# Top Ten für die Nutzung eines MMS

Herausgeber: Dr. Hubert Langlotz


T³ DEUTSCHLAND

Teachers Teaching with Technology™


Autoren:
Fabien Bischoff, René Cerajewski, Stefanie Kessler, Dr. Hubert Langlotz, Sebastian Rauh, Nils Scheffler, Dirk Schulze,
Dr. Wilfried Zappe

Dieses und weiteres Material steht Ihnen zum pdf-Download bereit: **www.t3deutschland.de** sowie unter **www.ti-unterrichtsmaterialien.net**

Dieses Werk wurde in der Absicht erarbeitet, Lehrerinnen und Lehrern geeignete Materialien für den Unterricht in die Hand zu geben.
Die Anfertigung einer notwendigen Anzahl von Fotokopien für den Einsatz in der Klasse, einer Lehrerfortbildung oder einem Seminar ist daher gestattet. Hierbei ist auf das Copyright von T³-Deutschland hinzuweisen. Jede Verwertung in anderen als den genannten oder den gesetzlich zugelassenen Fällen ist ohne schriftliche Genehmigung von T³ nicht zulässig.

© 2024 T³ Deutschland

# Top Ten für die Nutzung eines MMS

Herausgeber: Dr. Hubert Langlotz

© 2024 T³ Deutschland

Liebe Lehrerinnen und Lehrer,

während in einigen Bundesländern (Sachsen, Thüringen) schon seit Jahrzehnten Modulare Mathematiksysteme (MMS) im Mathematikunterricht genutzt werden, starten andere Bundesländer (Niedersachsen) neu mit dem verbindlichen Einsatz von MMS als Hilfsmittel in Prüfungen. Weitere Bundesländer (NRW) integrieren bestimmte Unterrichtssituationen ab der Mittelstufe, bei denen ein MMS verpflichtend eingesetzt werden muss, in den Kernlehrplan und ermöglichen wahlweise die Nutzung des Hilfsmittels im Abitur.
Aus diesem Anlass haben wir die **Top Ten**, d. h. **zehn zentrale (Teil-) Themen aus dem Mathematikunterricht der Oberstufe**, zusammengestellt, an denen die Lernenden den Umgang mit dem MMS einüben können bzw. in denen das MMS einen verständnisorientierten Zugang zum Lerninhalt ermöglicht. Dabei werden die konsequente Darstellungsvernetzung und Adaptivität als Mehrwert der Systeme im Vergleich zum händischen Rechnen deutlich. Durch die Entlastung des Kalküls wird die Untersuchung von realen Situationen und die Arbeit mit eigenen (großen) Datensätzen möglich. Der singuläre oder kombinierte Einsatz von Tabellenkalkulation, Graphiken und algebraischen Darstellungen kann beim Verstehen der Inhalte helfen und den Fokus auf mathematische Konzepte richten. Andererseits bieten die verschiedenen Lernsituationen auch Anlass, mathematische Zusammenhänge von den Lernenden entdecken zu lassen oder vorstellungsbasiert zu argumentieren. Eine Leitidee ist zudem die Motivation auch von rechenschwächeren SuS zur Auseinandersetzung mit mathematischen Kontexten, da das mathematische Denken und Entwickeln von Lösungsideen vor das hilfsmittelfreie Ausrechnen treten.
Das **Material** umfasst sowohl Aufgaben und tns-Dateien, die direkt im Unterricht eingesetzt werden können, als auch Material, das zur eigenen Einarbeitung bei der Unterrichtsvorbereitung und dem Erstellen eigener Dateien und Arbeitsblätter dient. Es richtet sich **an Einsteiger*innen in die Arbeit mit MMS.** Wir wollen Ihnen mit den zehn Themen eine solide Grundlage im Umgang mit dem MMS (dies betrifft sowohl TI-Nspire™ CAS App für iPad®, die Software als auch die Handheldversion) ermöglichen. Es wurde darauf geachtet, dass nur die Funktionen des MMS verwendet werden, die nach den Richtlinien des IQB für Prüfungen ab 2030 zugelassen sind.
Um ein breites Einsatzspektrum aufzuzeigen, umfassen die Top Ten Unterrichtsinhalte aus den **drei wichtigsten Themenbereichen der Schulmathematik** in der Oberstufe (Analysis, analytische Geometrie und Stochastik). Eine Vollständigkeit aller wesentlichen Themen wurde nicht angestrebt.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Arbeit mit dem MMS bis zum Abitur.

