Modellierung eines parabelförmigen Wasserstrahls - Anwendungsbeispiel in einer 11. Klasse

Dr. Ulrich Döring

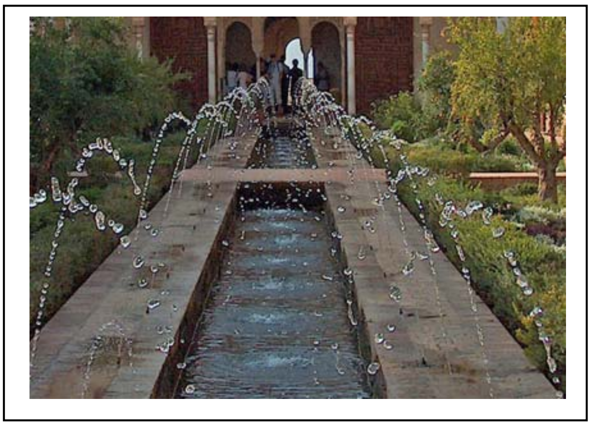

Abb. 1

Vorbemerkung

Viele Gartenarchitekten nutzen die Tatsache, dass Wasserstrahlen, die schräg nach oben aus einer Düseaustreten, unter dem Einfluss der Schwerkraft eine parabelförmige Flugbahn aufweisen. Besonders eindrucksvolle Wasserspiele, die darauf basieren, kann man in den Gärten der Alhambra (Granada, Spanien) beobachten (s. Abb. 1). Auch neuzeitliche Architekten nutzen solche Effekte. So kann man z.B. auf dem Potsdamer Platz in Berlin Wasserspiele sehen.

Die nachfolgend beschriebene Modellierungsaufgabe wurde als anwendungsorientiertes Beispiel gestellt, nachdem die mathematischen Grundlagen zur quadratischen Funktion (insbesondere Erzeugen des Graphen durch Verschieben und Strecken bzw. Stauchen der Normalparabel, Scheitelpunktsform, Ermittlung der Funktionsgleichung einer Parabel, die durch 3 vorgegebene Punkte verläuft) behandelt wurden. Man kann daran sehr schön zeigen, dass mehrere Lösungsansätze zum Ziel führen (insbesondere bezüglich der Positionierung des Funktionsgraphen im Koordinatensystem) und dass diese Lösungen gleichwertig sind. Allerdings ist ein Lösungsansatz unter dem Gesichtspunkt des geringeren Rechenaufwandes zu bevorzugen.

Aufgabenstellung

(nach [1]): Der Wasserstrahl auf dem Potsdamer Platz ist parabelförmig. Bestimme die Gleichung einer quadratischen Funktion, deren Graph mit der Bahn des Wasserstrahls übereinstimmt. Der Strahl hat die maximale Höhe von 2 m und die Wurfweite 4,5 m.

Lösungsskizze

Fordert man die Schülerinnen und Schüler auf, sich die Aufgabenstellung mithilfe einer Skizze zu veranschaulichen, so werden in der Regel mindestens die in Abb. 2 und Abb. 3 dargestellten Lösungsansätze angeboten.

