzeitaufgaben von den Schülern präsentiert. Hierbei werden dann auch die Modelle vorgestellt. Insbesondere muss der Zusammenhang zwischen den historischen Geräten und dem Sachinhalt „Ähnlichkeit und Verhältnisgleichungen“ herausgestellt werden.	Modelle der histori-schen Geräte Folien	Die Präsentationen der Ergebnisse der Langzeitaufgabe können zum Beispiel auf Folie vorbereitet werden oder es wird eine Präsentationssoftware eingesetzt.

Thema 2.3: Messungen im Gelände	**Dauer:** 3 Stunden
Nachdem Ähnlichkeit, zentrische Streckung und Verhältnisgleichungen an vielfältigen Problemstellungen eingeführt, vertieft und angewendet wurden, sollen diese mathematischen Fertigkeiten jetzt für Messungen im Gelände genutzt werden. Dabei sollen die Schülerinnen und Schüler ihre Messungen selbstständig planen und durchführen. Das Geometrie-Programm „CABRI GEOMETRE“ kann hier zur Veranschaulichung und Dynamisierung der Sachverhalte dienen.	
Besondere Materialien/Technologie: SM 2.2.1 bis SM 2.2.6; Papier; OHP; Materialien wie in den Aufgaben angegeben; Datei „baumhoch.v2a”	

Ablauf der Stunden:

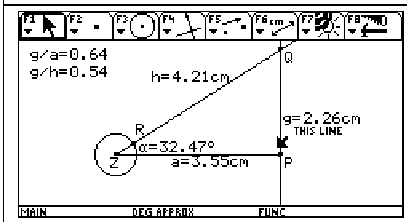
Inhalt	**Medien**	**Kommentar**
1. Aufgabe: Mithilfe eines Tafellineals und eines Maßbandes soll die Größe der durch einen Daumen verdeckten Strecke an der Tafel systematisch untersucht werden. Durch das Experiment ergibt sich die Vermutung: **Die Größe der verdeckten Strecke ist der Entfernung zur Tafel proportional.** Diese Vermutung kann mithilfe entsprechender Verhältnisgleichungen belegt werden.	SM 2.3.1 Aufg. 1	Für die Auswertung des Experiments kann der Data-Matrix-Editor heran gezogen werden. Hiermit kann die Proportionalität komfortabel untersucht werden.
2. Aufgabe: Mithilfe eines Stabes und eines Maßbandes soll eine unzugängliche Höhe wie die eines Baumes oder einer Laterne bestimmt werden. Das genaue Verfahren ist nicht vorgegeben und den Schülern überlassen.	SM 2.3.1 Aufg. 2	Die Datei „baumhoch.v2a” illustriert und dynamisiert die Situation.
3. Aufgabe: Mithilfe einer der aus der Langzeitaufgabe bekannten Methoden soll eine unzugängliche Höhe wie die des Schulgebäudes bestimmt werden. Das genaue Verfahren ist nicht vorgegeben und den Schülern überlassen.	SM 2.3.1 Aufg. 3	
4. – 6. Aufgabe: In verschiedenen Realsituationen sollen unzugängliche Entfernungen oder Streckenlängen bestimmt werden. Die genauen Verfahren sind nicht vorgegeben und den Schülern überlassen.	SM 2.3.1 Aufg. 4 bis SM 2.3.2 Aufg. 6	

Thema 3.1: Trigonometrische Beziehungen	**Dauer:** 2 Stunden
Problemorientierte Zugänge führen zur Definition des Tangens eines Winkels im rechtwinkligen Dreieck. Man stellt fest, dass ähnliche rechtwinklige Dreiecke in ihren Kathetenverhältnissen übereinstimmen. Bei ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken können aber auch andere Längenverhältnisse untersucht werden. Dieses führt auf die Definition des Sinus und des Kosinus.	
Besondere Materialien/Technologie: TC, OHP, „tangens.v2a“; „sinus1.v2a“; „sinus2.v2a“; „cosinus.v2a“; SM 3.1.1 bis SM 3.1.3; LM 3.1.1 bis LM 3.1.4	

Ablauf der Stunde 1:

Inhalt	**Medien**	**Kommentar**
Einstieg: Unter Verwendung der Abbildung eines Verkehrsschildes werden verschiedene mögliche Interpretationen der prozentualen Steigungsangabe diskutiert. In Erinnerung an die Steigung von Geraden wird diese als Verhältnis der Kathetenlängen definiert. Die Steigfähigkeit eines PKW schließt sich an.	LM 3.1.1 LM 3.1.2 SM 3.1.1 Aufg. 1, 2	Es ist auch möglich, entweder nur mit den Folien zu arbeiten oder nur die Aufgabe 1 im SM zu nutzen.
Erarbeitung des Tangens: Unter Verwendung der CABRI-Datei werden Kathetenverhältnisse bei rechtwinkligen Dreiecken untersucht und tabellarisch notiert. Ein Fazit dieser Untersuchung ist: **Ähnliche rechtwinklige Dreiecke haben dasselbe Kathetenverhältnis.** Solche Dreiecke werden z.B. als Steigungsdreiecke bei der Bestimmung einer Geradensteigung oder bei Bestimmung prozentualer Straßensteigungen benutzt. Nun kann definiert werden: **In jedem rechtwinkligen Dreieck mit dem Winkel α heißt der Quotient $\frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha}$ der Tangens von α, kurz $\tan(\alpha)$.**	SM 3.1.1 Aufg. 3 Datei „tan gens.v2a“ Tafel Tafel	Die Datei „tangens.v2a“ ist zuvor auf die Schülerrechner zu überspielen. Alternativ könnte man die Schüler verschieden große rechtwinklige Dreiecke mit festem Winkel α zeichnen lassen.
Vertiefung: Eine Untersuchung der Zuordnung des Winkels α zum Katheten-verhältnis ergibt, dass hier keine proportionale Zuordnung vorliegt. (Ggf. kann die Aufgabe auch als Hausaufgabe gestellt werden.)	SM 3.1.2 Aufg. 4	Die Daten können auch mit der Option „Collect Data“ des Rechners gesammelt werden.
Hausaufgabe: Bestimmung von Steigungswinkeln und Streckenlängen anhand der Übungsaufgaben.	SM 3.1.2 Aufg.5 SM 3.1.3 Aufg. 6, 7	Der Neigungswinkel kann z.B. durch Ausprobieren oder ‚solve’ bestimmt werden.

Ablauf der Stunde 2:

Inhalt	**Medien**	**Kommentar**
Einstieg: In der Hausaufgabe sollten Steigungswinkel bestimmt werden. Im Anschluss daran wird die Umkehrung des Tangens mitgeteilt: **Genauso wie die Wurzel die Umkehrung des Quadrierens darstellt, ist Arkustangens (arctan) die Umkehrung des Tangens.** Die Taste „tan^{-1}" leistet das Gewünschte. Dieses soll an einigen selbst gewählten Beispielen demonstriert werden.		Lückenschluss: Der Kalkül zur Winkelbestimmung wird mitgeteilt. Um Verwechslungen bei Potenzen zu vermeiden, sollte eine entsprechende Sprechweise verwendet werden.
Erarbeitung des Sinus und Kosinus: An rechtwinkligen Dreiecken können weitere Längenverhältnisse untersucht werden. Motiviert wird die Untersuchung durch das schon bekannte Bild der zerschnittenen Dreiecke. Die Untersuchung geschieht dann mithilfe der CABRI-Datei „sinus1.v2a". Der Vergleich mit anderen Katheten- und Hypotenusenlängen zeigt, dass auch hier gleiche Längenverhältnisse dieselbe Winkelgröße anzeigen.  • Winkel verändern: Ziehe an R • Dreieck verändern: Ziehe horizontal an P	SM 3.1.3 Aufg. 8 LM 3.1.3 Dateien „Sinus1.v2a" „Cosinus.v2a" OHP-Display zum TC	Die Dateien sind zuvor auf die Schülerrechner zu überspielen. Die Untersuchungen erfolgen analog zu denen beim Tangens. Eine Untersuchung für den Sinus sollte ausreichen, um den Sachverhalt auf den Kosinus zu übertragen.
Definition des Sinus und Kosinus: Es ergeben sich die Definitionen des Sinus bzw. Kosinus eines Winkels. **In jedem rechtwinkligen Dreieck mit dem Winkel α heißt der Quotient $\frac{\text{Gegenkathete von }\alpha}{\text{Hypotenuse von }\alpha}$ der Sinus von α, kurz $\sin(\alpha)$.** **In jedem rechtwinkligen Dreieck mit dem Winkel α heißt der Quotient $\frac{\text{Ankathete von }\alpha}{\text{Hypotenuse von }\alpha}$ der Kosinus von α, kurz $\cos(\alpha)$.**	Tafel Tafel	Ggf. kann mithilfe der Datei „cosinus.v2a" eine analoge Untersuchung durchgeführt werden. Diese Verhältnisse wurden in Abschnitt 2 vorbereitet und müssen hier nur wieder aufgefrischt werden.
Sind die Hypotenuse und eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks gegeben, so können die Winkelgrößen mit dem Tangens nur indirekt ermittelt werden, indem man mit dem Satz des Pythagoras die fehlende Kathetenlänge berechnet. Dies wird anhand einer Aufgabe problematisiert.	LM 3.1.4	Alternativer Ansatz zur Motivation, weitere Längenverhältnisse zu untersuchen.

Vertiefung: Für den Sinus und den Kosinus wird der Kalkül mitgeteilt, der den Winkel bestimmen lässt: **Genauso wie die Wurzel die Umkehrung des Quadrierens darstellt, ist Arkussinus (arcsin) die Umkehrung des Sinus.** Die Taste „$\sin^{-1}$“ leistet das Gewünschte. **Genauso wie die Wurzel die Umkehrung des Quadrierens darstellt, ist Arkuskosinus (arccos) die Umkehrung des Kosinus.** Die Taste „$\cos^{-1}$“ leistet das Gewünschte. Dieses soll an einigen Beispielen demonstriert werden.		Um Verwechslungen bei Potenzen zu vermeiden, sollte eine entsprechende Sprechweise verwendet werden. Es bietet sich die Sprechweise „Arkus-sinus“ bzw. „Arkus-kosinus“ an.
Hausaufgabe: Eine zum Tangens analoge Untersuchung der Zuordnung des Winkels α zum Sinus bzw. Kosinus ergibt, dass auch hier jeweils keine proportionale Zuordnung vorliegt.	SM 3.1.3 Aufg. 8b Datei „sinus2.v2a“	Ggf. kann die Untersuchung mit der Datei „sinus2.v2a“ unterstützt werden.

Folienvorlage LM 3.1.1

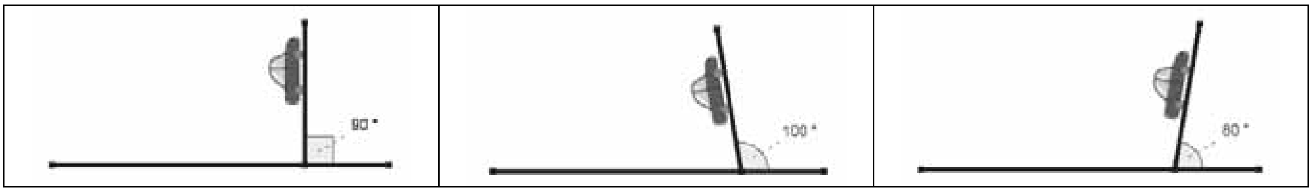
Verkehrsschild

Welche Bedeutung hat das Verkehrsschild?

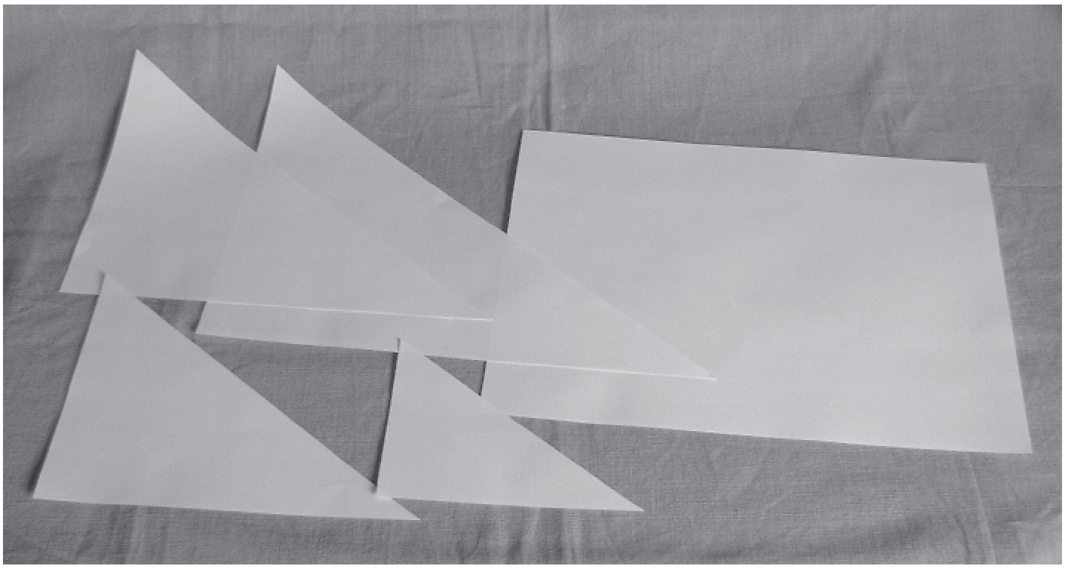
Mögliche Interpretation	**richtig**	**falsch**
12 Grad Steigung		
nur 12 von 100 schaffen es		
100 m waagerecht 12 m hoch		
100% entsprechen 90°; also 10,8°		
auf 100 m Straße 12 m Anstieg		
12 cm auf 1 m		

Folienvorlage LM 3.1.2

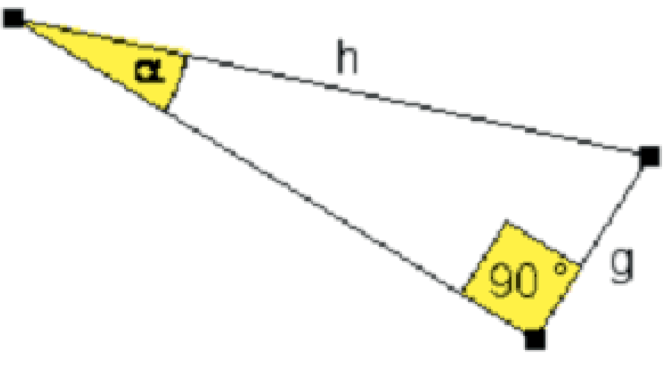
100% Steigfähigkeit des VW Touareg



Folienvorlage LM 3.1.3



Folienvorlage LM 3.1.4



h = 6 cm	g = 2 cm	α = ?

Hinweise auf weiteres Aufgabenmaterial zu trigonometrische Beziehungen:

MatheNetz 10, S. 151 – 165

Elemente der Mathematik 10, S. 194 – 198

Neue Wege 10, S. 155 – 162

Thema 3.2: Vermischte Übungen	**Dauer:** 3 Stunden
Die trigonometrischen Beziehungen sollen in vermischten Übungen eingeübt werden. Dabei müssen die Schülerinnen und Schüler eigenständig entscheiden, welche Beziehung sie anwenden und ob sie weitere Kalküle wie z. B. den Satz des Pythagoras nutzen. Im Lehrermaterial sind zu den meisten Aufgaben ausführliche Lösungen angefügt (LM 3.2). Diese sind entweder für die Lehrerin und den Lehrer zur Kontrolle gedacht, können aber auch sehr gut den Schülerinnen und Schülern zur Selbstkontrolle zur Verfügung gestellt werden.	
Besondere Materialien/Technologie: SM 3.2.1 bis SM 3.2.5, LM 3.2	

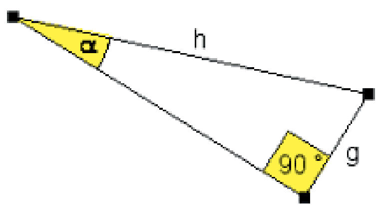
Ablauf der Stunde 1 bis 3:

Inhalt	Medien	Kommentar
Vermischte Übungen: Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten die Aufgaben zu den vermischten Übungen und wählen dazu den adäquaten Kalkül eigenständig aus.	SM 3.2.1 bis SM 3.2.4 Aufg. 1 – 13	PA
Übungen zu allgemeinen Dreiecken: Die Berechnung in beliebigen Dreiecken geschieht mithilfe von Zerlegung in oder Ergänzung zu rechtwinkligen Dreiecken. (Ohne Verwendung von Sinus- und Kosinussatz)	SM 3.2.5 Aufg. 14 – 16	Eine eigenständige Erarbeitung zu den Winkelsätzen ist nicht vorgesehen.
Weitere Übungen: Die Aufgaben sind fakultativ und situationsbedingt auszuwählen.	SM 3.2.5 bis 3.2.7 Aufg. 17 – 23	Ergänzungsmaterial

LM 3.2: Ausgewählte Lösungen zu SM 3.2.1 bis SM 3.2.7

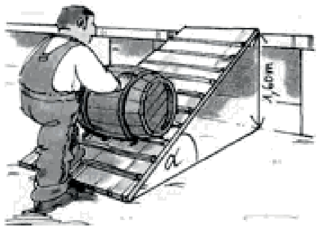
Aufgabe 5:

Im abgebildeten Dreieck sei h = 6 cm
und g = 2 cm. Berechne die Größe des Winkels α.



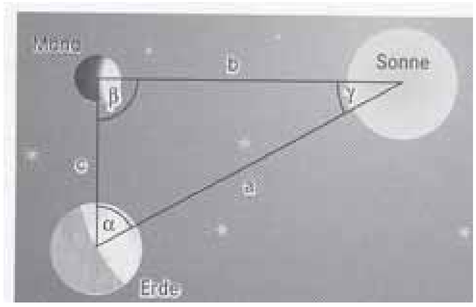
$$\sin(\alpha) = \frac{g}{h} \Rightarrow \sin(\alpha) = \frac{2\text{ cm}}{6\text{ cm}} \Rightarrow \alpha = 19{,}47°$$

Aufgabe 6:



$\sin(35°) = \frac{1{,}6\ \text{m}}{x} \Rightarrow x = 2{,}79\ \text{m}$

Aufgabe 7:



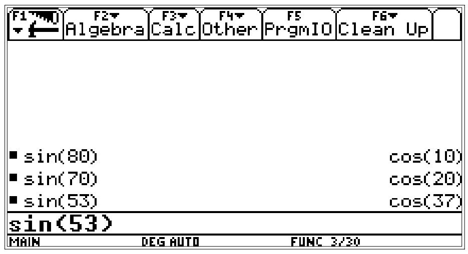
a) $\sin(3°) = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{a} = 0{,}05$

Die Sonne ist von der Erde also 20-mal weiter entfernt als der Mond.

b) $\sin(0{,}15°) = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{a} = 0{,}026$

Die Sonne ist von der Erde also mehr als 38-mal weiter entfernt als der Mond.

Aufgabe 8:

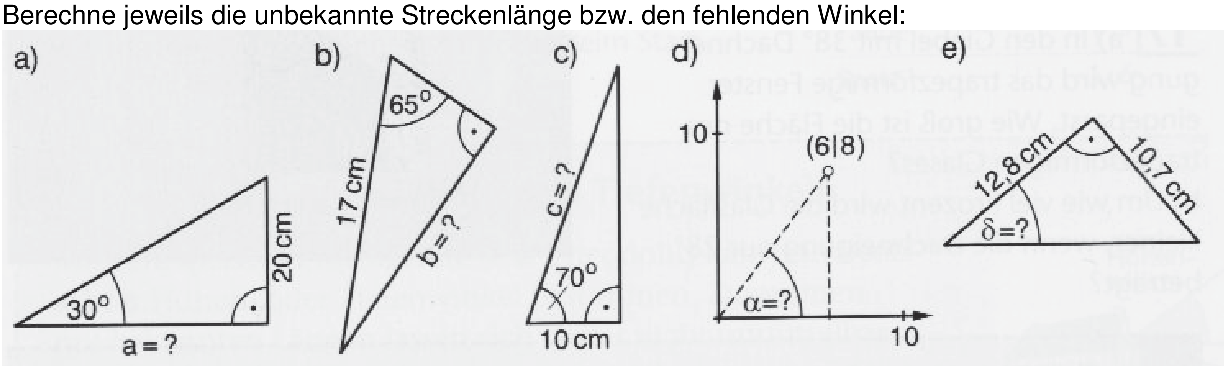


Wie kann man den Sinus eines Winkels auch mit dem Kosinus berechnen? Drücke diese Beziehung in Form einer Gleichung aus.