Der Herausgeber und die Autoren

© 2024 T³ Deutschland

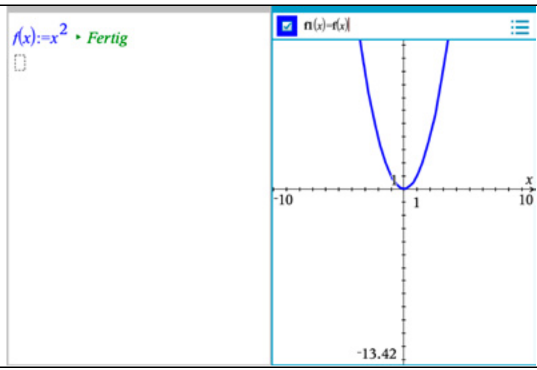
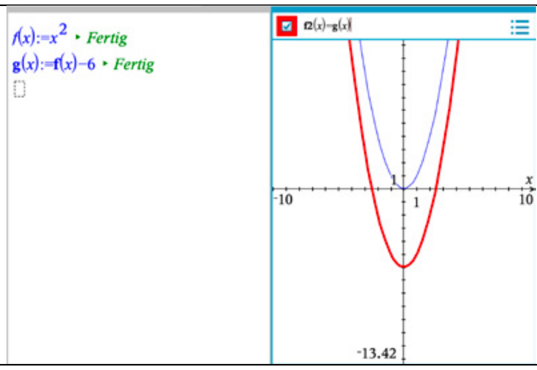
## Top 1: Transformation von Funktionen mit dem MMS

Der allgemeine Gedanke bei der Arbeit mit dem Computeralgebrasystem ist die Abkehr vom Funktionsterm selbst und die Hinwendung zur Arbeit mit den Bezeichnungen der Funktionen. Auf diese Weise ist es möglich, das Nachdenken über die Mathematik in den Vordergrund zu stellen, während das Nachdenken über die Terme und die Algorithmen in den Hintergrund tritt.

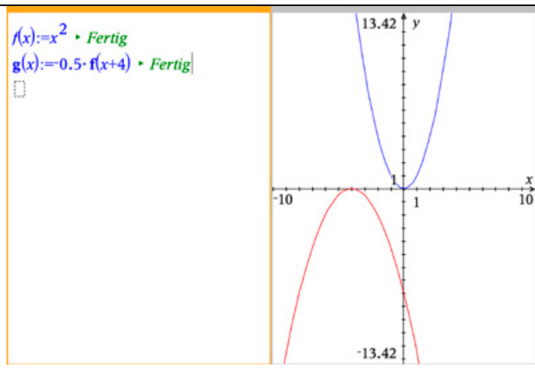
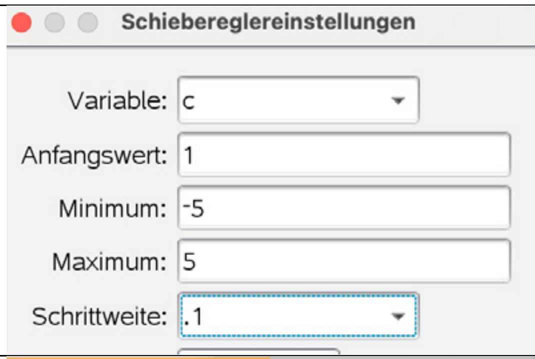
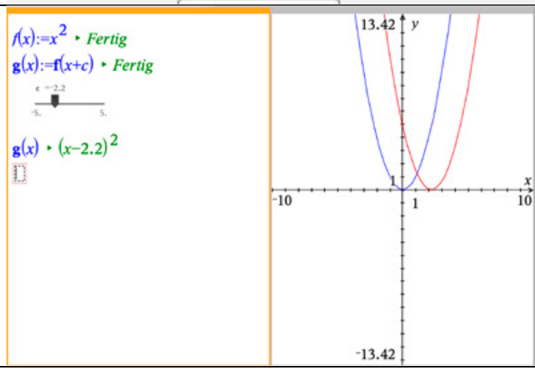
Vorbereitung der iPad®-App (entfällt bei der Software und beim Handheld)

| | |
|---|---|
| Erstellen Sie ein neues Dokument und fügen Sie eine beliebige Seite (z. B. ein *NotesDokument*) hinzu. | |
| Erstellen Sie im Dokument über das + ein Widget (2 Way Vertical Split) | |
| Sie könne nun die erste Seite über den Seitensortierer löschen. | |

Einrichten der Seite

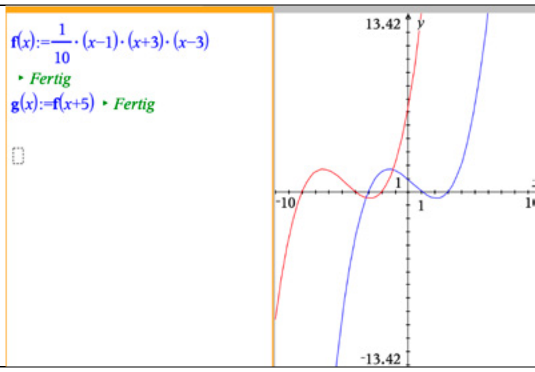
| | |
|---|---|
| Auf der linken Seite erstellen Sie eine Notesseite, auf der rechten eine *Graphsseite.*<br>Links in der *Notesseite* definieren Sie in einer *Mathebox* die Grundfunktion, im einfachsten Fall $f(x) = x^2$<br><br>Rechts lassen Sie sich die Funktion $f(x)$ anzeigen. |  |
| | |
| Auf der linken Seite können Sie nun eine transformierte Funktion definieren, z. B. $g(x) = f(x) - 6$.<br>Auf der rechten Seite lassen Sie sich die neue Funktion anzeigen. |  |
| Damit ist die Grundversion der Datei aufgesetzt. Die Schülerinnen und Schüler können mit dem konstanten Glied der Funktion $g(x)$ experimentieren und einen direkten Zusammenhang des Verlaufs des Graphens und der Funktionsbezeichnung entdecken. | |