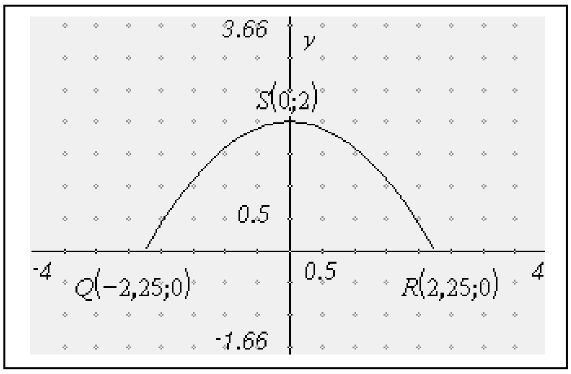

Abb. 2

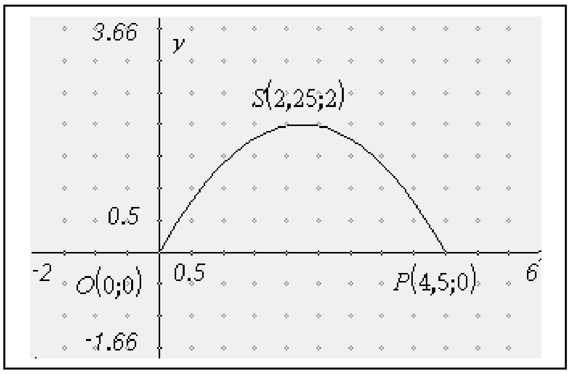

Abb. 3

Für beide Ansätze werden nachfolgend die Funktionsgleichungen ermittelt.

Im ersten Beispiel geht man von der Gleichung

$$f(x) = ax^2 + b$$

aus. Aus der Bedingung f(0) = 2 folgt b = 2. Daher muss man nur noch die Gleichung f(2,25)=0 lösen, vgl. Bildschirmausdruck des TI-Nspire™ CAS in Abbildung 4. In der zweiten Zeile erfolgt die Definition der resultierenden Funktionsgleichung.

$$\text{solve}\left(0=a\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^2+2,a\right) \qquad a=\frac{-32}{81}$$

$$f(x):=\frac{-32}{81}\cdot x^2+2 \qquad \text{Fertig}$$

Abb. 4

Die Einschränkung des Definitionsbereiches kann man bei der Definition auch durch folgende Eingabe berücksichtigen:

$$f(x) = -\frac{32}{81}x^2 + 2 \,|\, -2,25 \le x \le 2,25 \,.$$

Im zweiten Beispiel muss man von der allgemeinen Gleichung für die quadratische Funktion

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

ausgehen. Da der Graph durch den Koordinaten-Ursprung verläuft, folgt c = 0. Es ist also nur noch ein lineares Gleichungssystem für zwei Unbekannte zu lösen (siehe Bildschirmausdruck in Abb. 5):

$$f(2,25) = 2 \;\wedge\; f(4,5) = 0$$

$$\operatorname{solve}\left(\begin{cases} 2=a\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^2+\frac{b\cdot 9}{4} \\ 0=a\cdot\left(\frac{9}{2}\right)^2+\frac{b\cdot 9}{2}\end{cases},\{a,b\}\right) \qquad a=\frac{-32}{81} \text{ and } b=\frac{16}{9}$$

Abb. 5

Es resultiert die Funktionsgleichung, die in der ersten Zeile der Abb. 6 ersichtlich ist.

$$h(x):=\frac{-32}{81}\cdot x^2+\frac{16}{9}\cdot x \qquad \textit{Fertig}$$

$$\frac{-32}{81}\cdot\left(x-\frac{9}{4}\right)^2+2 \qquad \frac{16\cdot x}{9}-\frac{32\cdot x^2}{81}$$

Abb. 6

Die Gleichwertigkeit beider Lösungen kann man zeigen, indem man z. B. den Funktionsgraphen der Funktion f, dessen Scheitelpunkt auf der y-Achse liegt, um 2,25 Einheiten nach rechts verschiebt. Es resultiert natürlich der Funktionsterm der Funktion h, wie es in der zweiten Zeile in Abb. 6 zum Ausdruck kommt.

Bei der Lösung der Gleichungen bzw. des Gleichungssystems mithilfe des Solve- Befehls ist es von Vorteil, dass die Zahlenwerte als Brüche und nicht als Dezimalzahlen eingegeben werden. Letzteres wäre insbesondere bei der Berechnung der Verschiebung didaktisch von Nachteil, weil selbst beim Verwenden von z. B. auf 6 Nachkommastellen gerundeten Werten keine Übereinstimmung bei den Funktionstermen resultieren würde. Man könnte auch in dem Dokument vorher die Einstellung für Berechnungen auf „Exakt" ändern.

Quellen

[1] Elemente der Mathematik, Band 11 Berlin; Schroedel-Verlag 2004, S. 105 (ISBN-Nr. 3-507-83970-9)

Autor

Dr. Ulrich Döring, Berlin
Willi-Graf-Gymnasium
doc.doe@gmx.de