$\sin(\alpha) = \cos(90° - \alpha)$

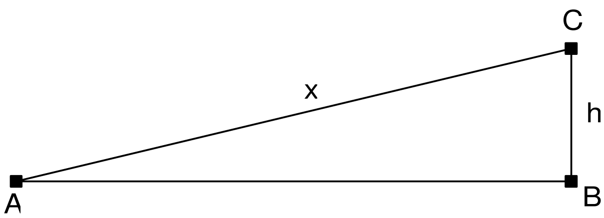
Aufgabe 9:

Berechne jeweils die unbekannte Streckenlänge bzw. den fehlenden Winkel:



a) $a = 34{,}64$ cm b) $b = 15{,}41$ cm c) $c = 29{,}24$ cm d) $\alpha = 53{,}13°$ e) $\delta = 39{,}89°$

Aufgabe 10:



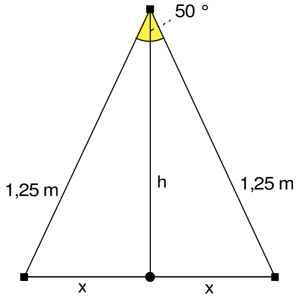
Die Brückenhöhe ist 5m.
Bei einem Neigungswinkel von 5° ergibt sich:

$\sin(5°) = \frac{h}{x} \Rightarrow \sin(5°) = \frac{5\ \text{m}}{x} \Rightarrow x = 57{,}37\ \text{m}$

Analog folgt für einen Neigungswinkel von 7°:

$\sin(7°) = \frac{h}{x} \Rightarrow \sin(7°) = \frac{5\ \text{m}}{x} \Rightarrow x = 41{,}03\ \text{m}$

Aufgabe 11:

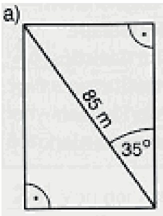


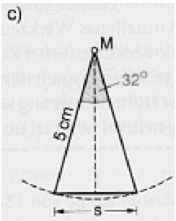
$\cos(25°) = \frac{h}{1{,}25\text{ m}} \Rightarrow h = 1{,}13\text{ m}$

$\sin(25°) = \frac{x}{1{,}25\text{ m}} \Rightarrow x = 0{,}528\text{ m}$

$2x = 1{,}056\text{ m}$

Aufgabe 12:



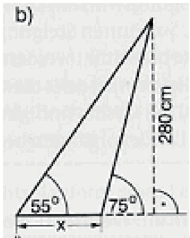


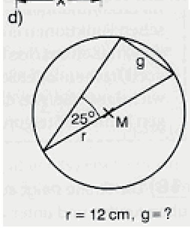
$\sin(35°) = \frac{a}{85\text{ m}} \Rightarrow a = 48{,}75\text{ m}$

$\cos(35°) = \frac{b}{85\text{ m}} \Rightarrow b = 69{,}63\text{ m}$

$u = 2a + 2b \Rightarrow u = 236{,}76\text{ m}$

$\sin(16°) = \frac{\frac{1}{2}s}{5\text{ cm}} \Rightarrow s = 2{,}76\text{cm}$





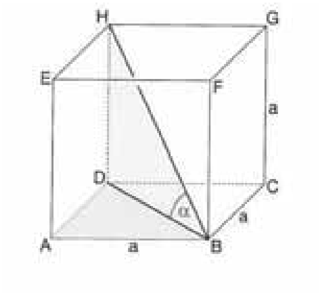
$\tan(55°) = \frac{2{,}80\text{ m}}{a} \Rightarrow a = 1{,}96\text{ m}$

$\tan(75°) = \frac{2{,}80\text{ m}}{b} \Rightarrow b = 0{,}75\text{ m}$

$x = a - b \Rightarrow x = 1{,}21\text{ m}$

$\sin(25°) = \frac{g}{24\text{ cm}} \Rightarrow g = 10{,}14\text{cm}$

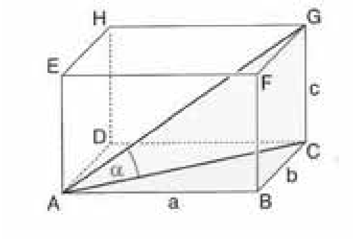
Aufgabe 14:



a) Berechnung der Länge der Flächendiagonale:
$d^2 = a^2 + a^2 = 2 \cdot a^2 \Rightarrow d = a \cdot \sqrt{2}$
Berechnung der Länge der Raumdiagonale:
$D^2 = d^2 + a^2 = a^2 + a^2 + a^2 = 3 \cdot a^2 \Rightarrow D = a \cdot \sqrt{3}$
Berechnung der Größe des Winkels zwischen den Diagonalen:
$\cos(\alpha) = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 35{,}26°$

b) Veränderung des Winkels α bei Veränderung der Kantenlänge: keine

Aufgabe 15:



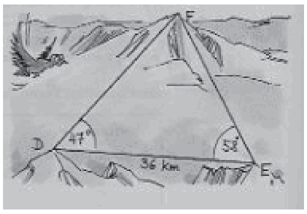
a) Berechnung der Länge der Flächendiagonale:
$d^2 = 8^2 + 4^2 \Rightarrow d = \sqrt{80}$
Berechnung der Länge der Raumdiagonale:
$D^2 = 8^2 + 4^2 + 3^2 \Rightarrow D = \sqrt{89}$
Berechnung der Größe des Winkels zwischen den Diagonalen:
$\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{80}}{\sqrt{89}} \Rightarrow \alpha = 18{,}54°$

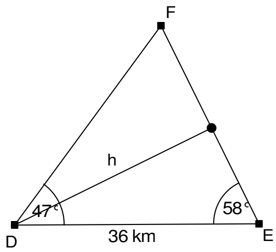
b) Analog folgt: α = 22,98°

Aufgabe 16:

	Gleitzahl	Berechnung des Gleitwinkels	Berechnung der Flugweite
Kondor	1 : 34	$\tan(\alpha) = \frac{1}{34} \Rightarrow \alpha = 1{,}7°$	$\tan(1{,}7°) = \frac{80}{x} \Rightarrow x = 2695$ m
Bussard	1 : 15	$\tan(\alpha) = \frac{1}{15} \Rightarrow \alpha = 3{,}8°$	$\tan(3{,}8°) = \frac{80}{x} \Rightarrow x = 1204$ m
Möwe	1 : 14	$\tan(\alpha) = \frac{1}{14} \Rightarrow \alpha = 4{,}1°$	$\tan(4{,}1°) = \frac{80}{x} \Rightarrow x = 1116$ m
Taube	1 : 9	$\tan(\alpha) = \frac{1}{9} \Rightarrow \alpha = 6{,}3°$	$\tan(6{,}3°) = \frac{80}{x} \Rightarrow x = 725$ m
Spatz	1 : 6	$\tan(\alpha) = \frac{1}{6} \Rightarrow \alpha = 9{,}5°$	$\tan(9{,}5°) = \frac{80}{x} \Rightarrow x = 478$ m

Aufgabe 17:





Berechnung der Länge der Höhe:

$\sin(58°) = \frac{h}{36\text{ km}} \Rightarrow h = 30{,}53$ km

Berechnung der Größe des Winkels bei F:

$180° - 47° - 58° = 75°$

Berechnung der Länge der Strecke $\overline{DF}$:

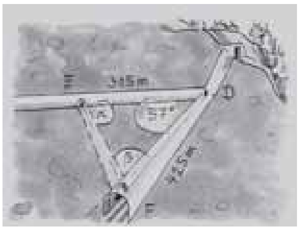
$\sin(75°) = \frac{h}{\overline{DF}} \Rightarrow \sin(75°) = \frac{30{,}53\text{ km}}{\overline{DF}} \Rightarrow \overline{DF} = 31{,}61$ km

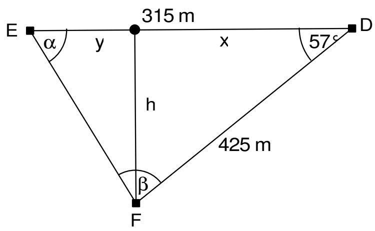
Aufgabe 18:

$\overline{ED} = 315$ m;

$\overline{FD} = 425$ m;

$\angle EDF = 57°$





a Berechnung der Länge der Höhe h:

$\sin(57°) = \frac{h}{425\text{ m}} \Rightarrow h = 356{,}44$ m

b Berechnung der Länge des Teilstücks x:

$x^2 + h^2 = 425^2 \Rightarrow x^2 + 356{,}44^2 = 425^2$

$\Rightarrow x = 231{,}46$ m

c Berechnung der Länge des Teilstücks y:

$x + y = 315\text{ m} \Rightarrow 231{,}47\text{ m} + y = 315$ m

$\Rightarrow y = 83{,}54$ m

d Berechnung der Größe des Winkels α:

$\tan(\alpha) = \frac{h}{y} \Rightarrow \tan(\alpha) = \frac{356{,}44\text{ m}}{83{,}54\text{ m}}$

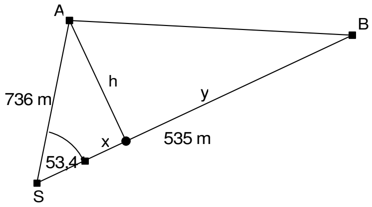
$\Rightarrow \alpha = 76{,}81°$

e Berechnung der Länge der Strecke $\overline{EF}$:

$\sin(\alpha) = \frac{h}{\overline{EF}} \Rightarrow \sin(76{,}81°) = \frac{356{,}44\text{ m}}{\overline{EF}}$

$\Rightarrow \overline{EF} = 366{,}1$ m

Aufgabe 19:



$\overline{AS} = 736$ m; $\overline{BS} = 535$ m; $\angle BSA = 53{,}4°$.

a Berechnung der Länge der Höhe h:

$\sin(53{,}4°) = \dfrac{h}{736\text{ m}} \Rightarrow h = 590{,}87$ m

b Berechnung der Länge des Teilstücks x:
$x^2 + h^2 = 736^2$ ($x^2 + 590{,}87^2 = 736^2$
x = 438,83 m

c Berechnung der Länge des Teilstücks y:
$x + y = 535\text{ m} \Rightarrow 438{,}83\text{ m} + y = 535\text{ m}$
$\Rightarrow y = 96{,}17$ m

d Berechnung der Größe des Winkels $\angle ABS$:

$\tan(\angle ABS) = \dfrac{h}{y} \Rightarrow \tan(\angle ABS) = \dfrac{590{,}87\text{ m}}{96{,}18\text{ m}}$

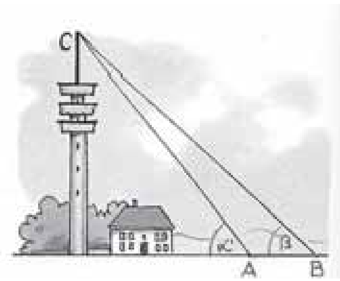
$\Rightarrow \angle ABS = 80{,}76°$

e Berechnung der Länge der Strecke $\overline{AB}$:

$\sin(\angle ABS) = \dfrac{h}{\overline{AB}} \Rightarrow \sin(80{,}76°) = \dfrac{590{,}87\text{ m}}{\overline{AB}}$

$\Rightarrow \overline{AB} = 598{,}64$ m

Aufgabe 20:



$\overline{AB} = 50$ m,
$\alpha = 56{,}4°$;
$\beta = 42{,}1°$

$\tan(56{,}4°) = \dfrac{h}{x}$ $\qquad$ $\tan(42{,}1°) = \dfrac{h}{x+50}$

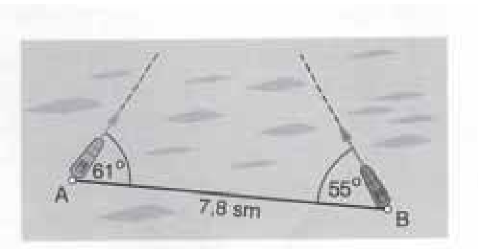
$\Rightarrow x = \dfrac{h}{\tan(56{,}4°)}$ $\qquad$ $\Rightarrow x + 50 = \dfrac{h}{\tan(42{,}1°)}$

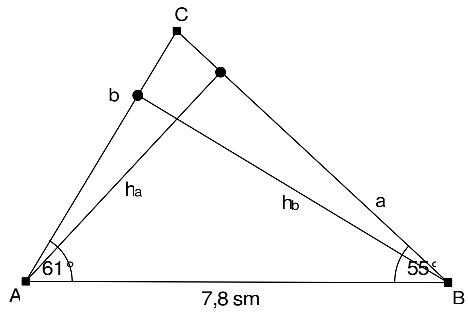
$$\dfrac{h}{\tan(56{,}4°)} + 50 = \dfrac{h}{\tan(42{,}1°)}$$

$\Rightarrow h = 113{,}04$ m

Aufgabe 21:

Albert 24 sm/h
Berta 26 sm/h





a Berechnung der Größe des fehlenden Winkels:
180° - 53° - 61° = 64°

b Berechnung der Länge der Höhe h_a:

$\sin(55°) = \dfrac{h_a}{7{,}8\text{ sm}} \Rightarrow h_a = 6{,}39$ sm

c Berechnung der Länge der Strecke b:

$\sin(64°) = \dfrac{h_a}{b} \Rightarrow \sin(64°) = \dfrac{6{,}39\text{ sm}}{b}$

$\Rightarrow b = 7{,}11$ sm

d Berechnung der Länge der Höhe h_b:

$\sin(61°) = \dfrac{h_b}{7{,}8\text{ sm}} \Rightarrow h_b = 6{,}82$ sm

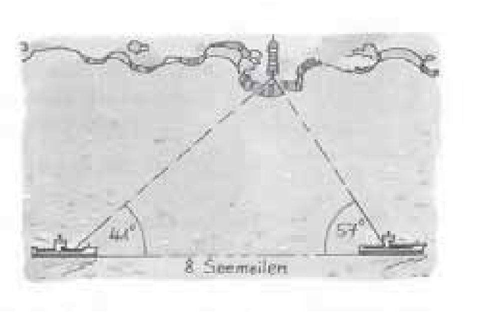
e Berechnung der Länge der Strecke a:

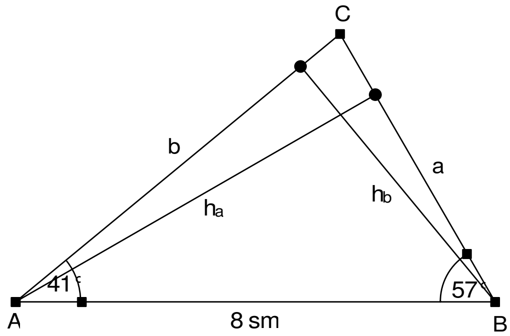
$\sin(64°) = \dfrac{h_b}{a} \Rightarrow \sin(64°) = \dfrac{6{,}39\text{ sm}}{a}$

$\Rightarrow a = 7{,}59$sm

f Es kommt nicht zu einem Zusammenstoß, da Kutter Albert für die 7,11 sm eine Zeit von 0,27 h und Kutter Berta für die 7,59 sm eine Zeit von 0,29 h benötigt.

Aufgabe 22:





a Berechnung der Größe des fehlenden Winkels:
180° - 41° - 57° = 82°

b Berechnung der Länge der Höhe h_a:
$\sin(57°) = \frac{h_a}{8\text{ sm}} \Rightarrow h_a = 6{,}71\text{ sm}$

c Berechnung der Länge der Strecke b:
$\sin(82°) = \frac{h_a}{b} \Rightarrow \sin(82°) = \frac{6{,}71\text{sm}}{b}$
$\Rightarrow b = 6{,}78\text{ sm}$

d Berechnung der Länge der Höhe h_b:
$\sin(41°) = \frac{h_b}{8\text{ sm}} \Rightarrow h_b = 5{,}25\text{ sm}$

e Berechnung der Länge der Strecke a:
$\sin(82°) = \frac{h_b}{a} \Rightarrow \sin(82°) = \frac{5{,}25\text{ sm}}{a}$
$\Rightarrow a = 5{,}3\text{ sm}$

f Das Schiff ist also zunächst 6,78 sm und nach 8 Seemeilen Fahrt dann noch 5,3 sm vom Leuchtturm entfernt.

Mit analoger Rechnung folgt für das andere Schiff, dass es zunächst 4,18 sm und danach 5,44 sm vom Leuchtturm entfernt ist.

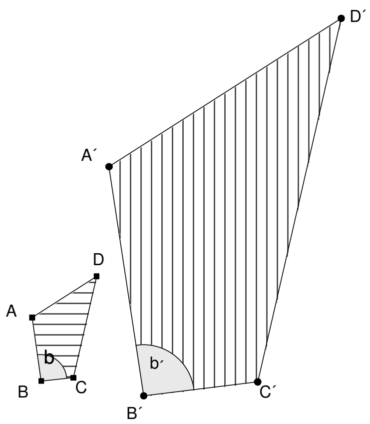
4. Wissensspeicher

Definition:

Zwei Vielecke F und G heißen **ähnlich** zueinander, wenn gilt:

- Entsprechende Winkel sind gleich groß.
- Alle Seiten des Vielecks G sind k-mal so lang wie die entsprechenden Seiten des Vielecks F.

Der Faktor k heißt **Ähnlichkeitsfaktor** oder **Streckfaktor**.



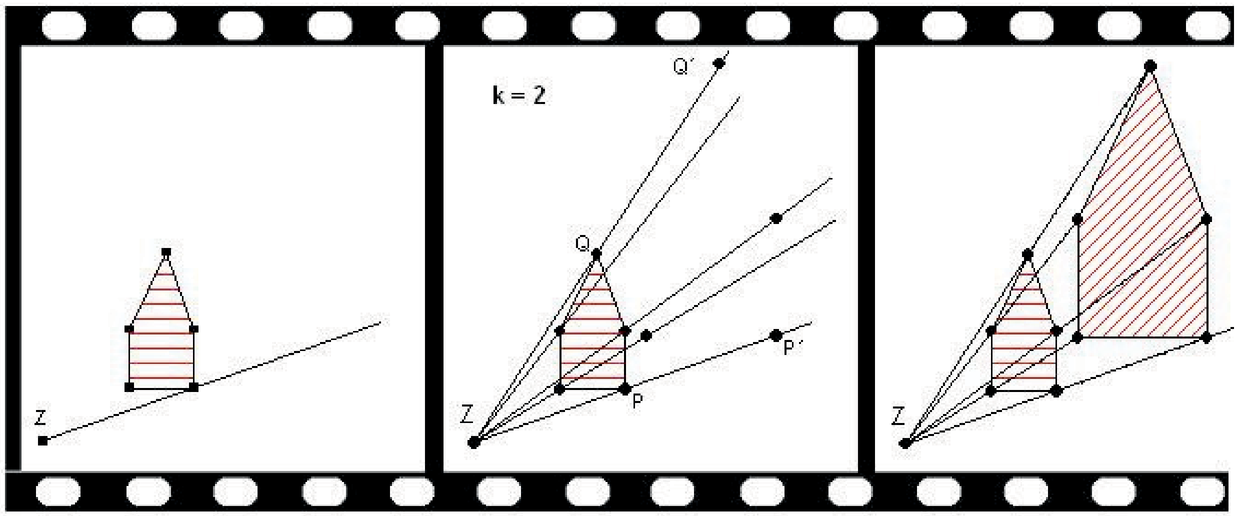
$\overline{A'B'} = k \cdot \overline{AB}$

$\overline{B'C'} = k \cdot \overline{BC}$

etc.