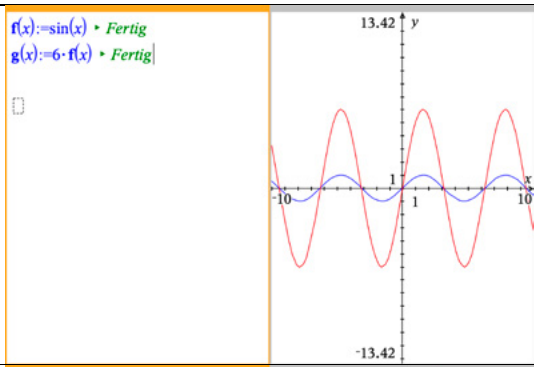
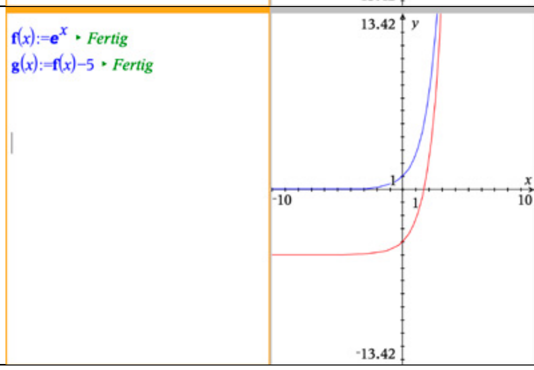

© 2024 T³ Deutschland

<table>
<tr>
<td>Die weiteren Transformationen können Sie direkt an der Definition der Funktion $g(x)$ vornehmen.<br>Als Möglichkeit sei hier eine Stauchung in negative y-Richtung und eine Verschiebung x-Richtung gezeigt.<br>Der Vorteil in dieser Methode ist, dass die Schülerinnen und Schüler bewusst die Funktionsgleichungen manipulieren müssen und direkt eine Rückmeldung über den Verlauf des Graphen bekommen.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Binnendifferenzierung: Mehr Dynamik können Sie erhalten, indem die Transformation über Schieberegler durchgeführt wird. Hier bietet es sich an, nur eine Transformation zeitgleich zu untersuchen.<br>Fügen Sie dazu einen Schieberegler ein, benennen Sie die Variable in „c“ um und stellen Sie die Schrittweite auf 0,1.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Durch die Bewegung des Schiebereglers erfahren die Schülerinnen und Schüler direkt die Bedeutung des Transformationsparameters. Unter Umständen können Sie sich den Term anzeigen lassen.<br>Für den weiteren Verlauf empfiehlt es sich aber, den Term auszublenden bzw. zu löschen.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Der Vorteil des Aufbaus auf diese Art und Weise ergibt sich darin, dass sich die Ursprungsfunktion $f(x)$ beliebig umdefinieren lässt. Die Dynamik der *Notesseite* führt dazu, dass auch bei geänderter Ursprungsfunktion die Transformation durchgeführt wird.

Als Beispiele seien hier die Funktionen $f(x) = \frac{1}{10} \cdot (x-1)(x+3)((x-3)$, $f(x) = sin(x)$ und $f(x) = e^x$ genannt.

<table>
<tr>
<td>$f(x) = \frac{1}{10}(x-1)(x-3)(x+3)$</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

| | |
|---|---|
| $f(x) = sin(x)$ |  |
| $f(x) = e^{x}$ |  |

Weitere Ideen: Umkehraufgabe (eine Ursprungsfunktion wird gegeben und der Graph einer Zielfunktion vorgegeben, Frage nach den zugrunde liegenden Transformationen)


© 2024 T³ Deutschland

## Top 2: Zylindrische Konservendosen mit möglichst wenig Material herstellen

**Problemstellung:**
Für die Verpackungsindustrie ist unter vielen anderen zu berücksichtigenden Aspekten eine interessante Frage, ob und wie man zylindrische Konservendosen bei einem vorgegebenen Volumen mit kleinster Oberfläche herstellen kann, um die Materialkosten möglichst gering zu halten.
Wir wollen für die nähere Betrachtung dieses Problems ein mathematisches Modell wählen, das einem geraden Hohlzylinder mit kreisförmigen Grund- und Deckflächen entspricht. Materialdicken bleiben unberücksichtigt.