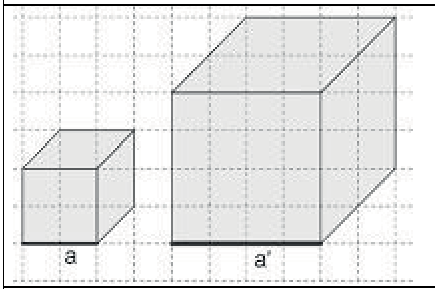
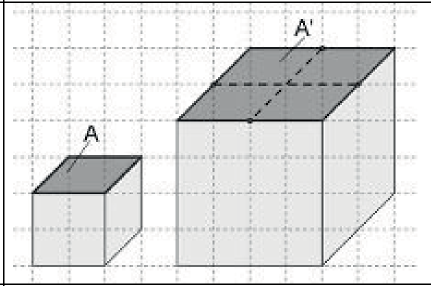
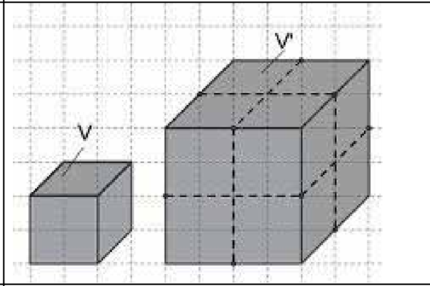
$\beta' = \beta$

Zentrische Streckung mit Zentrum Z und Streckfaktor k



Eigenschaften der zentrischen Streckung

1. Entsprechende Winkel in Ausgangs- und Bildfigur sind gleich. $\alpha = \alpha'$
2. Ausgangsstrecke und Bildstrecke sind parallel zueinander.
3. Der Streckfaktor gibt die Veränderung der Streckenlänge an: $\overline{A'B'} = k \cdot \overline{AB}$

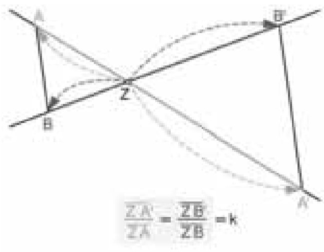
Längenvergrößerung bei Streckfaktor k	Flächenvergrößerung bei Streckfaktor k	Volumenvergrößerung bei Streckfaktor k
		
$\frac{a´}{a}=2=k$	$\frac{A´}{A}=4=k^2$	$\frac{V´}{V}=8=k^3$

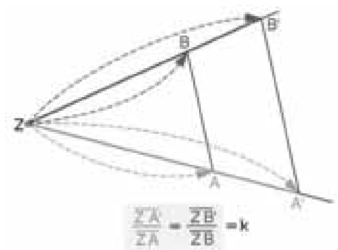
Ähnlichkeitssatz

Wenn zwei Dreiecke in der Größe von zwei Winkeln übereinstimmen, dann sind sie ähnlich.

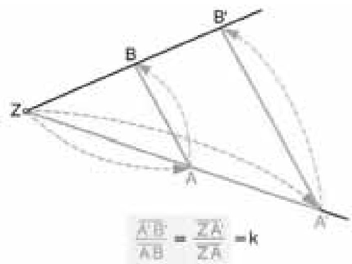
Streckenverhältnisse:

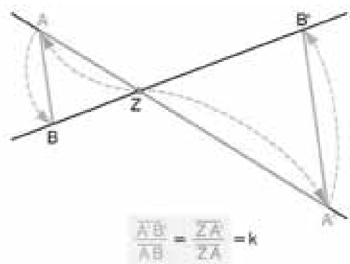
Entsprechende Streckenverhältnisse auf zwei Geraden durch einen Punkt Z sind gleich.





Das Verhältnis zwischen Bild- und Ausgangsstrecke ist gleich den Streckenverhältnissen auf den Geraden durch Z.





Definitionen

In jedem rechtwinkligen Dreieck mit Winkel α heißt der Quotient $\frac{\text{Gegenkathete von}\,\alpha}{\text{Ankathete von}\,\alpha}$ der Tangens von α, kurz tan (α).

In jedem rechtwinkligen Dreieck mit Winkel α heißt der Quotient $\frac{\text{Gegenkathete von}\,\alpha}{\text{Hypotenuse von}\,\alpha}$ der Sinus von α, kurz sin (α).

In jedem rechtwinkligen Dreieck mit Winkel α heißt der Quotient $\frac{\text{Ankathete von}\,\alpha}{\text{Hypotenuse von}\,\alpha}$ der Kosinus von α, kurz cos (α).

5. Selbsteinschätzung

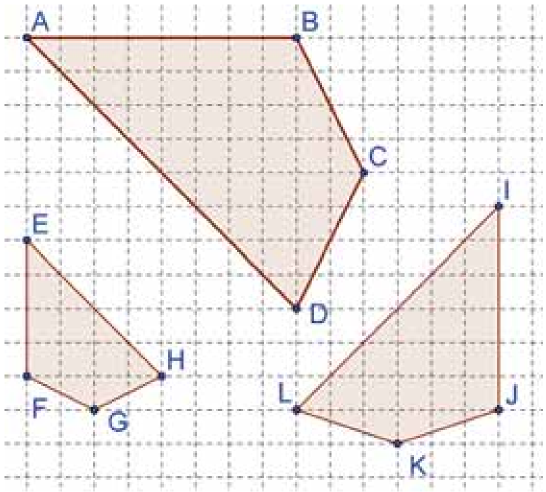
Schätze deine Kenntnisse ein und mache ein Kreuz in der entsprechenden Spalte.

Ich kann	**ich bin sicher**	**ich muss noch üben**	**ich brauche Hilfe**
• eine zentrische Streckung zu gegebenem • Streckfaktor und Streckzentrum ausführen. Zeichne das Dreieck ABC und strecke es mit dem Zentrum Z(1|2) und dem Faktor k = 1,5. A(1|0); B(5|2); C(3|6).			
• zu gegebener Urbild- und Bildfigur das Streckzentrum und den Streckfaktor bestimmen. Das Bild des Dreiecks A(4|1); B(6|3); C(3|3) ist das Dreieck A´(10|1); B´(16|7); C´(7|7). Bestimme Z und den Streckfaktor k.			
• entscheiden, ob zwei Vielecke ähnlich sind. Siehe Aufgabe 1.			
• aufgrund des Ähnlichkeitssatzes entscheiden, ob zwei Dreiecke ähnlich sind. Siehe Aufgabe 2.			
• die Ähnlichkeit von Dreiecken zur Berechnung von Seitenlängen von Dreiecken anwenden. Siehe Aufgabe 3.			
• den Einfluss einer Streckung auf den Flächen-/Rauminhalt einer Figur/eines Körpers bestimmen. 1. Ein quaderförmiges Paket hat ein Volumen von 12 Litern und eine Oberfläche von 1600 cm². Berechne Oberfläche und Volumen, wenn alle Kantenlängen halbiert werden. 2. Mit welchem Faktor müssen die Kantenlängen multipliziert werden, wenn man das Volumen [die Oberfläche] verdoppeln möchte?			
• unbekannte Strecken in ähnlichen Figuren berechnen: Siehe Aufgabe 4.			
• Ankathete, Gegenkathete und Hypotenuse bei vorgegebenem Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck zuordnen. Siehe Aufgabe 5.			
• mithilfe von tan, sin und cos rechtwinklige Dreiecke berechnen. Siehe Aufgabe 5.			
• Winkelgrößen und Seitenlängen in beliebigen Dreiecken durch Ergänzen oder Zerlegen in rechtwinklige Dreiecke mithilfe des tan, sin und cos berechnen. Siehe Aufgabe 6.			

Aufgaben zur Selbsteinschätzung

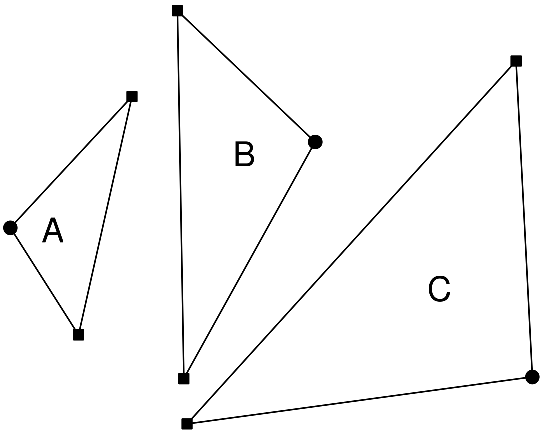
Aufgabe 1

Entscheide, welche Vierecke ähnlich zueinander sind.



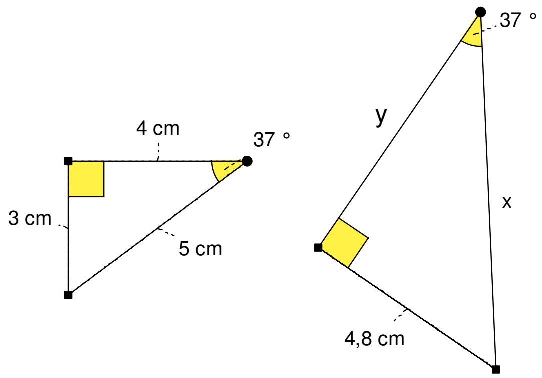
Aufgabe 2

Entscheide, welche Dreiecke ähnlich zueinander sind.



Aufgabe 3

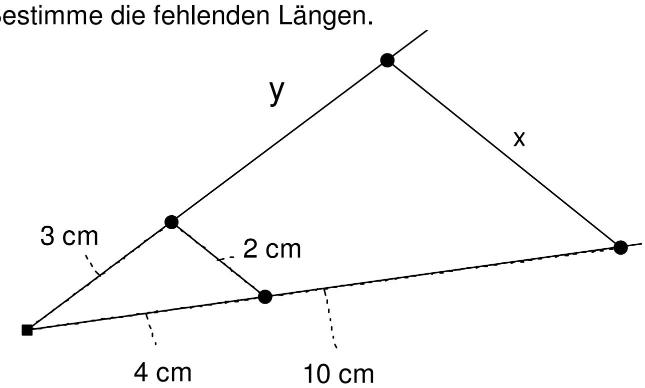
Berechne die Längen der fehlenden Seiten.



.

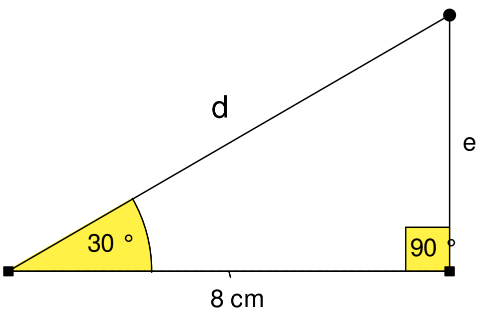
Aufgabe 4

Bestimme die fehlenden Längen.



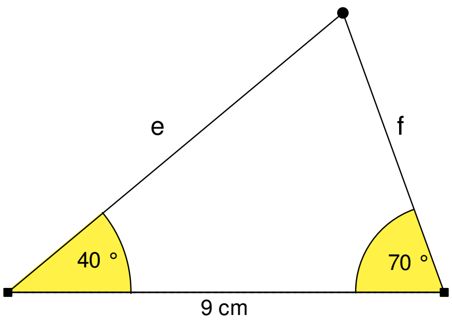
Aufgabe 5

Benenne die Gegenkathete und die Ankathete zu α und die Hypotenuse. Berechne die fehlenden Seiten auf zwei verschiedenen Wegen.



Aufgabe 6

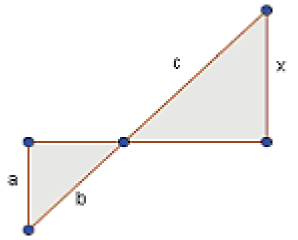
Berechne die fehlenden Seitenlängen.

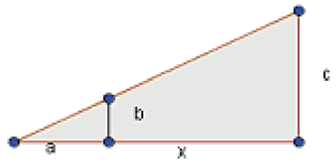


6. Rechnerfreie Aufgaben

Aufgabe 1:

Stelle jeweils eine Verhältnisgleichung auf und bestimme die gesuchte Streckenlänge x.

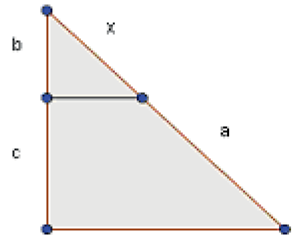




a) a = 2 cm b = 3 cm c = 6 cm

b) a = 4 cm b = 2 cm c = 5 cm

c) a = 3 cm b = 1 cm c = 2 cm



Aufgabe 2:

Löse die folgenden Verhältnisgleichungen

a) $\frac{2}{3} = \frac{4}{x}$ b) $\frac{4}{x+1} = \frac{2}{5}$ c) $\frac{2x}{3} = \frac{4}{1}$

Aufgabe 3:

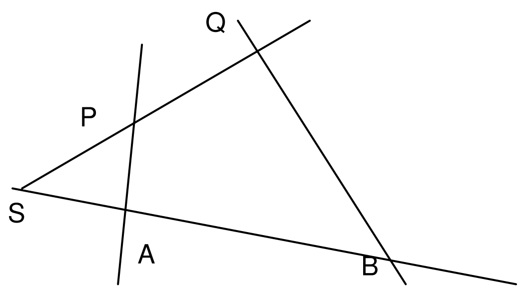
In der Figur sind die Längen der vier Strecken $\overline{SA}, \overline{SB}, \overline{SP}, \overline{SQ}$ bekannt.

Entscheide, ob die Strecken $\overline{PA}$ und $\overline{QB}$ parallel sind.

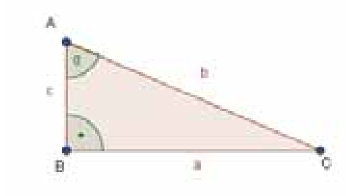
a) $\overline{SA} = 2$ cm; $\overline{SB} = 3$ cm;
$\overline{SP} = 3$ cm; $\overline{SQ} = 4{,}5$ cm

b) $\overline{SA} = 1{,}5$ cm; $\overline{SB} = 4{,}5$ cm;
$\overline{SP} = 3$ cm; $\overline{SQ} = 7$ cm

c) $\overline{SA} = 0{,}5$ cm; $\overline{SB} = 3{,}5$ cm;
$\overline{SP} = 0{,}3$ cm; $\overline{SQ} = 3{,}3$ cm



Aufgabe 4:

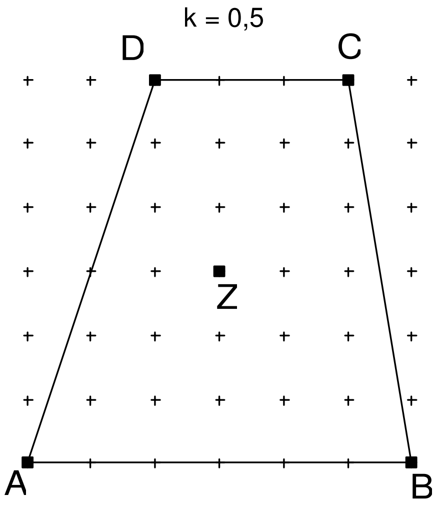


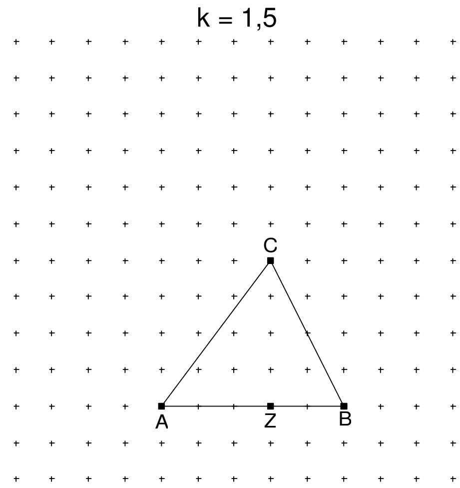
Markiere zum Winkel α die Gegenkathete in Rot, die Ankathete in Blau und die Hypotenuse in Grün.
Gib dann den Sinus, den Kosinus und den Tangens der beiden Winkel jeweils als Längenverhältnisse an und berechne diese.
a = 3 cm ; b = 5 cm und c = 4 cm.

7. Klassenarbeitsaufgaben

Aufgabe 1

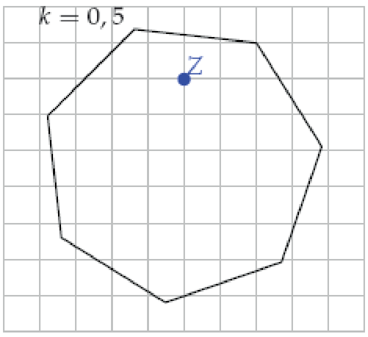
Strecke die Figur mit dem angegebenen Streckfaktor. Das Streckzentrum ist Z.

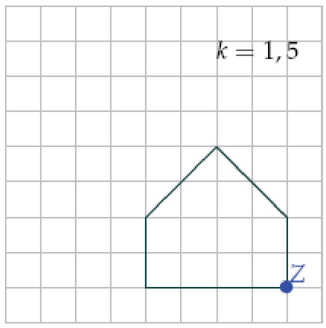




Aufgabe 2

Strecke die Figur mit dem angegebenen Streckfaktor. Das Streckzentrum ist Z.





Aufgabe 3

Ein Försterdreieck besteht aus einem gleichschenklig rechtwinkligen Dreieck, einem Griff und einem Lot.
Mithilfe eines solchen Försterdreiecks kann man die Höhen von Bäumen bestimmen.
Bestimme die Höhe eines Baumes, wenn die Entfernung zum Baum 25 m beträgt, das Försterdreieck eine Kantenlänge von 30 cm hat und der Förster das Dreieck 1,5 m über dem Boden hält?
Fertige zur Lösung eine beschriftete Skizze an.

Aufgabe 4

Löse die folgenden Verhältnisgleichungen schriftlich und **ohne Rechner**. Notiere dazu die Umformungsschritte.

a) $\frac{4}{9} = \frac{7}{x}$

b) $\frac{x}{x+1} = \frac{3}{5}$

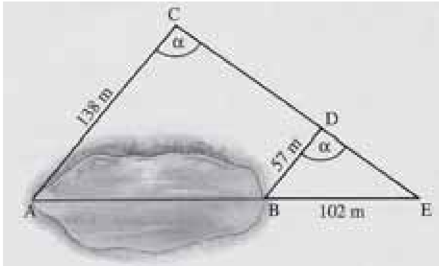
Aufgabe 5

Um die Länge des Sees zu bestimmen, misst man drei Streckenlängen:

$\overline{AC} = 138$ m; $\overline{BD} = 57$ m; $\overline{BE} = 102$ m

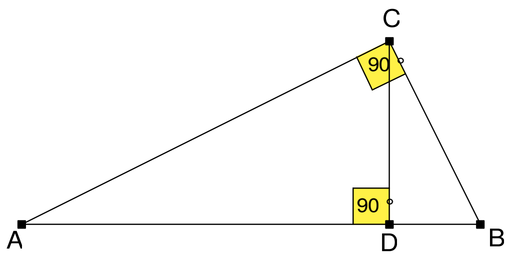
Berechne die Länge des Sees.

Die eingezeichneten Winkel sind gleich groß. Ist dies für deine Berechnung wesentlich? Begründe.



Aufgabe 6

Begründe, dass in der nebenstehenden Figur die Dreiecke ADC und CDB ähnlich sind.
Benenne dazu in dem Bild alle für die Begründung genutzten Größen.



Aufgabe 7

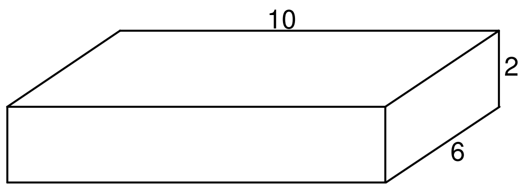
Eine Rampe für Rollstuhlfahrer beginnt 6,50 m vor dem höher gelegenen Eingang. Der Neigungswinkel beträgt 4,4°.
Bestimme die Höhe, die mit der Rampe überwunden wird.

Aufgabe 8

Eine Pizza Fungi mit 20 cm Durchmesser kostet 5,50 €.
Bestimme begründet einen fairen Preis für eine größere Pizza Fungi mit einem Durchmesser von 45 cm.

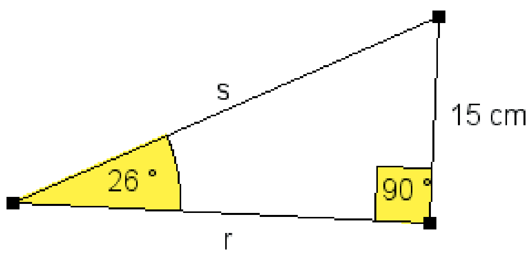
Aufgabe 9

Der Quader soll maßstäblich vergrößert werden, sodass er den 9-fachen Oberflächeninhalt hat. Berechne Länge, Breite, Höhe und das Volumen des vergrößerten Quaders.

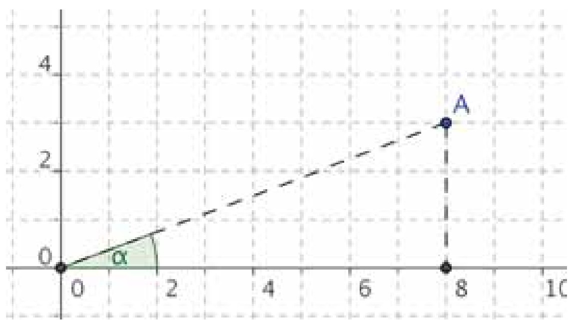


Aufgabe 10

a) Berechne r und s.



b) Berechne die Größe des Winkels α.



Aufgabe 11

Ein Straßenschild zeigt für die nächsten 230 m einen Anstieg von 9% an. Berechne den Höhenunterschied, der auf dieser Strecke überwunden wird, und den Winkel, unter dem die Straße ansteigt.

Aufgabe12

Berechne die **übrigen Stücke** des Dreiecks ABC. Gib auch den **Flächeninhalt** an.

a) $b = 8{,}5$ cm
$c = 3{,}1$ cm
$\beta = 111°$

b) $\alpha = 115°$
$\gamma = 97°$
$c = 4{,}8$ cm

Aufgabe 13

Der Hersteller von Objektiven für Spiegelreflexkameras gibt zu den Objektiven die horizontalen Blickwinkel an.
Ein 90 m breites Schloss soll fotografiert werden.
Welchen **Abstand vom Gebäude** muss man bei einem Weitwinkelobjektiv mindestens haben, um das Schloss vollständig auf das Bild zu bekommen?
(Fertige eine Planskizze an!)

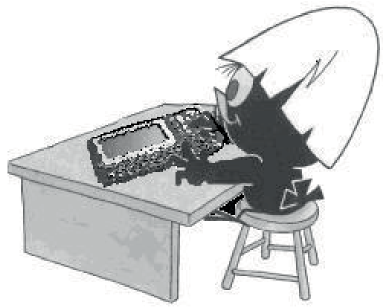
Objektiv	Bild-winkel
28 mm (Weitwinkel)	75°

Aufgabe 14

Nach einem Sicherheitshinweis soll eine Leiter in einem Winkel von etwa 15° an die Wand angestellt werden. Welchen Abstand von der Wand sollte danach eine 4 m lange Leiter am Boden aufweisen?

C A l i M E R O

Computer-Algebra im Mathematikunterricht
Entdecken, Rechnen, Organisieren

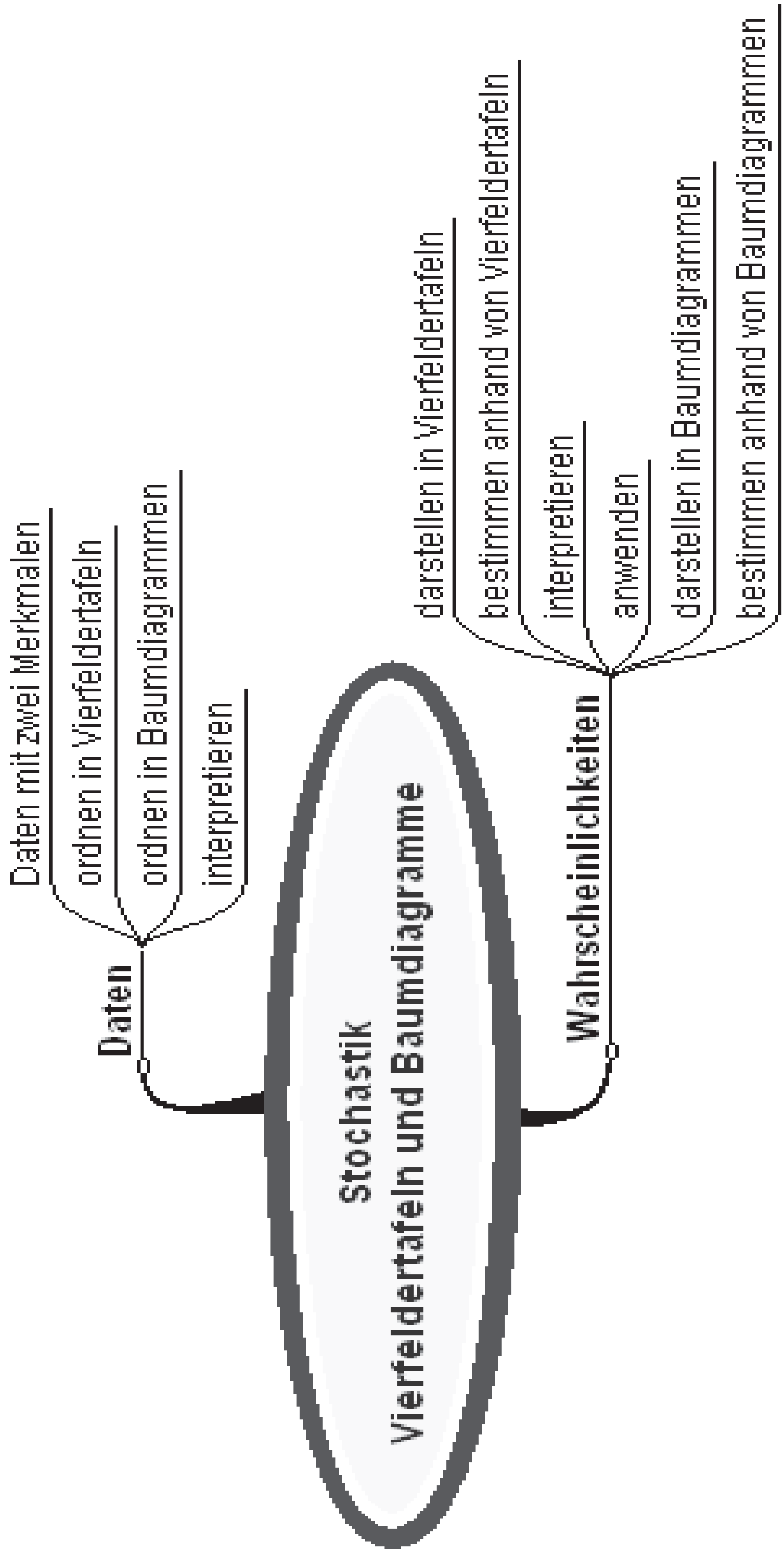


©PAGOT

Vierfeldertafeln und Baumdiagramme

L e h r e r m a t e r i a l i e n

Überblick über den Unterrichtsverlauf


Stochastik
Vierfeldertafeln und Baumdiagramme
Daten
Daten mit zwei Merkmalen
ordnen in Vierfeldertafeln
ordnen in Baumdiagrammen
interpretieren
Wahrscheinlichkeiten
darstellen in Vierfeldertafeln
bestimmen anhand von Vierfeldertafeln
interpretieren
anwenden
darstellen in Baumdiagrammen
bestimmen anhand von Baumdiagrammen

Prozessbezogene Kompetenzen

Anhand dieses Unterrichtsmaterials können bei entsprechender methodischer Umsetzung folgende prozessbezogenen Kompetenzen des Kerncurriculums von den Schülerinnen und Schülern schwerpunktmäßig erworben werden:

Mathematisch argumentieren	Probleme mathematisch lösen	Mathematisch modellieren	Mathematische Darstellungen verwenden	Mit symbolischen, formalen, …	kommunizieren
• erläutern präzise mathematische Zusammenhänge und Einsichten unter Verwendung der Fachsprache	• stellen sich inner- und außermathematische Probleme und beschaffen die zu einer Lösung noch fehlenden Informationen		• stellen mehrfache Abhängigkeiten mit Vierfeldertafeln dar und analysieren diese		• teilen ihre Überlegungen anderen verständlich mit, wobei sie vornehmlich die Fachsprache benutzen • präsentieren Problembearbeitungen, auch unter Verwendung geeigneter Medien • verstehen Überlegungen von anderen zu mathematischen Inhalten, überprüfen diese auf Schlüssigkeit und Vollständigkeit und gehen darauf ein • beurteilen und bewerten die Arbeit im Team und entwickeln diese weiter

Inhaltsbezogene Kompetenzen

Mit diesem Unterrichtsmaterial werden folgende inhaltsbezogenen Kompetenzen vermittelt:

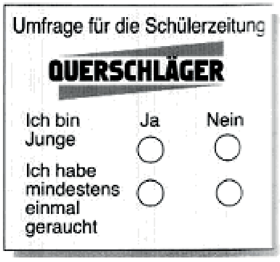
Zahlen und Operationen	Größen und Messen	Raum und Form	funktionaler Zusammenhang	Daten und Zufall
				• nutzen die Kenntnisse über zweistufige Zufallsexperimente, um statistische Aussagen mithilfe von Baumdiagramm oder Vierfeldertafel zu interpretieren

Hinweise zu rechnerspezifischen und rechnerfreien Fertigkeiten

Bei diesem Baustein gibt es keine CAS spezifischen Fertigkeiten, außer man würde eine Tabellenkalkulation einsetzen, was wir nicht vorhaben.

Thema 1: Darstellung von Vierfeldertafeln und Baumdiagrammen	**Dauer:** 5 Stunden
Die Vierfeldertafel wird als neue Darstellungsmöglichkeit für Daten mit zwei Merkmalen eingeführt. Die Interpretation der Einträge wird erarbeitet. Die Übertragung in das Baumdiagramm schließt sich an. Während die Vierfeldertafel als wesentliches Analyseelement verwendet wird, greift man das Baumdiagramm nur im Sinne der Wiederholung im Spiralcurriculum und als Ergänzung auf. Der Weg führt also von der Vierfeldertafel zum Baumdiagramm. Dabei haben die absoluten Häufigkeiten Vorrang vor den relativen. Vierfeldertafel und umgekehrte Vierfeldertafel sind gleichwertig. Eine Version ist also ausreichend. Dagegen stecken im Baumdiagramm und im umgekehrten Baumdiagramm unterschiedliche Informationen. Deshalb sollten stets beide Baumdiagramme gefertigt werden. Das Rückwärtsschließen im Baumdiagramm entfällt, die Argumentation erfolgt über die Vierfeldertafeln.	
Besondere Materialien/Technologie: LM 1 bis LM 4; SM 1.1 bis SM 1.8	

Ablauf der Stunde 1:

Inhalt	**Medien**	**Kommentar**
Einstieg: Umfrage für die Schülerzeitung. Schüler lesen den Text. Arbeitsauftrag: Welchen Titel würdest du wählen? Welchen auf keinen Fall? Begründe.  	SM 1.1 Aufg. 1 EA oder PA	Die Entnahme und Bewertung der Informationen aus dem Text kann als Einzel- oder als Partnerarbeit organisiert werden.
Auswertung: Die Schüler begründen ihre Titelauswahl. Aus der Diskussion über die Auswahl des Titels erwächst eine vollständige Vierfeldertafel. Die Aussagen der Titel werden durch Berechnung ausgewählter relativer Häufigkeiten belegt: z. B.: P(Raucher unter den Schülern) = $\frac{70}{150}$. Die Darstellung des Sachverhalts mithilfe einer Vierfeldertafel wird mithilfe eines Baumdiagramms ergänzt.	UG Tafel	Falls die Diskussion die Frage aufwirft, kann der Sachverhalt parallel auch mit der umgekehrten Vierfeldertafel und dem umgekehrten Baumdiagramm dargestellt werden.
Fazit: Daten lassen sich häufig so gliedern, dass sie zwei Merkmalen mit jeweils zwei verschiedenen Ausprägungen zugeordnet werden. Diese Daten kann man dann in Vierfeldertafeln zusammenstellen.		Enorm wichtig für das Verständnis ist, dass die Begründungen mit den absoluten Häufigkeiten erfolgen.
Alternativer Einstieg: Alternativ dazu, eine vorgegebene Befragung auszuwerten, kann auch eine eigene Erhebung (in der Klasse) durchgeführt werden. Die Auswertung kann dann analog erfolgen.		

Hausaufgabe: Ergänzung von Vierfeldertafeln (Die Ergänzung der Vierfeldertafeln ist nicht immer möglich und hier gewollt.) Aussagen aus Vierfeldertafeln	 SM 1.1 Aufg. 2 SM 1.2 Aufg. 3	Das Hilfsmittel „Vierfeldertafel“ soll vertrauter werden. Die zweite Aufgabe stellt eine Umkehrung der bisherigen Fragestellungen dar.

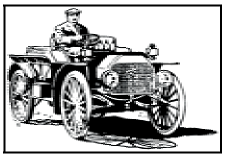
Ablauf der Stunde 2:

Inhalt	Medien	Kommentar
Einstieg: Mit der Aufgabe verbunden ist die Aufforderung, Vierfeldertafel und Baumdiagramm mithilfe der Informationen des Textes zu erzeugen.	 SM 1.2 Aufg. 4 EA	 Auch hier erfolgt die Argumentation mit den absoluten Häufigkeiten.
Erarbeitung: Die gestellte Aufgabe ist keineswegs eindeutig, so dass sich Vierfeldertafel und umgekehrte Vierfeldertafel ergeben können. Analog entstehen Baumdiagramm und umgekehrtes Baumdiagramm. Hier ist darauf zu achten, dass sowohl in den Vierfeldertafeln als auch in den Baumdiagrammen sauber verfolgt wird, wo welche Daten eingetragen werden.	 Tafel UG LM 1 SM 1.3	 Die Folienvorlage LM 1 bzw. das Arbeitsblatt SM 1.3 können alternativ zur Tafel als Medium eingesetzt werden.
Sicherung: Ein Zusammenfassen des Vorgehens bei der Übertragung der Daten in Vierfeldertafeln und Baumdiagrammen erfolgt anhand der vorbereiteten Folie.	 Folie LM 2	
Auswertung: Die statistischen Aussagen im Text werden durch Berechnung ausgewählter relativer Häufigkeiten belegt: z. B.: P(weibliches Mitglied unter den Erwachsenen) = $\frac{71}{229}$ Auf diese Weise werden die Baumdiagramme durch den Eintrag von relativen Häufigkeiten an den Pfaden ergänzt.	 Tafel UG	 Die bedingten Wahrscheinlichkeiten werden auch hier nicht mit den relativen sondern den absoluten Häufigkeiten berechnet.
Hausaufgabe: Die Erstellung von Vierfeldertafeln und Baumdiagrammen aus Texten soll in vielfältiger Weise geübt werden. Dabei werden teilweise auch Interpretationen der Daten gefordert. Die Vorstellung der Ergebnisse kann zeitökonomisch durch Verwendung der Folienvorlage LM 1 erfolgen	 SM 1.2 Aufg. 5 SM 1.4 Aufg. 6 – 8 ggf. LM1	 Hier kann eine Auswahl erfolgen, es müssen keineswegs alle Aufgaben bearbeitet werden.

Ablauf der Stunde 3:

Inhalt	Medien	Kommentar
Einstieg: Anhand der Aufgabe „Zusammenleben ohne Trauschein“ wird das Aufstellen von Vierfeldertafel und Baumdiagrammen weiter gefestigt. Gleichzeitig werden hier erstmals bedingte Wahrscheinlichkeiten berechnet. 	SM 1.4 Aufg. 9 EA	Es wird hier zwar eine bedingte Wahrscheinlichkeit berechnet, dieser Begriff muss jedoch nicht fallen.
Erarbeitung: Neben der bekannten Argumentation mit den absoluten Häufigkeiten soll erstmals auch mit den relativen Häufigkeiten bei der Berechnung von bedingten Wahrscheinlichkeiten argumentiert werden. Hierbei ist immer der Bezug zu den absoluten Häufigkeiten herauszuarbeiten.	Tafel UG LM 3 bzw. SM 1.5	Die Folienvorlage LM 3 bzw. SM 1.5 können alternativ zur Tafel als Medium eingesetzt werden.
Auswertung: Die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten kann auf verschiedene Weisen erfolgen. Es können absolute und relative Häufigkeiten verwendet werden. Die verschiedenen Berechnungsarten stehen gleichberechtigt nebeneinander. Jeweilige Vor- und Nachteile werden diskutiert. z. B.: P(West mit Kindern) = $\frac{372000}{1593000}$ = 0,234 (Berechnung mit absoluten Häufigkeiten) **<u>oder:</u>** P(West mit Kindern) = $\frac{0{,}176}{0{,}754}$ = 0,234 (Berechnung mit relativen Häufigkeiten) **<u>oder:</u>** 0,754 · P(West mit Kindern) = 0,176 (Verwendung der Pfadregel)	SM 1.5 UG	Die Folienvorlage LM 4 stellt eine mögliche Lösung der Aufgabe dar. Sie kann als Info für den Lehrer dienen oder auch im Unterricht eingesetzt werden.
Sicherung: Eine Zusammenfassung des Gedankenganges und Lösungsweges durch die Schülerinnen und Schüler stellt eine Sicherung für den Wissensspeicher dar.	Schülerbeitrag Wissensspeicher	Der Wissensspeicher kann dann von den Schülerinnen und Schülern zu Hause individuell ergänzt werden.
Hausaufgabe: Die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mithilfe von absoluten und relativen Häufigkeiten soll geübt werden. Die Schüler müssen für die Bearbeitung eine Anzahl von Verkehrssündern selbstständig geschickt wählen.	SM 1.6 Aufg. 10	Die Aufgabe stellt insofern eine Umkehrung dar, als hier von relativen auf absolute Angaben zu schließen ist.