**Vorbetrachtungen:**

a) Begründen Sie die verwendeten Formeln und berechnen Sie mit den angegebenen Radien und Höhen (Tabelle) die fehlenden Volumina sowie die Gesamtoberflächen der im Foto abgebildeten zylindrischen Dosen.

| r in cm | h in cm | V in cm² | $A_o$ in cm² |
|---|---|---|---|
| 4,0 | 4,9 | $V = \pi r^2 \cdot h \approx 246{,}3$ | $A_o = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r \cdot h \approx 223{,}7$ |
| 3,3 | 7,2 | 246,3 | $A_o \approx 217{,}7$ |
| 2,5 | 12,5 | 245,4 | $A_o \approx 235{,}6$ |

b) Führen Sie ein Gedankenexperiment zur Teilaufgabe a) durch:
Beschreiben Sie, was mit der Gesamtoberfläche <u>bei konstantem Volumen</u> vermutlich passiert, wenn der Radius noch größer als 4,0 cm bzw. noch kleiner als 2,5 cm wird.
Erläutern Sie, weshalb es naheliegend ist, mindestens einen Wert für den Radius „irgendwo zwischen sehr kleinen und sehr großen Werten“ zu vermuten, für den die Gesamtoberfläche minimal ist.

**Die Suche nach der minimalen Oberfläche mit grafischen Hilfsmitteln.**
Wegen $V = \pi r^2 \cdot h$ folgt $h = \frac{V}{\pi r^2}$. Um nahe bei den Werten aus der Vorüberlegung zu bleiben, wird zunächst $V = 245\ cm^3$ eingesetzt, um für dieses Volumen die Abmessungen für die minimale Oberfläche herauszufinden Das führt zu $h = \frac{245}{\pi r^2}$.

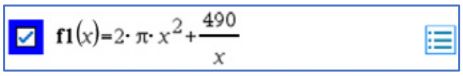
Arbeitsauftrag 1:

a) Leiten Sie damit die Funktionsgleichung $A_o(r) = 2\pi r^2 + \frac{490}{r}$ her.

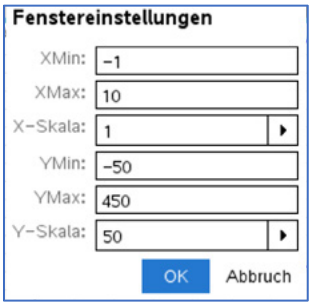
b) Stellen Sie diese Funktion mit dem Grafikwerkzeug des MMS grafisch dar und ermitteln Sie das Minimum von $A_o(r)$ mit dem Werkzeug *Graph analysieren*.

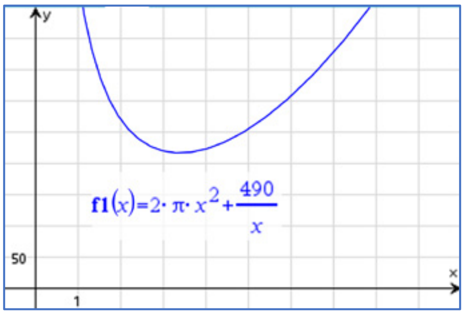
© 2024 T³ Deutschland

Lösung zu 1a:
Der Term $h = \frac{245}{\pi r^2}$ eingesetzt in $A_o(r,h) = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r \cdot h$ ergibt
$A_o(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{490}{r}$.
Lösung zu 1b:
Die Funktion $A_o(r)$ wird als Funktion f(x) mit der Variablen x anstelle von r in der Anwendung *Graphs* des TI-Nspire CX CAS eingegeben.

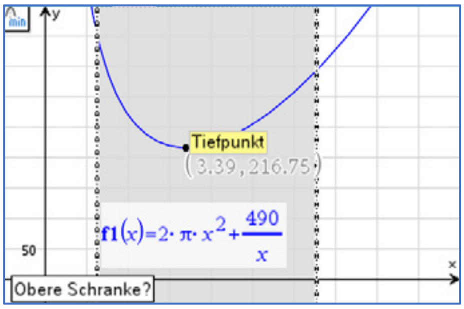



Mit Blick auf die in den Vorbetrachtungen erhaltenen Ergebnisse werden unter *<Menü><Fenster/ Fenstereinstellungen>*die Fenstereinstellungen vorgenommen.




Mit der Anweisung *<Menü><Graph analysieren><Minimum>* legt man die Grenzen fest, in denen das Minimum anschaulich liegt und erhält den x-Wert (für den Radius) sowie den y-Wert (für die minimale Oberfläche) angezeigt. Das Ergebnis ist hier im Screenshot und in der Tabelle zu sehen.




Arbeitsauftrag 2:

Ermitteln Sie für weitere Werte des Zylindervolumens die fehlenden Werte auf diesem grafischen Wege und vergleichen Sie Werte des Durchmessers und der Höhe.