Ablauf der Stunden 4 und 5:

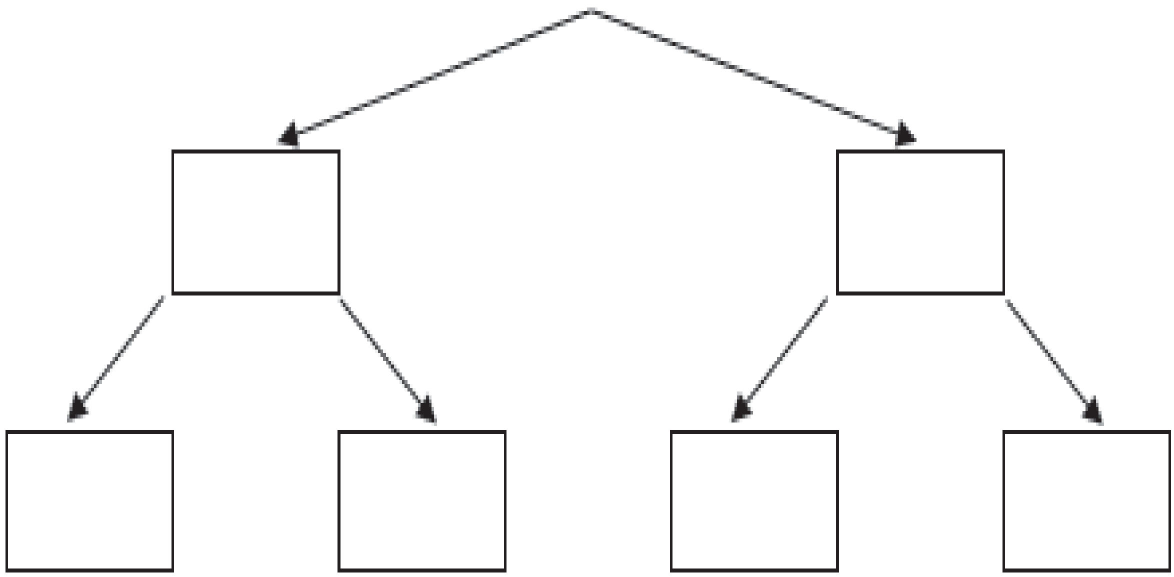
Inhalt	**Medien**	**Kommentar**
Einstieg:  Die Aufgabe zum Autohändler ist eine, mit deren Hilfe die bisher erarbeiteten Lösungsstrategien gefestigt werden sollen. Dazu sind sowohl Vierfeldertafel als auch Baumdiagramme zu erstellen. In einem Bericht sollen dann Informationen wiedergegeben werden. Dazu ist die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten notwendig.	SM 1.6. Aufg. 11 PA	Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten sind die absoluten und relativen Angaben gleichberechtigt zu verwenden.
Vielfältige Übungen: Mit weiteren Aufgaben wird die Berechnung und Interpretation von Wahrscheinlichkeiten unter Verwendung von Vierfeldertafel und Baumdiagrammen geübt und gefestigt. Bei Aufgabe 12 müssen die Schüler erneut geschickt eine selbst gewählte absolute Häufigkeit zu Grunde legen.	SM 1.6. Aufg. 12 SM 1.7. Aufg. 13 und 14 PA	Aus den Aufgaben ist eine Auswahl zu treffen. Die Vorstellung der Ergebnisse kann zeitökonomisch durch Verwendung der Folienvorlage LM 3 erfolgen. Weitere Aufgaben können bei Bedarf der Literatur entnommen werden.
Hausaufgabe: Lernprotokoll Anhand eines Lernprotokolls sollen die Schülerinnen und Schüler ihren Lernprozess bis hierher reflektieren und bewusst halten. Im Lernprotokoll soll in kurzer schriftlicher Form durch jeden Schüler das wesentlich Neue der vergangenen Stunden festgehalten werden. Somit dient es jedem einzelnen zur Kontrolle seines eigenen Lernzuwachses.	SM 1.8. Aufg. 15	

Folienvorlage LM 1:

Vierfeldertafel, absolut

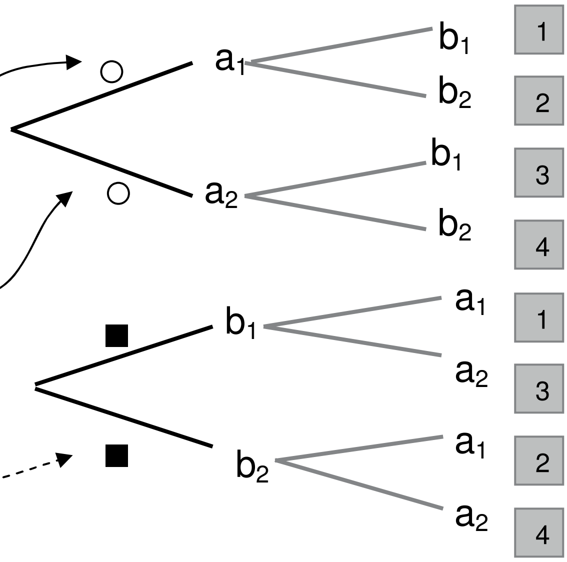
			Σ
Σ			

Baumdiagramm



Folienvorlage LM 2:

		Merkmal B		gesamt
		b_1	b_2	
Merkmal A	a_1	1	2	○
	a_2	3	4	○
gesamt		■	■	1



Folienvorlage LM 3:

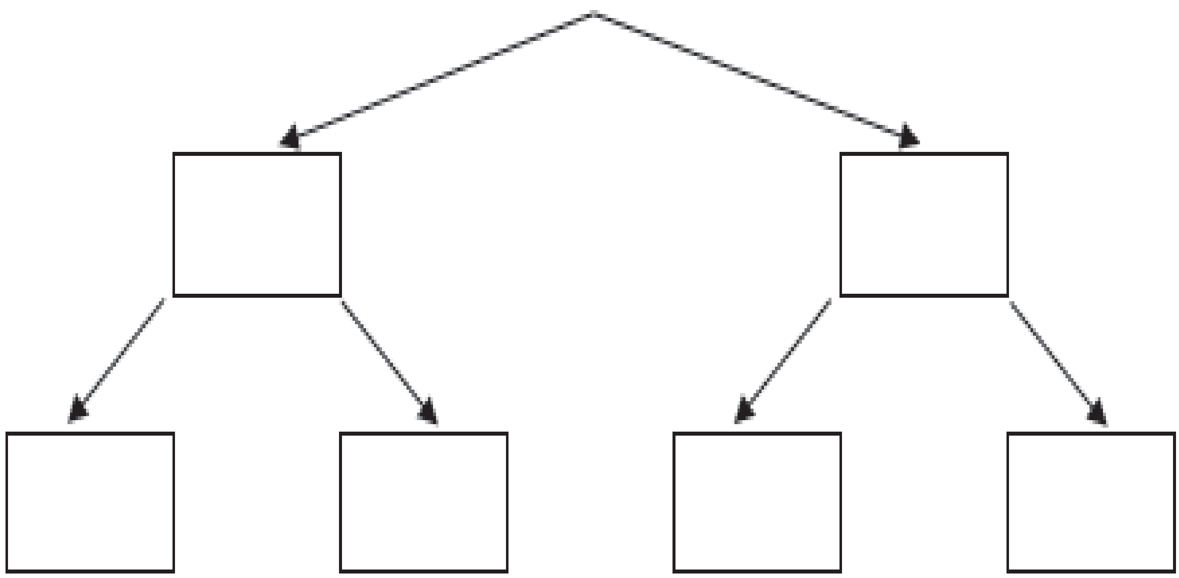
Vierfeldertafel, relativ

			Σ
Σ			

Vierfeldertafel, absolut

			Σ
Σ			

Baumdiagramm



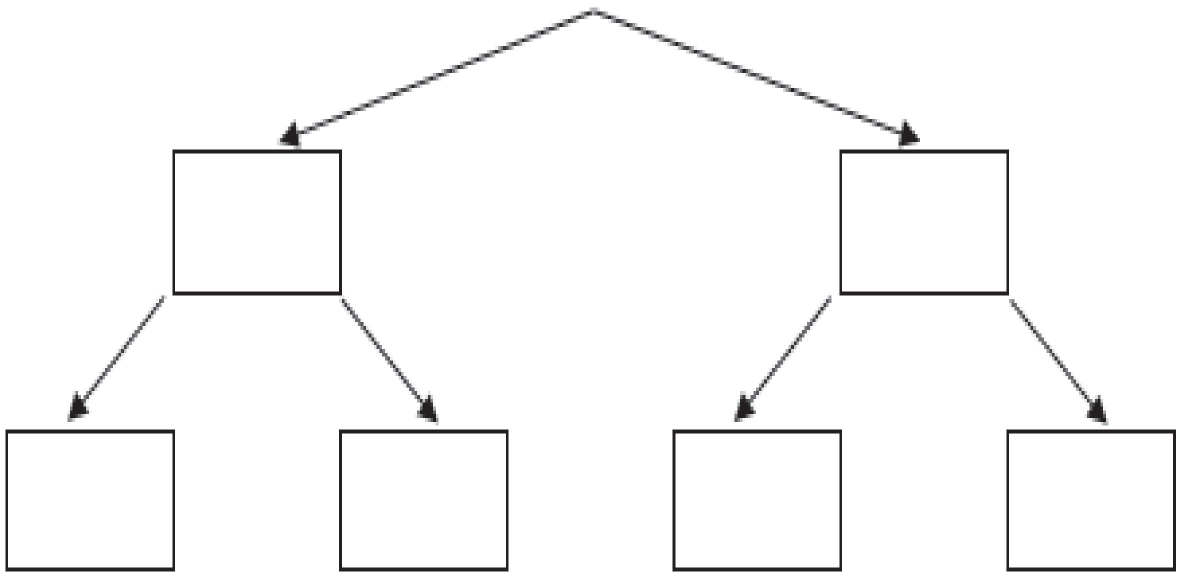
Vierfeldertafel, absolut

			Σ
Σ			

Vierfeldertafel, relativ

			Σ
Σ			

Baumdiagramm



Folienvorlage LM 4:

Vierfeldertafel, relativ

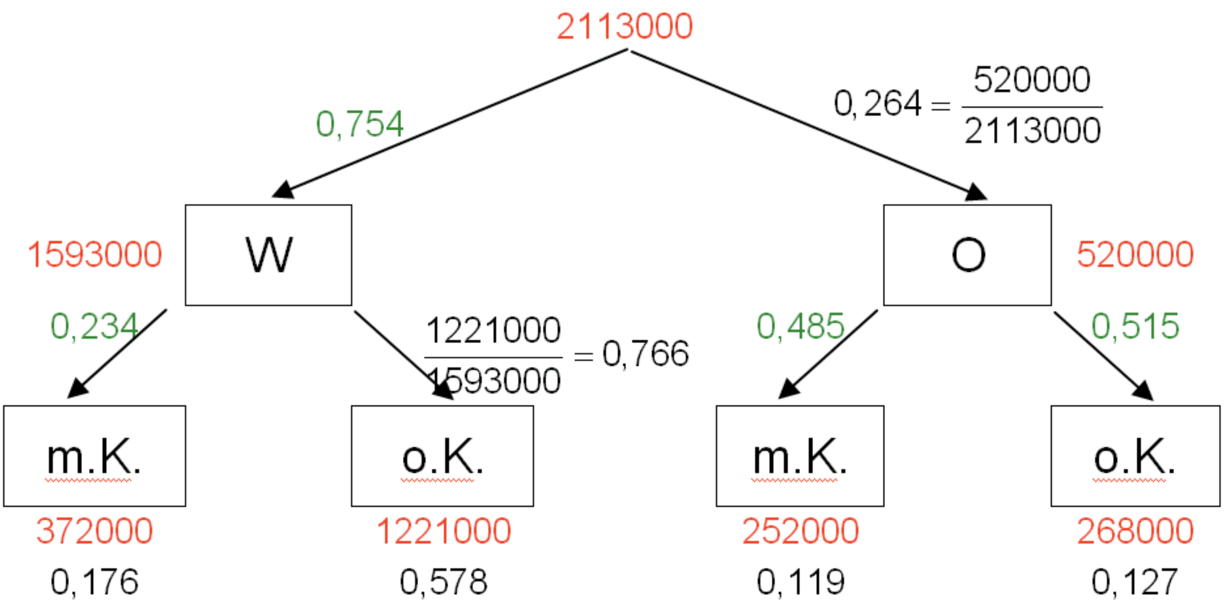
	m.K.	o.K.	Σ
W	0,176	0,578	0,754
O	0,119	0,127	0,246
Σ	0,295	0,705	1

$\frac{252000}{2113000}$ $\frac{1489000}{2113000}$

Vierfeldertafel, absolut

	m.K.	o.K.	Σ
W	372000	1221000	1593000
O	252000	268000	520000
Σ	624000	1489000	2113000

Baumdiagramm



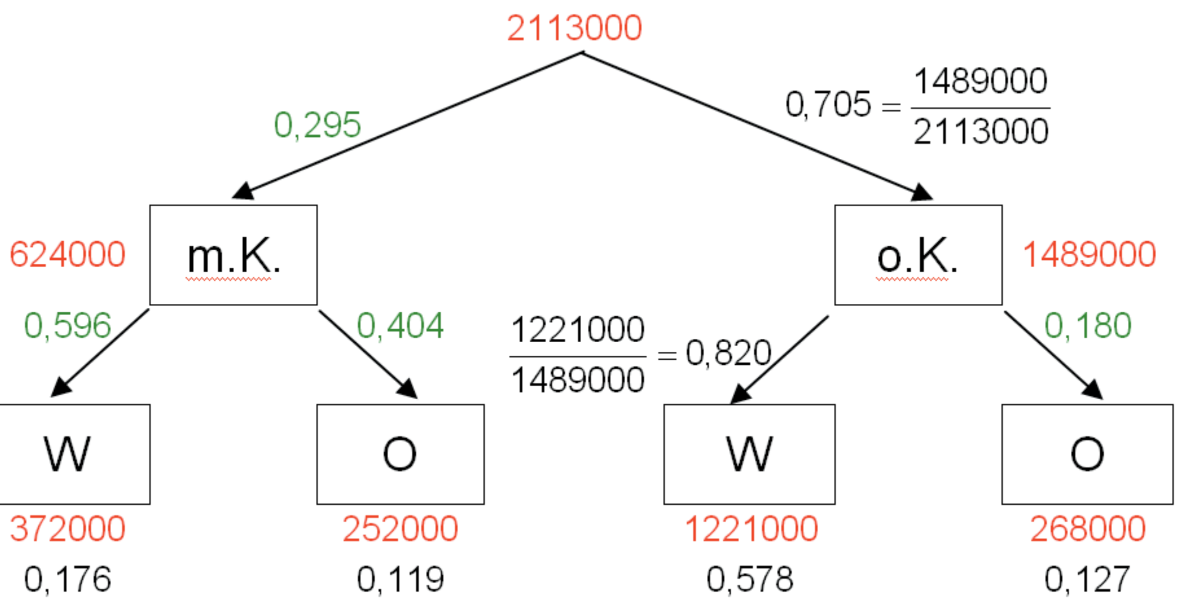
Vierfeldertafel, absolut

	W	O	Σ
m.K.	372000	252000	624000
o.K.	1221000	268000	1489000
Σ	1593000	520000	2113000

Vierfeldertafel, relativ

	W	O	Σ
m.K.	0,176	0,119	0,295
o.K.	0,578	0,127	0,705
Σ	0,754	0,246	1

Baumdiagramm



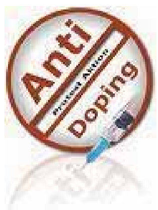
Thema 2: Interpretation von Daten in Vierfeldertafeln	**Dauer:** 3 Stunden
Während die Vierfeldertafel als wesentliches Analyseelement verwendet wird, greift man das Baumdiagramm nur im Sinne der Wiederholung im Spiralcurriculum und der Ergänzung auf. Das Rückwärtsschließen im Baumdiagramm entfällt, die Argumentation erfolgt über die Vierfeldertafeln. Bisher ging es schwerpunktmäßig um die Übertragung von Daten aus Texten in Vierfeldertafeln und Baumdiagramme und umgekehrt. Hier liegt der Fokus auf der Interpretation der aus den Vierfeldertafeln zu gewinnenden Informationen. Hierbei kann dann auch der Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit als Begriff erstmals auftreten. Er ist aber nicht Bestandteil des Kerns.	
Besondere Materialien/Technologie: LM 5; SM 2.1 bis SM 2.3	

Ablauf der Stunden 1 und 2:

<table>
<tr><th>Inhalt</th><th>Medien</th><th>Kommentar</th></tr>
<tr><td>

Einstieg:

Dopingaufgabe ohne Teil d).



Zur Lösung der Aufgaben werden wieder Vierfeldertafel und ggf. Baumdiagramme durch Berechnung der absoluten Werte aus den %-Angaben erstellt.

Je nach Leistungsvermögen der Klasse wird die Vierfeldertafel gemeinsam oder in Partnerarbeit erarbeitet. Die Bezeichnung der Spalten und Zeilen sollte wegen der besseren Vergleichbarkeit einheitlicht sein.

<table>
<tr><th></th><th>Doping</th><th>Kein Doping</th><th>Summe</th></tr>
<tr><td>Pos. Befund</td><td>47</td><td>99</td><td>146</td></tr>
<tr><td>Neg. Befund</td><td>3</td><td>4851</td><td>4854</td></tr>
<tr><td>Summe</td><td>50</td><td>4950</td><td>5000</td></tr>
</table>

</td><td>SM 2.1
Aufg. 1

PA oder
UG

PA</td><td>Die Strategie, die absoluten Häufigkeiten in der Vierfeldertafel und in Baumdiagrammen zu verwenden, wird auch hier beibehalten.
Eine Umkehrung des Baumdiagramms ist nicht erforderlich.
Die Aufgabenteile a) bis c) können arbeitsteilig bearbeitet werden.</td></tr>
<tr><td>

Auswertung:

Berechnung der Wahrscheinlichkeiten

a) P(Fehlurteil) = $\frac{102}{5000}$

b) P(zu unrecht bezichtig) = $\frac{99}{146}$

c) P(nicht gedopt und negativ) = $\frac{4851}{4950}$

</td><td>UG</td><td>Die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten erfolgt im Wesentlichen unter Verwendung der absoluten Häufigkeiten. Die relativen Häufigkeiten stehen zurück.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Sicherung:
Während in Aufgabenteil a) durch die Grundgesamtheit aller 5000 Sportler geteilt wird, sind die Wahrscheinlichkeiten in b) und c) nur auf Teile der Gesamtheit bezogen, in Teil b) auf alle positiv Getesteten, in Teil c) auf alle nicht Gedopten.
Dieser Sachverhalt wird gesondert geklärt.</td><td>UG

LM 5</td><td>Die Folienvorlage LM 5 veranschaulicht noch einmal, dass sich die Wahrscheinlichkeiten auf Teile der Gesamtheit beziehen.</td></tr>
<tr><td>Verallgemeinerung:
Mit dem Ansatz: $\frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$ lassen sich diese Wahrscheinlichkeiten berechnen. Schwierig ist die Auswahl der möglichen Ergebnisse, die jetzt eine Teilmenge aller Ergebnisse sind.</td><td>Tafel</td><td></td></tr>
<tr><td>Vertiefung:
Dopingaufgabe, jetzt Teil d.


<table>
<tr><td></td><td>Doping</td><td>Kein Doping</td><td>Summe</td></tr>
<tr><td>Pos. Befund</td><td>940</td><td>80</td><td>1020</td></tr>
<tr><td>Neg. Befund</td><td>60</td><td>3920</td><td>3980</td></tr>
<tr><td>Summe</td><td>1000</td><td>4000</td><td>5000</td></tr>
</table></td><td>PA</td><td></td></tr>
<tr><td>Hausaufgabe:
Aus dem Aufgabenpool sind Aufgaben auszuwählen.
Dabei soll auch auf eine Binnendifferenzierung und/oder arbeitsteiliges Vorgehen geachtet werden.</td><td>SM 2.1
Aufg.
2 – 3
SM 2.2
Aufg.
4 – 5
SM 2.3
Aufg.
6 – 8</td><td>Die Vorstellung der Ergebnisse kann zeitökonomisch durch Verwendung der Folienvorlage LM 3 erfolgen.</td></tr>
<tr><td>Präsentation:
Die Schülerinnen und Schüler präsentieren ihre Ergebnisse aus der Hausaufgabe. Noch nicht bearbeitete Aufgaben des Pools werden bearbeitet.</td><td>SM 2.1
Aufg.
2 – 3
SM 2.2
Aufg.
4 – 5
SM 2.3
Aufg.
6 – 8</td><td></td></tr>
</table>

Folienvorlage LM 5: Dopingaufgabe

Für die Beantwortung der Frage interessiert nur die jeweils markierte Zeile bzw. Spalte

b) **Anteil *der Ungedopten* an den positiv Getesteten**

	Doping	kein Doping	Summe
Positiver Befund	47	99	146
Negativer Befund	3	4851	4854
Summe	50	4950	5000

P(nicht gedopt und trotzdem bezichtigt) = $\frac{99}{146}$

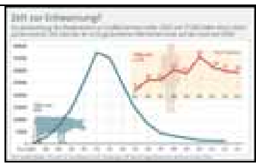
c) **Anteil *der negativ Getesteten* an allen nicht Gedopten**

	Doping	kein Doping	Summe
Positiver Befund	47	99	146
Negativer Befund	3	4851	4854
Summe	50	4950	5000

P(nicht gedopt und negativ) = $\frac{4851}{4950}$

Thema 3: Das Projekt Anwendungen von Vierfeldertafeln	**Dauer:** 3 Stunden
Vierfeldertafel und Baumdiagramm erweisen sich auch und vor allem in Anwendungen als hilfreich. Hier sollen unterschiedliche medizinische Tests untersucht werden. Mit der Bearbeitung einher geht auch die Frage nach der Beurteilung der Verfahren und der Zuverlässigkeit ihrer Ergebnisse.	
Besondere Materialien/Technologie: Ggf. LM 3, LM 6, ggf. LM 7; SM 3.1 bis SM 3.13; ggf. Präsentationssoftware oder Plakate	