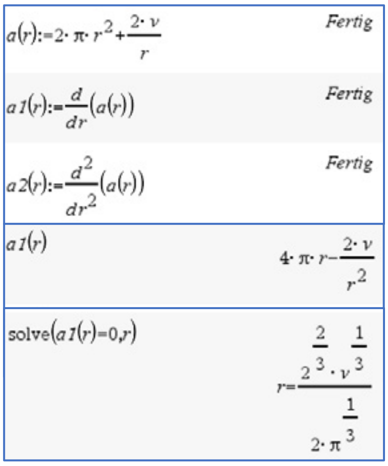
| Volumen | Radius | Durchmesser d | Höhe h | Vergleich von d und h | Minimale Oberfläche |
|---|---|---|---|---|---|
| 245 cm³ | 3,39 cm | 6,78 cm | 6,79 $cm$ | $d \approx h$ | 216,75 cm² |
| 850 cm³ | 5,14 cm | 10,28 cm | 10,26 cm | $d \approx h$ | 496,74 cm² |
| 500 cm³ | 4,30 cm | 8,60 cm | 8,61 cm | $d \approx h$ | 348,73 cm² |

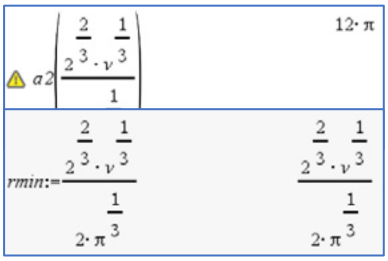

© 2024 T³ Deutschland

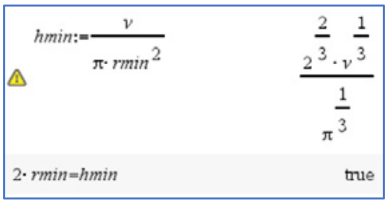
**Die Suche nach der minimalen Oberfläche mit rechnerischen Mitteln.**

Die Beispiele auf der vorigen Seite legen die Vermutung nahe, dass die Oberfläche eines Zylinders minimal ist, wenn Durchmesser und Höhe die gleiche Länge haben.

Arbeitsauftrag 3:
Überprüfen Sie diese Vermutung mit dem Ableitungskalkül der Zielfunktion. Das kann in diesem Fall hilfsmittelfrei, aber auch mit CAS/MMS-Unterstützung erfolgen.
Hauptbedingung: $A_o(r,h) = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r \cdot h$
Nebenbedingung: Wegen $V(r,h) = V_o = \pi r^2 \cdot h$ folgt $h = \frac{V_o}{\pi r^2}$.
Dabei steht $V_o$ für das gegebene Volumen des Zylinders.
Die Nebenbedingung in die Hauptbedingung eingesetzt, ergibt
$A_o(r) = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{V_o}{\pi r^2} = 2 \cdot \pi r^2 + \frac{2V_o}{r}$
$A_o(r) = 2 \cdot \pi r^2 + 2V_0 \cdot r^{-1}$
Ableitungen:
$A_o'(r) = 4\pi \cdot r - 2V_0 \cdot r^{-2}$
$A_o''(r) = 4\pi + 4V_0 \cdot r^{-3}$
Notwendige Bedingung:
$A_o'(r) = 4\pi \cdot r - 2V_0 \cdot r^{-2} = 0$ führt auf $2\pi \cdot r = V_0 \cdot r^{-2}$ und das auf $r = \sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}$.
Hinreichende Bedingung:
$A_o''\left(\sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}\right) = 4\pi + 4V_0 \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}\right)^{-3} = 4\pi + 4V_o \cdot \left(\left(\frac{V_0}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{-3}$
$= 4\pi + 8\pi = 12\pi > 0$
Also liegt bei $r = \sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}$ ein lokales Minimum vor.
Dies eingesetzt in $h = \frac{V_o}{\pi r^2}$ ergibt $h = \frac{V_o}{\pi\left(\frac{V_o}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}}}$.
Etwas anders geschrieben ist
$h = \left(\frac{V_o}{\pi}\right)^1 \cdot \left(\frac{V_o}{2\pi}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{V_o}{\pi}\right)^1 \cdot \left(\frac{V_o}{\pi}\right)^{-\frac{2}{3}}$
$= \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{V_o}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = 2 \cdot \left(\frac{V_o}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = 2 \cdot r.$



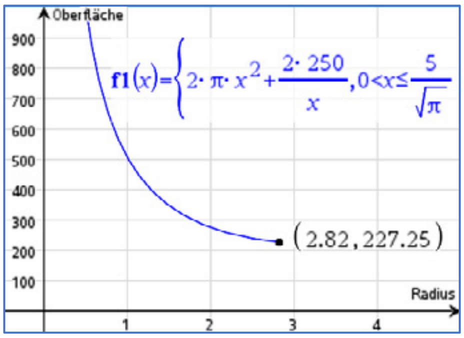




Damit ist nachgewiesen:
Die Oberfläche eines Zylinders zu einem gegebenen Zylindervolumen ist minimal, wenn Durchmesser und Höhe übereinstimmen und keine Einschränkungen für Höhe und Durchmesser vorliegen.

**Erweiterungsaufgaben**

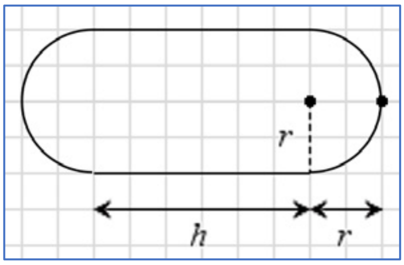
1. Eine Konservendose soll mindestens 10 cm hoch sein und ein Volumen von 250 cm³ besitzen. Karla geht der Frage nach, bei welchem Radius der Zylinder unter diesen Bedingungen einen minimalen Oberflächeninhalt hat.
   Die beiden nebenstehenden Screenshots dokumentieren ihre Überlegungen.
   Kommentieren und beurteilen Sie Karlas Lösungsideen.

$$\text{solve}\left(\frac{250}{\pi\cdot r^2}\geq 10, r\right)\Big|r>0 \qquad 0<r\leq\frac{5}{\sqrt{\pi}}$$




2. Eine zylinderförmige Grube ohne Deckel soll das gleiche Fassungsvermögen haben wie ein Zylinder mit einem Radius von 5 m und einer Höhe von 20 m.
   Ermitteln Sie, wie die Abmessungen der Grube gewählt werden müssen, damit die Mantel- und Grundfläche zusammen ein Flächenminimum ergeben.

3. Medikamente werden mitunter in der Form von zylindrischen Kapseln mit aufgesetzten Halbkugeln verabreicht.[1]
   Als mathematisches Modell können Sie einen geraden Kreiszylinder mit der Höhe h und dem Grundkreisradius r, aber ohne Deck- und Grundfläche dafür mit aufgesetzten Halbkugeln verwenden, die ebenfalls den Radius r haben (siehe Längsschnitt).

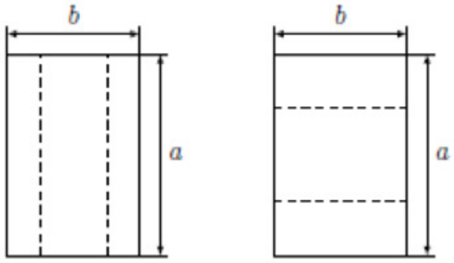



Berechnen Sie mit dem CAS/MMS die Zylinderhöhe h und den Radius r bei einem gegebenen Volumen $V_o$, wenn die Gesamtoberfläche minimal werden soll.

 © 2024 T³ Deutschland

4. Lösen Sie die folgende alte Abituraufgabe[2] zunächst so, wie es früher auch die Abiturienten machen mussten, also ohne CAS/MMS. Nutzen Sie anschließend das CAS/MMS zur Selbstkontrolle.

**Aufgabe 3**
Aus rechteckigen Blechen von der Länge a und der Breite b ($a > b$) sollen der Boden und zwei gegenüberliegende Seitenflächen von quaderförmigen Behältern für Kleinmaterial gebogen werden.




Die beiden Skizzen (nicht maßstäblich) zur Aufgabe 3 zeigen zwei verschiedenen Möglichkeiten für die Lage der Biegekanten.

a) Bestimmen Sie für beide Möglichkeiten das jeweilige Maximalvolumen!

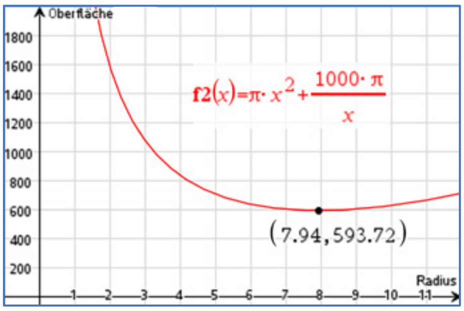
b) Welcher von diesen beiden Behältern hat das größere Fassungsvermögen?
Begründen Sie Ihre Antwort!

[2] DDR-Abitur 1965 A, Nr. 3

**Lösung Erweiterungsaufgabe 1:**

Zunächst wird untersucht, welche Auswirkungen auf den Radius die Festlegungen von V = 250 cm³ und $h \geq 10\ cm$ haben. Der Radius muss dann im Intervall $0 < r \leq \frac{5}{\sqrt{\pi}}$ liegen.
Die Zielfunktion ist damit $A_o(r) = 2 \cdot \pi r^2 + \frac{2 \cdot 250}{r}$ mit der Einschränkung $0 < r \leq \frac{5}{\sqrt{\pi}}$.
Der Graph dieser Funktion besitzt kein lokales Minimum, aber ein Randminimum für $r = \frac{5}{\sqrt{\pi}} \approx 2{,}82\ cm$. Die minimale Oberfläche beträgt dann ca. 227,25 cm².
Karla hat die grafische Näherungslösung richtig realisiert.

**Lösung Erweiterungsaufgabe 2:**
Volumen: $V(r,h) = V_o = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 5^2 \cdot 20 = 500\pi$. Daraus folgt $h = \frac{500\pi}{\pi r^2} = \frac{500}{r^2}$.
Flächeninhalt: $A_o(r) = \pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{500}{r^2} = \pi r^2 + \frac{1000\pi}{r} = \pi r^2 + 1000\pi \cdot r^{-1}$ .