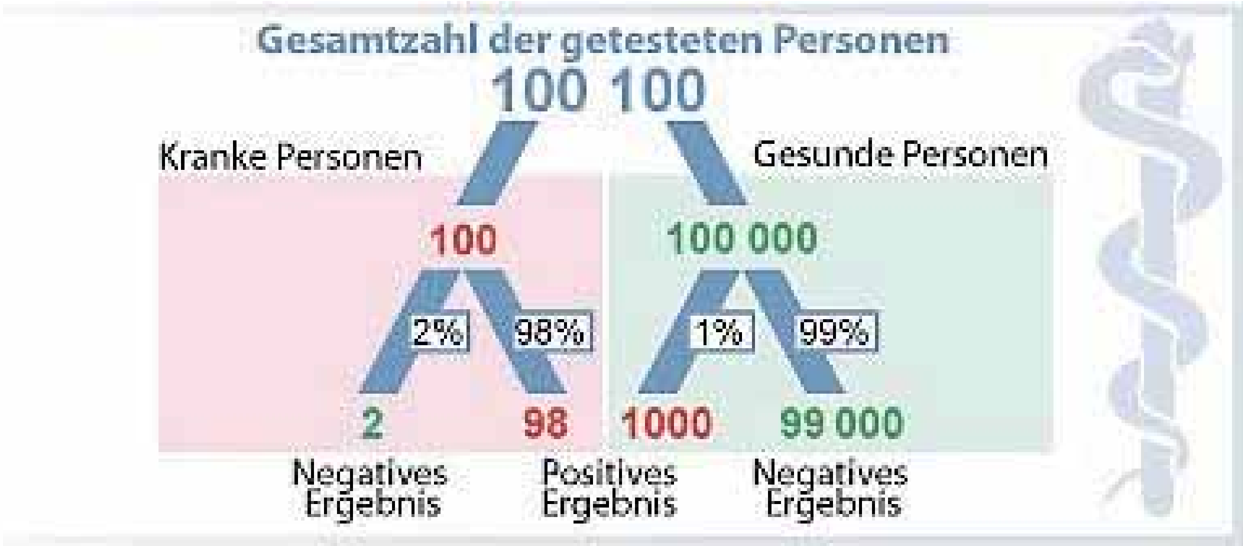
Ablauf der Stunde 1:

Inhalt	**Medien**	**Kommentar**
Einstieg: Anhand der Aufgabe zum BSE-Schnelltest wird der Einstieg in medizinischen Tests gegeben. 	SM 3.1 Aufg. 1	
Erarbeitung: Im Zusammenhang mit medizinischen Tests sind die Begriffe „Prävalenz", „Sensitivität" und „Spezifität" zu klären. Bei der Erarbeitung der Vierfeldertafel sollte auch wieder mit absoluten Häufigkeiten argumentiert werden.	Tafel UG	Die Folienvorlage LM 3 kann alternativ zur Tafel als Medium eingesetzt werden.
Auswertung: Die Berechnung einiger Wahrscheinlichkeiten ergibt diskussionswürdige Ergebnisse. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Rind kein BSE hatte, unter der Bedingung, dass der Test negativ ausfiel, ist hoch: $P(BSE-\mid T-) = \frac{997002}{997032} = 0{,}9999$ Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Rind BSE hatte, unter der Bedingung, dass der Test positiv ausfiel, ist zwar auch hoch: $P(BSE+\mid T+) = \frac{1970}{2968} = 0{,}6637$, aber doch niedriger als erwünscht. Das Ergebnis bedeutet ja, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein Rind kein BSE hatte, unter der Bedingung, dass der Test positiv ausfiel, mit $P(BSE-\mid T+) = 0{,}3363$ recht hoch ist.	PA UG	Den Berechnungen liegt die Annahme zu Grunde, dass 1.000.000 Rinder getestet werden. Diese Zahl ist für einen Untersuchungszeitraum von einem Jahr in Deutschland sicher eher zu klein angesetzt.
Fazit: Der Test erkennt bei sehr vielen der Erkrankten die Krankheit. Nur bei wenigen Gesunden wird falsch diagnostiziert, aber es kommen Falschdiagnosen vor.	UG	LM 6 kann zur Verdeutlichung herangezogen werden.
Hausaufgabe: Die Erfahrungen mit medizinischen Tests und der Aussagekraft ihrer Ergebnisse sollen in der Hausaufgabe vertieft werden. Es geht u.a. um einen fiktiven Schnelltest auf Ziegenhaar-Allergie.	SM 3.2 Aufg. 2 und 3	

Ablauf der Stunden 2 und 3:

Inhalt	**Medien**	**Kommentar**
Bearbeitung: Die Schülerinnen und Schüler erarbeiten anhand der vorliegenden Materialien Lösungen der Problemstellungen aus dem Bereich der medizinischen Tests. 	SM 3.3 bis SM 3.13 Gruppen- aufträge	Die Bearbeitung erfolgt in Form einer arbeitsteiligen Gruppenarbeit. Die Aufgaben für die Gruppenarbeit sind dabei offen für Erweiterungen und Ergänzungen.
Präsentation: Jede Gruppe präsentiert ihre Ergebnisse im Plenum. Auch hier steht eine Bewertung der Aussagekraft der Tests im Mittelpunkt des Interesses.	Tafel Blanko- folie	Die Folienvorlage LM 3 kann alternativ zur Tafel eingesetzt werden.
Zusatzangebot: Die Schülerinnen und Schüler müssen sich vor der Präsentation Gedanken darüber machen, unter welchen Bedingungen eine Präsentation gelungen ist oder eben nicht. Dazu bedarf es der Reflexion über entsprechende Entscheidungs-kriterien. Wenn die Situation in der Klasse es erfordert, kann hier mit dem bereitgestellten Material Hilfestellung bei der Erarbeitung solcher „Goldenen Regeln für eine tolle Präsentation“ gegeben werden.	LM 7	Das LM 7 ist nur ein Zusatzangebot. Selbstverständlich sind andere Formen der Erarbeitung sinnvoll und möglich. Auf diese Weise wird allerdings auch eine Bewertung der Präsentationen vorbereitet und kann ggf. auch durch die Schülerinnen und Schüler geschehen.

Folienvorlage LM 6: Aussagekraft von medizinischen Tests



Quelle: www.wikipedia.de

Hinweis: Ein Bild ähnlich dem aus Aufgabe 10 der Klassenarbeitsaufgaben oder in MatheNetz 9 (Westermann Verlag, ISBN 198-3-14-123959-1, S. 123) kann den Sachverhalt verdeutlichen.

Folienvorlage LM 6: Erarbeitung von Regeln für eine Präsentation (optional einzusetzen)

Präsentation

Aufgabe 1:

Lest euch den umseitigen Text genau durch. Tragt in die Lücken die folgenden Begriffe so ein, dass sich sinnvolle Sätze ergeben:

Aufmerksamkeit • Fragen • Runde • präsentieren • Beifall • Imkers • Arbeitsblatt • Wiederholung • Veranschaulichung • Overhead-Projektor • Kreuzworträtsel • Schaubildern • erläutern • auszufüllen • Honig • Plakat • beantworten • Drohnen • Ablauf • Gruppenmitglieder • Tafel • frei

Aufgabe 2:

Formuliert in der Gruppe „7 goldene Regeln“, die bei der Präsentation des Gruppenergebnisses beachtet werden sollten. Tragt eure Regeln in der Tabelle unten ein!

Regeln für eine gute Präsentation

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

Eine tolle Präsentation

Meike, Anne, Claudia, Benny und Christian haben zum Thema „Bienen" einiges erarbeitet, was sie vor der Klasse _________________ sollen. Sie haben auf der Rückseite der Tafel einige Leitfragen aufgeschrieben, auf die sie während der Präsentation eingehen wollen. Außerdem haben sie ein schön gestaltetes _________________ sowie eine Folie zur Veranschaulichung vorbereitet. Sogar einige Werkzeuge des Imkers haben sie mitgebracht, die sie während der Präsentation vorstellen und _________________ möchten. Und natürlich haben sie sich vorher den _________________ besorgt und vom Lehrer erklären lassen. Die tollste Idee aber: Sie haben ein _________________ mit verschiedenen Fragen und Lückensätzen vorbereitet, die die Zuhörer im Laufe des Vortrags beantworten sollen.

Die Präsentation selbst läuft wie folgt ab: Meike beginnt. Sie schaut freundlich in die _________________, bittet kurz um Ruhe und wartet geduldig ab, bis alle aufmerksam sind. Dann erklärt sie kurz den _________________ der Präsentation und weist auf die Leitfragen an der _________________ hin. Ferner stellt sie die übrigen _________________ vor und erläutert, wer zu welchem Punkt was sagen wird. Dabei spricht sie _________________ und schaut während ihrer Rede stets die Mitschüler an. Um freie Rede bemühen sich auch die übrigen Gruppenmitglieder, als sie an der Reihe sind. Anne berichtet über die Bienenkönigin, Claudia stellt die _________________ (männlichen Bienen) vor, Benny schildert das Leben und Wirken der Arbeitsbienen, und Christian klärt die Klasse darüber auf, was beim Blütenbesuch geschieht und wie der schließlich entstehende _________________ zustande kommt. Dann kommt nochmals Meike an die Reihe, um die Arbeit und die Werkzeuge des _________________ kurz zu erläutern. Alle Präsentatoren tragen nicht nur frei vor, sondern bemühen sich auch um _________________ in Form von Skizzen, _________________ Honiggläsern und sonstigen Gegenständen aus der Imker-Zunft.

Nach dem Teilvortrag werden _________________ erbeten und so weit wie möglich beantwortet. Die Zuhörer können bereits während der Präsentationen die Kontrollfragen auf dem vorbereiteten Arbeitsblatt _________________. Sie erhalten aber auch ganz am Ende noch mal etwas Zeit, um das Arbeitsblatt komplett und _________________. Und dann der Clou: Die fünf Präsentatoren haben noch ein zusätzliches _________________ vorbereitet, in das wichtige Fachbegriffe einzutragen sind, die während der Vorträge angesprochen wurden. Dieses Rätsel ist bis zur nächsten Stunde auszufüllen und dient der häuslichen _________________. Kein Zweifel, die Gruppe hat sich eine Menge überlegt und mit ihrer anschaulichen und abwechslungsreichen Darbietung dazu beigetragen, dass die _________________ der Zuhörer groß war. Toll sei es gewesen, so der abschließende Kommentar des Lehrers. Auch die Zuhörer spenden kräftig _________________.

4. Wissensspeicher

Vierfeldertafel

Daten lassen sich häufig so gliedern, dass sie zwei Merkmalen mit jeweils zwei verschiedenen Ausprägungen zugeordnet werden.
Beispiel:
Von den 800 Schülerinnen und Schülern einer Schule spielen 120 Fußball. Davon sind 40 Mädchen. 280 Jungen spielen keinen Fußball.

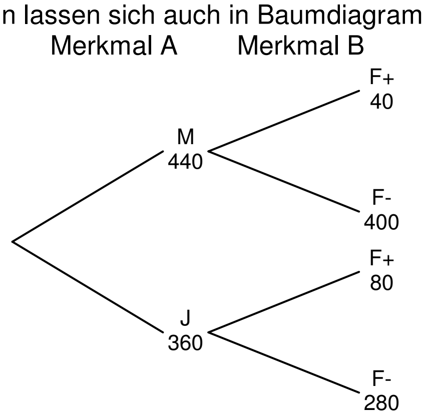
Diese Daten kann man in Tabellenform zusammenstellen, der Vierfeldertafel:

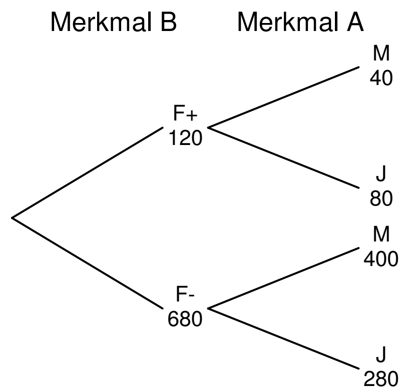
		Geschlecht		
		Mädchen (M)	Jungen (J)	gesamt
Fußball	spielt Fußball (F+)	**40**	80	**120**
	spielt kein Fußball (F-)	400	**280**	680
gesamt		440	360	**800**

Merkmal A: Geschlecht

Merkmal B: Spielt Fußball/spielt kein Fußball

Die Daten lassen sich auch in Baumdiagrammen anordnen:





Wahrscheinlichkeiten

Mithilfe der Vierfeldertafel lassen sich Wahrscheinlichkeiten berechnen.

Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses unter der Voraussetzung eines gegebenen Merkmals beträgt:

$$\frac{\textit{Anzahl der günstigen Ereignisse}}{\textit{Anzahl der möglichen Ereignisse}}.$$

Zu der Fragestellung sucht man die Spalte bzw. Zeile des Merkmals.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit spielt ein Junge Fußball?

		Geschlecht Mädchen (M)	Jungen (J)	gesamt
Fußball	spielt Fußball (F+)	**40**	80	**120**
	spielt kein Fußball (F-)	400	**280**	680
gesamt		440	360	**800**

Von 360 Jungen spielen 80 Fußball.

$$p = \frac{\textit{Anzahl fußballspielender Jungen}}{\textit{Anzahl Jungen}}$$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Person, die Fußball spielt, ein Mädchen?

		Geschlecht Mädchen (M)	Jungen (J)	gesamt
Fußball	spielt Fußball (F+)	**40**	80	**120**
	spielt kein Fußball (F-)	400	**280**	680
gesamt		440	360	**800**

Von 120 Personen, die Fußball spielen, sind 40 Mädchen.

$$p = \frac{\textit{Anzahl fußballspielender Mädchen}}{\textit{Anzahl fußballspielender Personen}}$$

5. Selbsteinschätzung

Schätze deine Kenntnisse ein und mache ein Kreuz in der entsprechenden Spalte.

Ich kann	**ich bin sicher**	**ich muss noch üben**	**ich brauche Hilfe**
• Daten aus Vierfeldertafeln entnehmen. Siehe Aufgabe 1.			
• unvollständige Vierfeldertafeln ergänzen. Siehe Aufgabe 2.			
• Vierfeldertafeln aus einem gegebenen Text erstellen. Siehe Aufgabe 3.			
• zu einer Vierfeldertafel beide zugehörige Baumdiagramme erstellen. Erstelle zu der Vierfeldertafel aus Aufgabe 1 die Baumdiagr.			
• aus einem Baumdiagramm eine Vierfeldertafel erstellen. Siehe Aufgabe 4.			
• einer Vierfeldertafel Wahrscheinlichkeitsaussagen entnehmen.			

Aufgaben zur Selbsteinschätzung

Aufgabe 1

Die Tabelle gibt einen Überblick über die Mitglieder eines Vereins. Gib an,

- wie viele Erwachsene weiblich sind.
- wie viele der weiblichen Mitglieder noch Jugendliche sind.
- wie viele Vereinsmitglieder weiblich sind.

		Altersgruppe		gesamt
		Jugendliche	Erwachsene	
Geschlecht	weiblich	60	100	160
	männlich	20	60	80
gesamt		80	160	240

Aufgabe 2

Die Tabellen geben einen Überblick über die Mitglieder zweier Vereine.
Ergänze die Tabellen.

Tabelle 1

		Altersgruppe		gesamt
		Jugendliche	Erwachsene	
Geschlecht	weiblich	400		900
	männlich		800	
gesamt				2000

Tabelle 2

		Altersgruppe		gesamt
		Jugendliche	Erwachsene	
Geschlecht	weiblich	20 %		45 %
	männlich		40 %	
gesamt		35 %		

Tabelle 3

		Altersgruppe		gesamt
		Jugendliche	Erwachsene	
Geschlecht	weiblich	0,51		
	männlich			0,27
gesamt		0,66		1

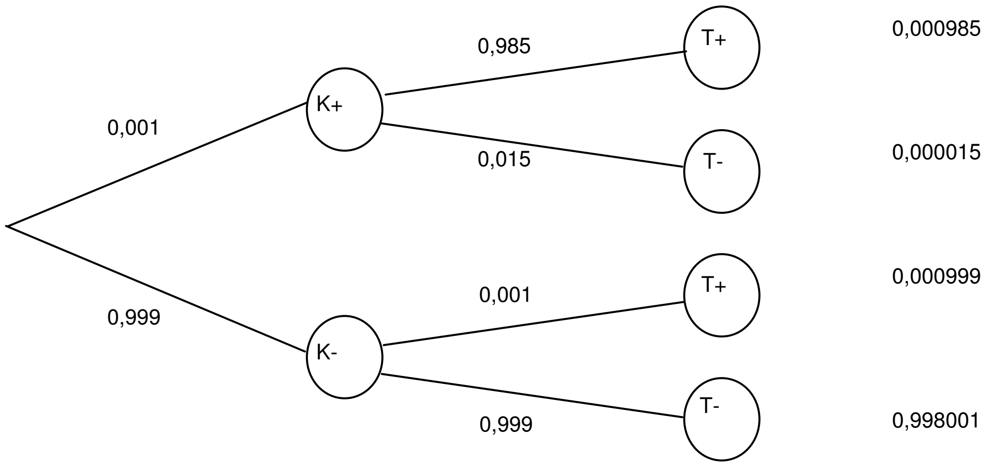
Aufgabe 3

Erstelle aufgrund der Angaben eine Vierfeldertafel mit absoluten Häufigkeiten.

> Von den 120 Schülerinnen und Schülern sind 45% Jungen. 25 Jungen spielen ein Instrument, bei den Mädchen sind dies 50%.

Aufgabe 4

Im folgenden Baumdiagramm bedeutet K+ bzw. K-, dass eine Krankheit vorliegt, T+ bzw. T-, dass ein Test auf diese Krankheit positiv ist.
Erstelle die zugehörige Vierfeldertafel und vervollständige sie.



Aufgabe 5

In einer Schulklasse sind 25 Jungen und 5 Mädchen. 80% aller Jungen interessieren sich für Fußball, aber nur 20% aller Mädchen.
Eine Person sagt: „Fußball interessiert mich nicht". Welches Geschlecht hat wohl diese Person?

		Geschlecht		gesamt
		Mädchen	Jungen	
Einstellung	Interesse an Fußball	1	20	21
	kein Interesse an Fußball	4	5	9
gesamt		5	25	30

6. Rechnerfreie Aufgaben

Aufgabe 1

Ergänze, wo eindeutig möglich, zu einer vollständigen Vierfeldertafel

a)

	M	W	Σ
ja	10		
nein		5	
Σ	20		50

b)

	J	M	Σ
groß	32		94
klein			
Σ	108	143	241

c)

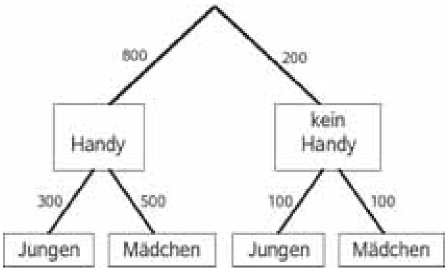
	alt	jung	Σ
richtig	31	4	
falsch			41
Σ		8	

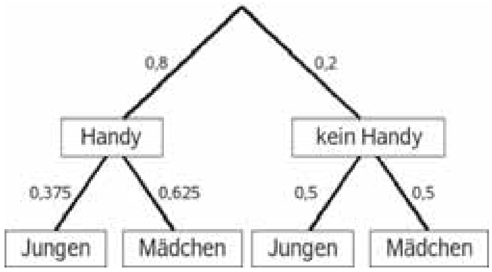
Aufgabe 2

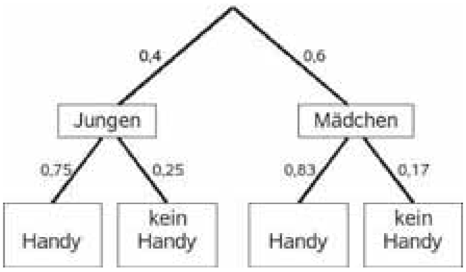
Erstelle zur Tabelle a) aus Aufgabe 1 zwei verschiedene Baumdiagramme (mit absoluten Häufigkeiten)

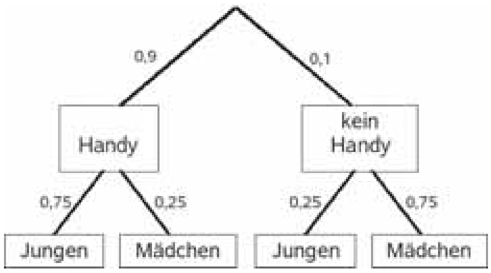
Aufgabe 3

Ein Marktforschungsinstitut hat 1000 Jugendlichen hinsichtlich des Handybesitzes befragt. Es stellt sich heraus, dass von den 400 befragten Jungen 100 kein Handy besitzen. Bei den befragten Mädchen sind es ebenso viel.
Markiere die Baumdiagramme, die zur beschriebenen Situation gehören.