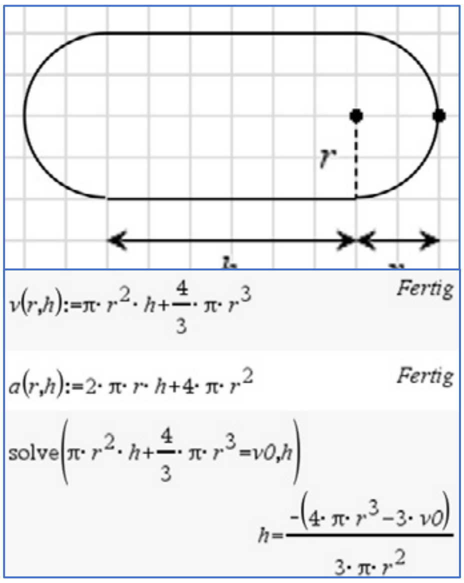


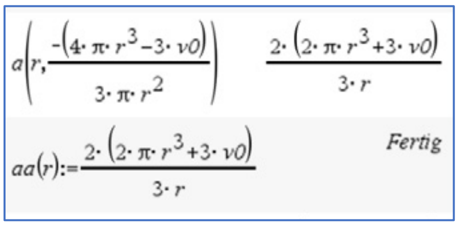

Mit $h = \frac{500\pi}{\pi r^2} = \frac{500}{r^2}$ und r = 7,94 m folgt $h = \frac{500}{(7{,}94m)^2} \approx 7{,}93\ m$ .
In diesem Falle sind Radius und Höhe annähernd gleich groß.

**Lösung Erweiterungsaufgabe 3:**
Das Gesamtvolumen setzt sich zusammen aus dem Volumen des Hohlzylinders und den Volumina zweier Halbkugeln mit gleichem Radius, die zusammen das Volumen einer ganzen Kugel mit dem Radius r ergeben.
Gesamtvolumen $V_o = \pi r^2 \cdot h + \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$

Die Gesamtoberfläche setzt sich zusammen aus der Mantelfläche des Hohlzylinders und den Oberflächen zweier Halbkugeln mit gleichem Radius, die zusammen die Oberfläche einer ganzen Kugel mit dem Radius r ergeben.
Gesamtoberfläche $A_o(r,h) = 2\pi r \cdot h + 4\pi r^2$
Der Term für das Gesamtvolumen $V_0$ wird nach h umgestellt.
$h = \frac{V_o - \frac{4}{3}\pi \cdot r^3}{\pi \cdot r^2}$

Der Term für h wird in die Gleichung der Oberfläche eingesetzt.
Die Gleichung a(r) für die Oberfläche hängt dann nur noch vom Radius r ab und enthält das Volumen V als Parameter.
$a(r) = \frac{2V_o}{r} + \frac{4}{3}\pi \cdot r^2$



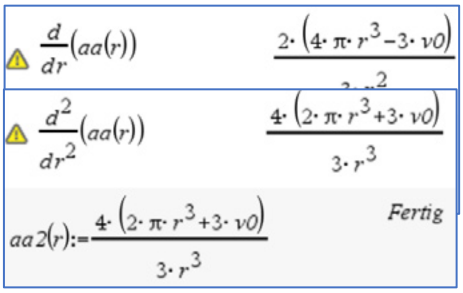




 © 2024 T³ Deutschland

Die 1. und die 2. Ableitung von a(r) werden gebildet.

$a'(r) = -\frac{2V_o}{r^2} + \frac{8}{3}\pi \cdot r$

$a''(r) = \frac{4V_o}{r^3} + \frac{8}{3}\pi$



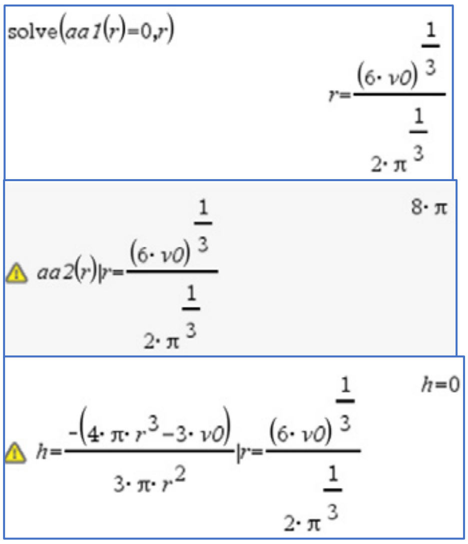

Die Nullstelle der 1. Ableitung wird berechnet.

$r_e = \sqrt[3]{\frac{6V_o}{8\pi}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{6V_o}{\pi}}$

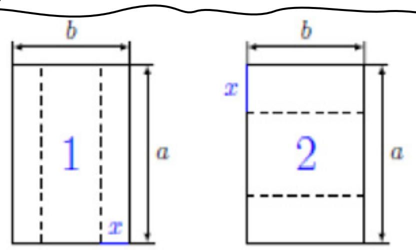
Der Wert der 2. Ableitung an dieser Nullstelle ist $8\pi > 0$, also liegt ein lokales Minimum vor.

Mit der Nullstelle der 1. Ableitung wird die Höhe des Zylinders ermittelt.

$h = \frac{V_o - \frac{4}{3}\pi\cdot\frac{3V_o}{4\pi}}{\pi\cdot\sqrt[3]{\frac{3V_o}{4\pi}}^{2}} = \frac{0}{\pi\cdot\sqrt[3]{\frac{3V_o}{4\pi}}^{2}} = 0$, d. h. die Oberfläche des Körpers ist minimal, wenn er nur aus der Kugel besteht.