A


B


C


D


Aufgabe 4

a) Stelle rechts die Daten in einer vollständigen Vierfeldertafel dar:
Unter den 1000 befragten Jugendlichen gaben 300 Jungen an, sie besäßen einen Motorroller. Daneben wurden auch 600 Mädchen befragt, von denen nur 200 einen Motorroller hätten.

b) Ein Jugendlicher wird zufällig ausgewählt. Gib die Wahrscheinlichkeit an, dass es

(i) ein Junge ist;
(ii) ein Junge ist, der einen Motorroller besitzt;
(iii) ein Junge ist, wenn man weiß, dass er einen Motorroller besitzt;
(iv) ein Besitzer eines Motorrollers ist, wenn man weiß, dass es ein Junge ist;
(v) ein Besitzer oder eine Besitzerin eines Motorrollers ist?

.

7. Klassenarbeitsaufgaben

Aufgabe 1:

In die Jahrgangsstufe 9 eines Gymnasiums gehen 80 Mädchen und 55 Jungen.
Von den Mädchen sind 45 Fahrschüler, von den Jungen kommen 25 zu Fuß zur Schule.

a) Erstelle eine Vierfeldertafel.
b) Eine Schülerin oder ein Schüler aus der Jahrgangsstufe wird ausgelost.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit
(i) kommt diese Person zu Fuß zur Schule?
(ii) ist diese Person eine Fahrschülerin?

Aufgabe 2:

Stelle die in der Zeitungsmeldung enthaltenen Daten in einer Vierfeldertafel zusammen.
Zeichne beide zugehörige Baumdiagramme.

Für Gäste ist die erste Halbzeit besser!
Wie uns mitgeteilt wurde, fallen zwar in der Bundesliga 56,3% der Tore in der 2.Halbzeit. Von diesen Toren werden aber nur 38,2% von den Gästen geschossen. In der ersten Halbzeit dagegen werden 41,3% der Tore von den Gästen geschossen.

Aufgabe 3:

Frau Schmidt wird Zeuge eines Verkehrsunfalls. Aufgeregt berichtet sie ihrem Mann:
“Stell dir vor, da sehe ich, wie das Taxi erst den anderen Wagen rammt und dann davonfährt. Der Taxifahrer, der Fahrerflucht beging, fuhr ein silbernes Taxi. “
In dem Wohnort von Frau Schmidt gibt es 25 silberne Taxis und 65 beigefarbige Taxis. Nun weiß Herr Schmidt aber, dass seine Frau sich in 25% der Fälle in der Farbe des Taxis irrt.

a) Erstelle eine Vierfeldertafel.
b) Bestimme aufgrund der Beobachtung von Frau Schmidt die Wahrscheinlichkeit, dass wirklich ein Fahrer eines silbernen Taxis Fahrerflucht begangen hat.

Aufgabe 4:

Obwohl die neuen Euroscheine als fälschungssicher gelten, kommen doch immer wieder Fälschungen vor, die von den Bankautomaten nicht als Fälschung erkannt werden.
Dazu wurde folgende Vierfeldertafel erstellt:

	Schein ist gefälscht	Schein ist nicht gefälscht	
Fälschung wurde erkannt	190		10 170
Fälschung wurde nicht erkannt			
	200		100 000

a) Vervollständige die Vierfeldertafel.
b) Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein gefälschter Schein nicht erkannt wird.
c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein „echter“ Schein für eine Fälschung gehalten?

Aufgabe 5:

In die Jahrgangsstufe 9 eines Gymnasiums gehen 80 Mädchen und 55 Jungen.
Von den Mädchen kommen 45 mit dem Bus, von den Jungen kommen 25 zu Fuß zur Schule.

a) Erstelle eine Vierfeldertafel.
b) Eine Schülerin oder ein Schüler aus der Jahrgangsstufe wird ausgelost.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit
1. kommt diese Person zu Fuß zur Schule?
2. ist diese Person ein Mädchen, welches mit dem Bus kommt?
Erläutere jeweils deine Berechnungen.

Aufgabe 6:

Ein Marktforschungsinstitut hat 1000 Jugendlichen hinsichtlich Handybesitzes befragt. Es stellt sich heraus, dass von den 400 befragten Jungen 100 kein Handy besitzen. Bei den befragten Mädchen sind es ebenso viel.

Prüfe jede der folgenden Aussagen rechnerisch auf ihre Richtigkeit:
a) Es gibt mehr Jugendliche, die ein Handy besitzen, als solche, die keines besitzen.
b) Ein gefundenes Handy gehört mit größerer Wahrscheinlichkeit einem Jungen statt einem Mädchen.
c) Ein Junge hat mit größerer Wahrscheinlichkeit ein Handy als ein Mädchen.
d) Tobias und Lisa sind unterschiedlicher Meinung, ob die folgende Aussage richtig ist:
„Es sind genauso viele Jungen wie Mädchen, die kein Handy besitzen.“
Tobias findet, dass die Aussage richtig ist. Lisa ist anderer Meinung.
Erläutere, dass unter einem bestimmten Blickwinkel jeder der beiden Recht hat.

Aufgabe 7:

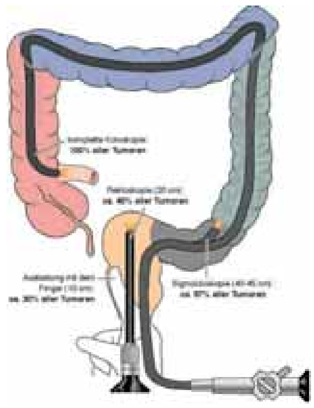
Ein Marktforschungsinstitut hat 1000 Jugendlichen hinsichtlich Handybesitzes befragt. Es stellt sich heraus, dass von den 400 befragten Jungen 100 kein Handy besitzen. Bei den befragten Mädchen sind es ebenso viel.

	Handy ja	Handy nein	Summe
Mädchen		100	
Junge		100	400
Summe			1000

a) Vervollständige die Vierfeldertafel (auf diesem Blatt).
b) Prüfe jede der folgenden Aussagen rechnerisch auf ihre Richtigkeit:
- Es gibt mehr Jugendliche, die ein Handy besitzen, als solche, die keines besitzen.
- Ein gefundenes Handy gehört mit größerer Wahrscheinlichkeit einem Jungen als einem Mädchen.
- Ein Junge hat mit größerer Wahrscheinlichkeit ein Handy als ein Mädchen.

c) Tobias und Lena sind unterschiedlicher Meinung, ob die folgende Aussage richtig ist:
„Es sind genauso viele Jungen wie Mädchen, die kein Handy besitzen.“
Tobias findet, dass die Aussage richtig ist. Lena ist anderer Meinung. Unter einem bestimmten Blickwinkel hat jeder der beiden Recht. Erläutere dieses durch eine entsprechende Berechnung mithilfe der Vierfeldertafel.

Aufgabe 8:



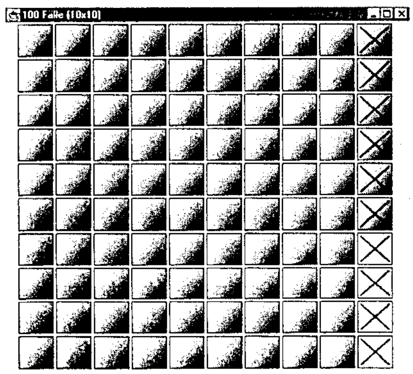
Unter 10.000 Fünfzigjährigen haben etwa 30 Personen Darmkrebs, 9.970 nicht. Der Hämokkult – Test fällt bei 15 der 30 Betroffenen positiv aus, die andere Hälfte erkennt der Test nicht. 300 Menschen von 9.970 erhalten einen falsch positiven Befund.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat eine Person Darmkrebs, wenn der Test positiv ausgefallen ist?
Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat eine Person keinen Darmkrebs, wenn der Test negativ ausgefallen ist?
Erstelle zur Lösung eine Vierfeldertafel und die Baumdiagramme.
b) Ein Mediziner schlägt vor, diesen Test für alle Personen über 50 Jahre verpflichtend einzuführen. Bewerte den Vorschlag aufgrund deiner Ergebnisse oben.
c) Der Test wird nun in einer sogenannten Risikogruppe durchgeführt. Hier liegt der Anteil der Personen, die an Darmkrebs leiden, bei 40%.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person tatsächlich an Darmkrebs erkrankt ist, wenn das Testergebnis positiv ist?

Aufgabe 9:

Unter 10.000 Fünfzigjährigen haben etwa 30 Personen Darmkrebs, 9.970 nicht. Der Hämokkult-Test fällt bei 15 der 30 Betroffenen positiv aus, die andere Hälfte erkennt der Test nicht (falsch-negativ). 300 Menschen von 9.970 erhalten einen falsch-positiven Befund.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat eine Person Darmkrebs, wenn der Test positiv ausgefallen ist?
Erstelle zur Lösung ein Baumdiagramm.

Aufgabe 10:



Vor einigen Jahren fand der damalige bayrische Innenminister Edmund Stoiber in einer statistischen Erhebung, dass 60 % der Heroinabhängigen Haschisch geraucht hätten, bevor sie herion-abhängig wurden. Edmund Stoiber betrachtete das als Beweis dafür, dass Haschisch eine „Einstiegsdroge" ist. Wenn jemand Haschisch raucht, so argumentierte er, wird er oder sie später (ungefähr mit einer Wahrscheinlichkeit von 60 %) als Heroinabhängiger enden.

In dem Bild rechts repräsentieren die Kästchen Drogensüchtige. Dargestellt sind 96 Haschischkonsumenten und 10 Heroin-abhängige.
Berechne mithilfe der Darstellung folgende Wahrscheinlichkeiten:
P(Heroin | Haschisch) und P(Haschisch | Heroin).
Nimm dann zu der Aussage von Edmund Stoiber Stellung.

Anmerkung:
Diese Aufgabe ist nur nach entsprechender unterrichtlicher Vorbereitung für eine Klassenarbeit verwendbar!

Das sollst Du im Kopf können

Aufgabe 1

a) Gib die möglichen Abmessungen für einen Quader von 1 Liter Volumen an!

b) $- 4 \cdot (- 1{,}2) =$

c) Wie viel sind 30% von 120 €?

d) Wie lautet die Lösungsmenge von $x^2 = 49$?

e) $- 1{,}3 + 5{,}1 =$

f) Auf welcher Gerade liegen alle Punkte, deren Abstand zu A genau so groß ist wie ihr Abstand zu B?

g) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mit zwei Würfeln einen 6er-Pasch zu werfen?

h) $\frac{2}{3}$ von 48

i) Gib mögliche Maße der Höhe und der Grundseite für ein Dreieck mit dem Flächeninhalt 12 cm^2 an!

j) $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} =$

Aufgabe 2

a) Welchen Flächeninhalt hat in etwa ein Fußballfeld?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einer Münze zweimal nacheinander Kopf zu werfen?

c) 40% von 500 kg?

d) $2{,}5 \cdot 0{,}4 =$

e) $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} =$

f) Gib 1,25 als Bruch an!

g) Löse $3x + 1 = 7$!

h) $4{,}5 - 7{,}1 =$

i) Wie bestimmt man den Mittelpunkt des Umkreises eines Dreiecks?

j) Wie viele Nullstellen hat die Parabel mit der Gleichung $y = x^2 + 3$?

Aufgabe 3

a) Gib die Lösungen zu $x^2 = -49$ an!

b) - 2,3 + 4,1 =

c) Wie groß ist der Oberflächeninhalt eines Würfels mit der Kantenlänge 3 cm?

d) Schreibe 25% als Bruch.

e) Wie heißt die längste Sehne des Kreises?

f) - 46 : (- 1/2) =

g) Wie wahrscheinlich ist es, bei zwei Münzwürfen genau einmal Kopf zu erhalten?

h) Gib die Scheitelpunktkoordinaten der Parabel mit der Gleichung $y = x^2 - 4$ an!

i) $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} =$

j) Löse $-3x = 15$!

Aufgabe 4

a) Wie heißt die Figur, deren Punkte von einem Punkt Z den Abstand 5 cm haben?

b) - 2,4 : 6 =

c) Ein Dreieck mit dem Flächeninhalt 6 cm^2 hat eine Grundseite der Länge 4 cm. Wie groß ist die Höhe?

d) Wie viel sind 40% von 300 €?

e) Wie viel Prozent sind 60 € von 240 €?

f) Bestimme die Lösung der Gleichung $x - 4 = 5$!

g) Wie wahrscheinlich ist es, mit zwei Würfeln eine 2 zu werfen?

h) $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} =$

i) Nenne ein Viereck mit genau 2 Symmetrieachsen!

j) 125 – 96 =

Aufgabe 5

a) Gib die möglichen Abmessungen für einen Quader von 5 Liter Volumen an.

b) - 8·(- 1,7) =

c) Wie viel sind 40% von 150 € ?

d) Wie lautet die Lösungsmenge von $x^2 = 49$?

e) Wird eine Figur bei zentrischer Streckung mit dem Streckfaktor 1,2 größer oder kleiner?

f) Auf welcher Gerade liegen alle Punkte, deren Abstand zur x-Achse genau so groß ist wie ihr Abstand zur y-Achse?

g) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mit drei Würfeln drei gleiche Zahlen zu werfen?

h) Multipliziere aus: $(2x+3)\cdot(x-4)$.

i) Gib mögliche Maße der Höhe und der Grundseite für ein Dreieck mit dem Flächeninhalt 15 cm^2 an!

j) $\frac{1}{5} + \frac{2}{7} =$

Aufgabe 6

a) Welchen Flächeninhalt hat in etwa ein Stellplatz für ein Auto?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einer Münze dreimal nacheinander Kopf zu werfen?

c) Welchen Wert hat der Term $3a \cdot (a-7)$ für a = 2?

d) Wie verändert sich der Flächeninhalt einer Figur bei zentrischer Streckung mit dem Streckfaktor 2?

e) $\frac{2}{5} + \frac{4}{7} =$

f) Gib 1,25 als Bruch an.

g) Wie viele Lösungen kann die Gleichung $3x + 1 = 7$ haben?

h) Multipliziere aus und fasse zusammen: $2 \cdot (3x+4) \cdot (x-8)$.

i) Wie bestimmt man den Mittelpunkt des Inkreises eines Dreiecks?

j) Wie viele Nullstellen hat die Parabel mit der Gleichung $y = x^2 + 3$?

Aufgabe 7

a) Gib die Lösungen zu $x^2 = 400$ an!

b) Berechne $(x-9)^2$.

c) Wie groß ist der Rauminhalt eines Würfels mit der Kantenlänge 3 cm?

d) Unter welchen Bedingungen sind zwei Figuren mathematisch ähnlich?

e) Wie heißt die längste Sehne des Kreises?

f) Welchen Wert hat der Term $a \cdot (a+5)$ für a = –3?

g) Wie wahrscheinlich ist es, bei zwei Münzwürfen genau einmal Zahl zu erhalten?

h) Gib die Scheitelpunktkoordinaten der Parabel mit der Gleichung $y = x^2 - 9$ an.

i) Faktorisiere und fasse zusammen: $(12x+4) - (15x+5)$.

j) Löse $-3x + 7 = 15$.

Aufgabe 8

a) Wie heißt der Ort aller Punkte, die von einem Punkt Z den Abstand 9 cm haben?

b) Sind zwei Dreiecke kongruent, wenn sie in der Größe der Winkel übereinstimmen?

c) Ein Dreieck mit dem Flächeninhalt 24 cm² hat eine Grundseite der Länge 4 cm. Wie lang ist die Höhe?

d) Wie viel sind 40% von 300 €?

e) Wie viel Prozent sind 60 € von 360 €?

f) Bestimme die Lösung der Gleichung $x \cdot (x-4) = 0$.

g) Wie wahrscheinlich ist es, mit zwei Würfeln eine 5 zu werfen?

h) Löse $\frac{3}{8} = \frac{5}{x}$.

i) In wie viele Dreiecke kann ein Quadrat durch Einzeichnen der Diagonalen zerlegt werden?

j) Nenne die Gleichung einer quadratischen Funktion, die keine Nullstellen hat.

Aufgabe 9

a) Welchen Wert bekommt der Term (x + 1) (x+3) für $x = 2$, $x = -2$, $x = -3$?

b) Kann ein Dreieck konstruiert werden, dessen Seiten die Längen 7 cm, 10 cm und 2 cm besitzen?

c) Fasse zusammen: $4a - 15a + 27a$.

d) Bei einem Würfel verdoppeln sich die Kantenlängen.
Wie verändert sich dadurch der Oberflächeninhalt?

e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim Wurf dreier Münzen zweimal „Zahl“ zu erhalten?

f) Gib das Volumen von 10 Litern in cm³ an.

g) Berechne: 40 % von 35 €.

h) Berechne das Siebenfache des Terms $5x + 8$.

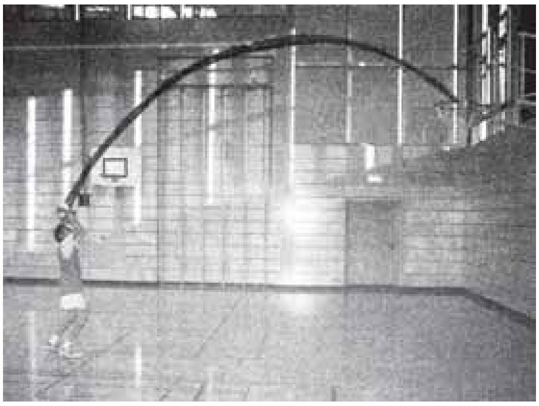
i) Welche Zahl muss man mit 14 multiplizieren, um 98 zu erhalten?

j) Berechne: $\frac{5}{6}$ von 90 € , $\frac{3}{4}$ von 120 m , $\frac{2}{9}$ von 560 l.

Das ist dein Basiswissen

Aufgabe 1

Mithilfe von Messgeräten wurden die folgenden Daten für den Flug eines Basketballs beim Freiwurf aufgezeichnet. Dabei beschreibt x die Entfernung von der Abwurfstelle und h(x) die Höhe des Balls, jeweils in m.



x in m	0	0,5	1	1,5
h(x) in m	2,00	2,75	3,20	3,60

x in m	2	2,5	3	3,5
h(x) in m	3,90	4,05	4,10	3,90

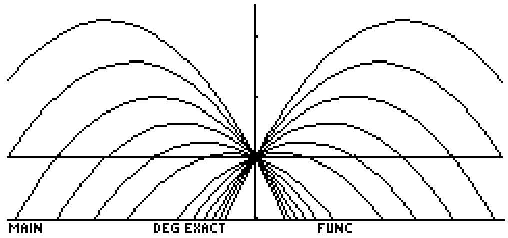
a) Übertrage die Werte aus der Tabelle in den TC und berechne, unter Darstellung deines Lösungsweges, ein quadratisches Modell.
b) Der Freiwurfpunkt befindet sich in einer Entfernung von 4,75 m zum Basketballkorb. Der Basketballkorb hängt in einer Höhe von 3,05 m. Überprüfe, ob der obige Freiwurf zum Erfolg führt.

Aufgabe 2

Der nebenstehende Screenshot zeigt eine Parabelschar mit der Window-Einstellung:

xmin = -2,5; xmax = 2,5; ymin = -1; ymax = 2,5

Erzeuge das Bild in deinem TC und gib die zugehörigen Funktionsgleichungen an.



Aufgabe 3

Die „Mutter aller Parabeln" ist die Normalparabel $y(x) = x^2$.
Sie ergibt sich aus der allgemeinen Form $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, wenn man a = 1, b = 0 und c = 0 setzt.
Im Folgenden soll untersucht werden, wie sich der Graph der Funktion im Vergleich zur Normalparabel ändert, wenn du die Parameter variierst.
Denke bei der Bearbeitung der Aufgaben daran, dass du deine Ergebnisse mithilfe des TC den anderen Schülern vorführen kannst!

a) Wir beschäftigen uns zunächst nur mit dem Parameter c. Dazu vergleichen wir die Graphen von Funktionen mit unterschiedlichen Werten des Parameters c und konstanten Parametern a und b. Gebt folgende Funktionsgleichungen in den y-Editor ein:

   $y1(x) = x^2 \qquad y2(x) = x^2 - 2 \qquad y3(x) = x^2 - 1 \qquad y4(x) = x^2 + 1 \qquad y5(x) = x^2 + 2$

   Experimentiere mit weiteren Werten von c. Beschreibe den Einfluss des Parameters c.
b) Führe auf ähnliche Weise eine Untersuchung von $f(x) = a \cdot x^2$ für den Parameter a durch.
c) Versuche, einen entsprechenden Zusammenhang für den Parameter b zu finden.

Aufgabe 4

Die „Mutter aller Parabeln“ ist die Normalparabel $y(x) = x^2$.
Sie ergibt sich aus der allgemeinen Form $f(x) = a \cdot (x - m) \cdot (x - n)$, wenn man a = 1, m = 0 und n = 0 setzt.
Im Folgenden soll untersucht werden, wie sich der Graph der Funktion im Vergleich zur Normalparabel ändert, wenn man die Parameter variiert.
Denke bei der Bearbeitung der Aufgaben daran, dass du deine Ergebnisse mithilfe des TC den anderen Schülern vorführen kannst!

a) Wir beschäftigen uns zunächst nur mit dem Parameter a. Dazu vergleichen wir die Graphen von Funktionen mit unterschiedlichen Werten des Parameters a und konstanten Parametern m und n. Gebt folgende Funktionsgleichungen in den y-Editor ein:
$y1(x) = x^2 \quad y2(x) = 2x^2 \quad y3(x) = -2x^2 \quad y4(x) = 3x^2 \quad y5(x) = -3x^2$
Experimentiere mit weiteren Werten von a. Beschreibe den Einfluss des Parameters a.
b) Führe auf ähnliche Weise eine Untersuchung von $f(x) = (x - m) \cdot (x - n)$ für die Parameter m und n durch.
c) Formuliere eine Aussage über die Lage des Scheitelpunktes in Bezug auf m und n.

Aufgabe 5

Du hast zwei Darstellungen für Parabeln kennen gelernt, die allgemeine Form, z. B. $y(x) = 2x^2 - 4x + 1$ und die faktorisierte Form, z. B. $y(x) = 4 \cdot (x - 5) \cdot (x + 2)$.
Jede Darstellung hat ihre Vorteile. Hier wirst du noch eine weitere Darstellung kennen lernen:

$$\boxed{y(x) = a \cdot (x - d)^2 + e}.$$

Hier geht es um die folgenden Fragen:
– Welche Auswirkungen haben die Parameter a, d und e auf die Form und Lage der Parabel im Vergleich zur Normalparabel?
– Was kann man aus dieser Gleichung direkt ablesen?

Um diese Fragen zu beantworten, wird zuerst $a = 1$ betrachtet. Es geht also um die Funktionsgleichung

$$\boxed{y(x) = (x - d)^2 + e}.$$

Zur Untersuchung sollst du im Rechner das Makro "par(x,d,e)" für die Funktionsgleichung erzeugen, um die Auswirkungen der beiden Parameter d und e komfortabel zu untersuchen.

Vorsicht, der TC multipliziert sofort aus, du kannst also nach der Eingabe von par(x,4,-2) nicht mehr erkennen, dass es sich um die Form $y(x) = (x - 4)^2 - 2$ handelt ($d = 4; e = -2$).

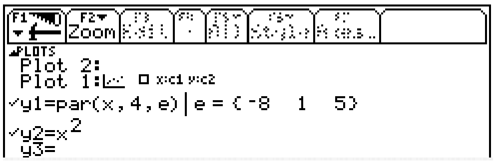
Folgendes Beispiel zeigt dir zur Erinnerung, wie man mit dem TC mit einer Eingabe Funktionen mit verschiedenen Parameterwerten erzeugen kann.

$y_1(x) = par(x,1,e) \mid e = \{-8,1,5\}$

$y_1(x) = (x - 1)^2 - 8$
$y_1(x) = (x - 1)^2 + 1$
$y_1(x) = (x - 1)^2 + 5$

Aufgabe 6

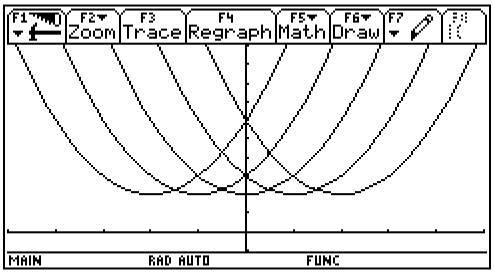
Untersuche die Auswirkungen des Parameters e auf die Form und Lage der Parabel im Vergleich zur Lage der Normalparabel und begründe deine Beobachtungen.

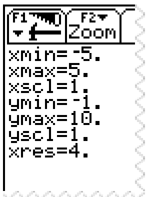


Aufgabe 7

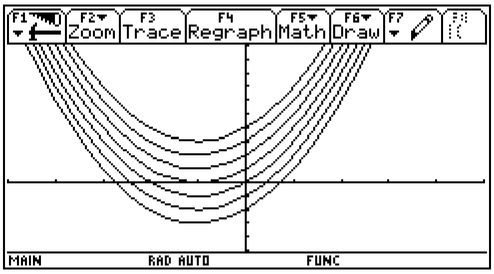
Erzeuge mit par(x,d,e) die beiden folgenden Grafiken und begründe deine Wahl von d und e.

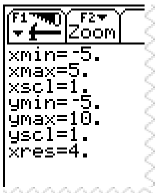
a)





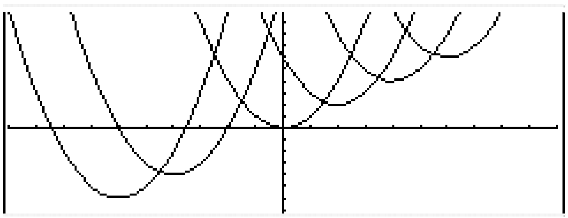
b)

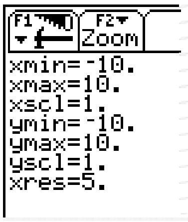




Aufgabe 8

Begründe: Die Scheitelpunkte aller Parabeln mit $y(x) = (x - d)^2 + d$ liegen auf der Ursprungsgeraden.

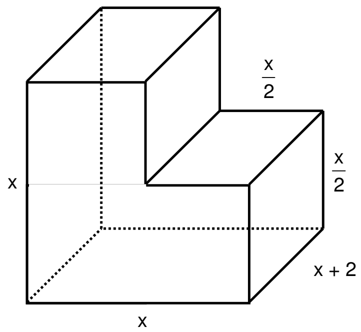




Tipps:
- Benutze par(x,d,d).
- Wähle für d verschiedene Werte.
- Du kannst auch die Ursprungsgerade einzeichnen.

Aufgabe 9

a) Entscheide, welche Terme das Volumen der Figur beschreiben.
b) Erkläre, welche Strategie jeweils angewendet wurde.
c) Finde einen weiteren Term für das Volumen.



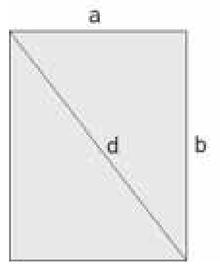
(1) $x^2 \cdot (x+2) - \frac{x^2 \cdot (x+2)}{4}$

(2) $3 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot (x+2)$

(3) $(x+2) \cdot (x^2 - \frac{1}{4}x^2)$

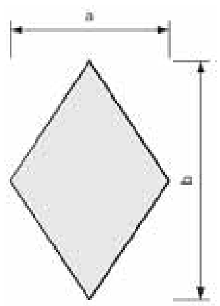
Aufgabe 10

In einem Rechteck seien die Seitenlängen mit a und b bezeichnet sowie die Diagonale mit d.
a) a = 3 dm, b = 5 dm. Berechne d.
b) a = 6 m, d = 8 m. Berechne b.



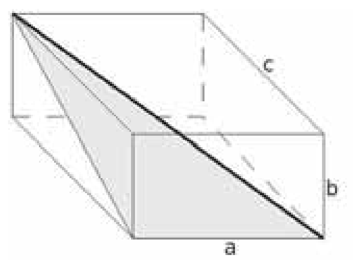
Aufgabe 11

Eine Raute habe die Diagonalenlängen a = 7 cm und b = 12 cm.
Berechne den Umfang und den Flächeninhalt der Raute.



Aufgabe 12

a) Der abgebildete Quader habe die Seitenlängen a = 3 cm, b = 2 cm und c = 5 cm.
Berechne den Flächeninhalt des grau gefärbten Dreiecks.
b) Die dick markierte Dreiecksseite ist eine Diagonale des Ausgangsquaders.
Entwickle eine Formel zur Berechnung der Diagonalenlänge für einen Quader mit den Seitenlängen a, b und c.

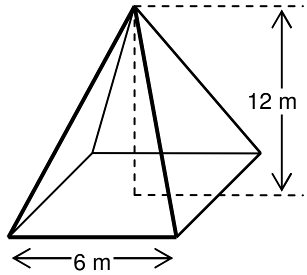


Aufgabe 13

Wilhelm ist Bauarbeiter. Er soll auf einem Grundstück den Grundriss eines Geräteschuppens abstecken und muss hierzu rechte Winkel konstruieren. Zur Verfügung hat er nur ein 12 m langes Seil und seinen Zollstock.
Beschreibe ein Verfahren, wie Wilhelm vorgehen sollte.

Aufgabe 14

Der quadratische Glockenturm des Doms zum heiligen Sankt Martin benötigt ein neues Kupferdach (siehe Skizze). Ermittle die benötigte Menge an Kupferblech.

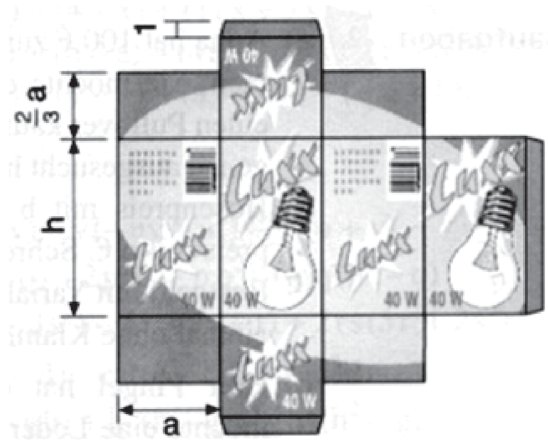


Aufgabe 15[1]

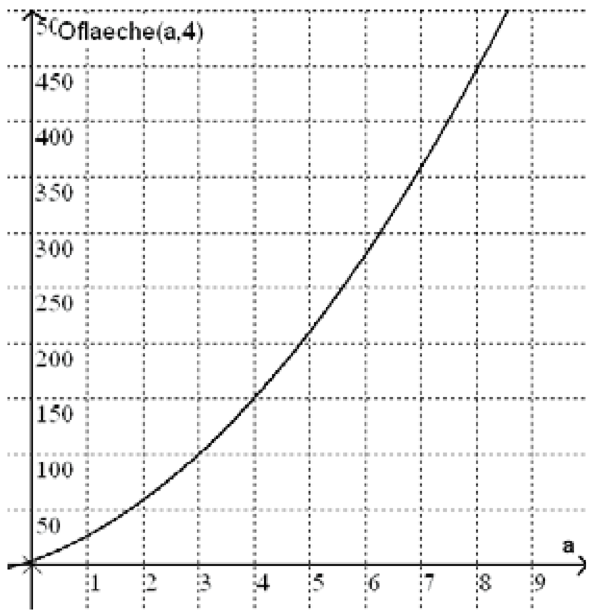
Glühlampen und deren Kartons gibt es in mehreren Größen. Rechts siehst du das Netz.

a) Stelle eine Funktion Oflaeche(a,h) für die benötigte Papiermenge auf. Vernachlässige dabei die Abschrägungen an den Laschen, d. h. berechne auch diese als Rechtecke.
b) Vervollständige die Tabelle.

a in cm	1	2	2,7	3,5	4	4,8	6
h in cm	3	3	3,7	4	5	5	7
Oflaeche(a,h) in cm^2							



Aufgabe 16



Der Graph gehört zu Oflaeche(a,4).

a) Erläutere die Bedeutung des Terms.
b) Welchen Oberflächeninhalt hat der Karton bei einer Kantenlänge von a = 8 cm?
c) Der Oberflächeninhalt soll weniger als 350 cm² betragen. Gib mögliche Kantenlängen an.

[1] EDM 8, 3-507-87122-X, Schroedel

Aufgabe 17

Gegeben ist ein Quader mit quadratischer Grundfläche a^2 und der Höhe b.

a) Erstelle die beiden Funktionen V(a,b) und O(a,b) für das Volumen V und die Oberfläche O des Quaders.

b) Der Rechner liefert die folgenden Ergebnisse:

$$\frac{V(a,3b)}{V(a,b)} = 3\,,\ \ V(a,3b) - V(a,b) = 2a^2 \cdot b$$

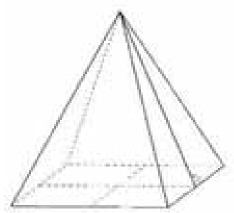
Interpretiere diese beiden Rechnerausgaben.

c) Untersuche mit dem TC und begründe anschließend: Wie verändern sich das Volumen V und die Oberfläche O, wenn

c1) nur a verdoppelt wird,
c2) nur b verdoppelt wird,
c3) a und b verdoppelt werden,
c4) a um 20 % verkürzt und b um 20 % vergrößert werden,
c5) a halbiert und b verdoppelt werden?

Aufgabe 18

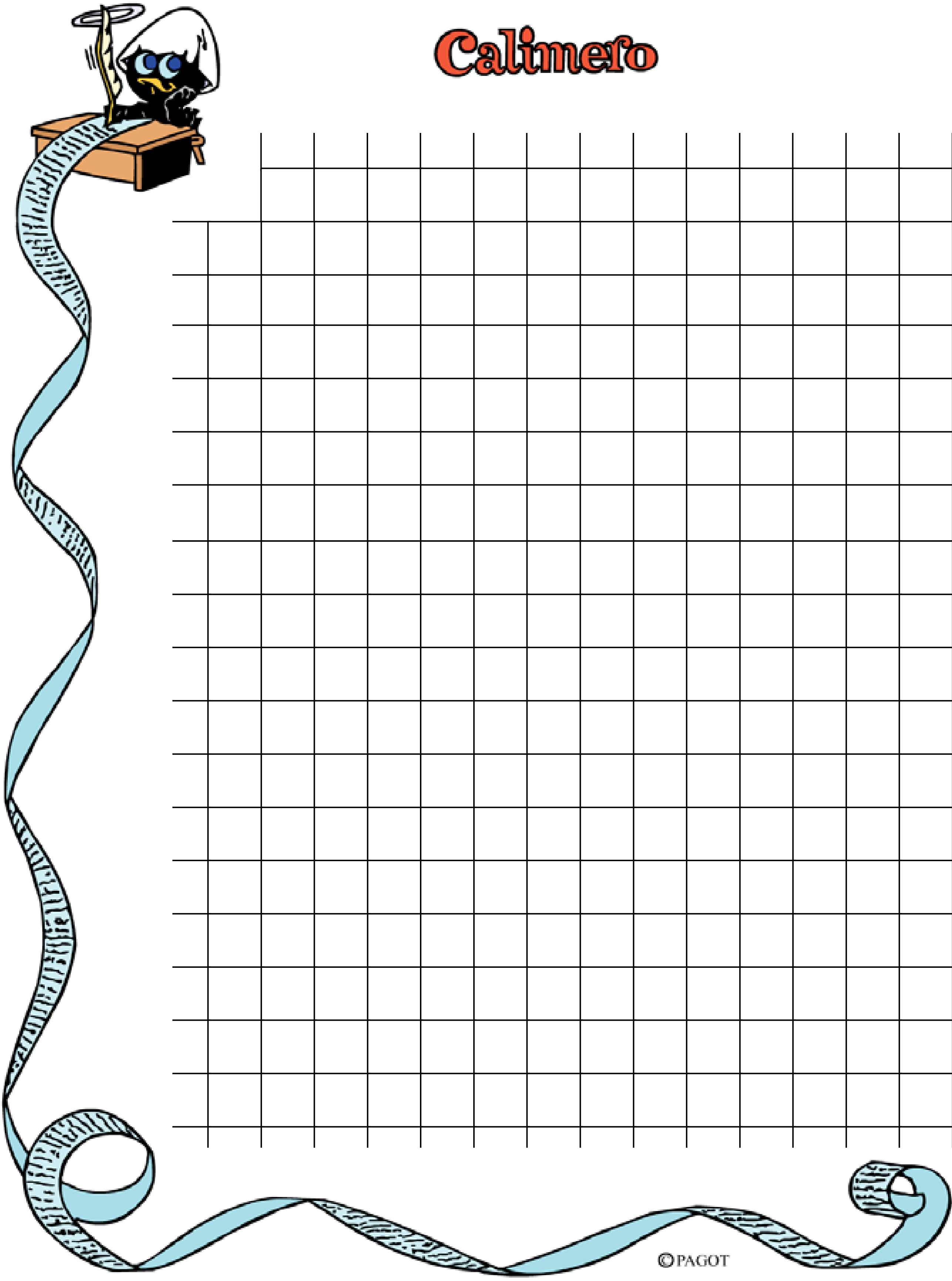
a) Der Louvre in Paris ist ein weltberühmtes Kunstmuseum. Als Haupteingang dient eine moderne 21,6 m hohe Pyramide mit quadratischer Grundfläche, dessen Seite 35,4 m lang ist. Die Außenfläche wird regelmäßig von Fensterputzern gereinigt.
Wie groß ist diese Fläche?



b) Berechne die Höhe einer quadratischen Pyramide, bei der alle Außenkanten die Länge a = 10 cm haben.

Tipp: Benutze die schematische Pyramidenzeichnung rechts als Hilfe. Du kannst dir auch weitere Hilfslinien einzeichnen.

Calimero



Calimero

Calimero

©PAGOT

Teilnehmerinnen und Teilnehmer, die an der Erstellung der Materialien beteiligt sind

Name	Vorname	Dienststelle
Borggreve	Peter	Gymnasium Syke
Breidert	Lutz	Gymnasium Himmelsthür
Dierks	Andreas	Gymnasium Himmelsthür
Glaser	Torsten	Niedersächsisches Kultusministerium
Hagen	Marten	Gymnasium Papenburg
Körner	Henning	Studienseminar für das Lehramt an Gymnasien Oldenburg
Kramer	Olaf	Gymnasium Syke
Kronabel	Edmund	Gymnasium Papenburg
Krüger	Ulf-Hermann	Gymnasium Syke
Lampe	Hans-Ulrich	Studienseminar für das Lehramt an Gymnasien Stadthagen
Pinkernell	Guido	Technische Universität Darmstadt
Röhrkasten	Cornelia	Gymnasium Hankensbüttel
Rolfes	Rainer	Gymnasium Papenburg
Schlichting	Folkert	Studienseminar für das Lehramt an Gymnasien Göttingen
Sperlich	Thomas	Studienseminar für das Lehramt an Gymnasien Hildesheim
Stenten-Langenbach	Hans-Dieter	Gymnasium Marianum Meppen
Stöber	Torsten	Gymnasium Johanneum Lüneburg
Suhr	Friedrich	Gymnasium Johanneum Lüneburg
Toth-Hohmann	Anja	Gymnasium Hankensbüttel
Vehling	Reimund	Studienseminar für das Lehramt an Gymnasien Hannover II
Weißmann	Karin	Gymnasium Hankensbüttel
Wierzyk	Barbara	Gymnasium Johanneum Lüneburg

CAliMERO

Computer-Algebra im Mathematikunterricht: Entdecken, Rechnen, Organisieren

METHODISCHE UND DIDAKTISCHE HANDREICHUNG
BAND 6

Kontakt:

T³ DEUTSCHLAND

www.t3deutschland.de

Kooperationspartner:

Texas Instruments

education.ti.com/deutschland

Weitere Materialien finden Sie unter:
www.ti-unterrichtsmaterialien.net

www.calimero.com

ISBN 978-3-934064-93-5