**Lösung Erweiterungsaufgabe 4:**




a) Fall 1 (links): Zielfunktion $V = ax(b-2x) = abx - 2ax^2$.
1.Ableitung $V' = ab - 4ax$ mit der Nullstelle $x = \frac{b}{4}$, da 2.Ableitung $V'' = -4a < 0$ liegt lokales Maximum vor; maximales Volumen im Fall 1: $V_{max1} = \frac{1}{8}ab^2$
Fall 2 (rechts): Zielfunktion $V = bx(a-2x) = abx - 2bx^2$.
1.Ableitung $V' = ab - 4bx$ mit der Nullstelle $x = \frac{a}{4}$, da 2.Ableitung $V'' = -4b < 0$ liegt lokales Maximum vor; maximales Volumen im Fall 2: $V_{max2} = \frac{1}{8}a^2b$

b) das größere Fassungsvermögen liegt im 2.Fall vor, da nach Voraussetzung $a > b$ und somit

$$V_{max2} = \frac{1}{8}a^2b > V_{max1} = \frac{1}{8}ab^2$$

Selbstkontrolle mit CAS/MMS:

| | |
|---|---|
| $v1(x):=a\cdot b\cdot x-2\cdot a\cdot x^2$ | *Fertig* |
| $\frac{d}{dx}(v1(x))$ | $a\cdot b-4\cdot a\cdot x$ |
| solve$(a\cdot b-4\cdot a\cdot x=0,x)$ | $x=\frac{b}{4}$ or $a=0$ |
| $\frac{d^2}{dx^2}(v1(x))$ | $-4\cdot a$ |

| | |
|---|---|
| $v2(x):=a\cdot b\cdot x-2\cdot b\cdot x^2$ | *Fertig* |
| $\frac{d}{dx}(v2(x))$ | $a\cdot b-4\cdot b\cdot x$ |
| solve$(a\cdot b-4\cdot b\cdot x=0,x)$ | $x=\frac{a}{4}$ or $b=0$ |
| $\frac{d^2}{dx^2}(v2(x))$ | $-4\cdot b$ |

| | |
|---|---|
| $v1\left(\frac{b}{4}\right)$ | $\frac{a\cdot b^2}{8}$ |
| $v2\left(\frac{a}{4}\right)$ | $\frac{a^2\cdot b}{8}$ |

Für das Aufstellen der Zielfunktionen, die Beurteilungen zur Art der Extrema bei v1(x) und v2(x), sowie dazu, welches der Maximalvolumen das größere ist, bietet das CAS kaum eine Hilfestellung an. Hierzu braucht es nach wie vor inhaltliches Verständnis.

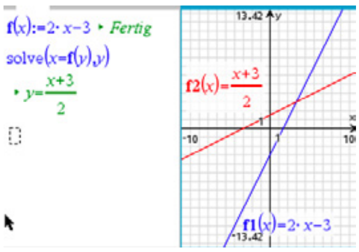
 © 2024 T³ Deutschland

## Top 3: Umkehrfunktionen

Vertauscht man Definitions- und Wertebereich einer gegebenen Funktion $f$, so beschreibt die zugehörige Funktionsgleichung die Umkehrfunktion $f^{-1}$.
Eine Umkehrfunktion $f^{-1}$ existiert dann, wenn die Funktion $f$ eine eineindeutige Abbildung beschreibt, d. h. wenn f streng monoton ist. Ist dies nicht der Fall, so kann f nur auf bestimmten Intervallen umgekehrt werden.
Geometrisch entspricht dieses Vertauschen von „x“ und „y“ der Spiegelung des Funktionsgraphen von f an der Geraden mit der Gleichung y = x.

Aufgabe 1:
Für die Funktion f(x) = $x^2 + 1$ soll, ggf. auch für Teilintervalle eine Umkehrfunktion grafisch und rechnerisch bestimmt werden.

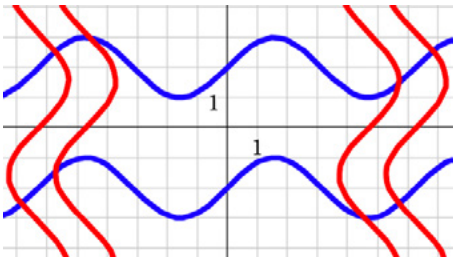
a) Nutzen Sie die Tabellenkalkulation, um das Vertauschen von x und y grafisch darzustellen.
b) Schränken Sie den Definitionsbereich von f so ein, dass Umkehrfunktionen gezeichnet werden können.
c) Erläutern Sie den dargestellten Screenshot und übertragen Sie diesen dann auf die Funktion f.
d) Eine weitere Möglichkeit, Umkehrfunktionen zu entdecken, bietet sich im Graphikfenster durch Verwendung der Ansicht „Relation“ an. Verwenden Sie diese Ansicht, um die Umkehrfunktion(en) von f zu ermitteln.



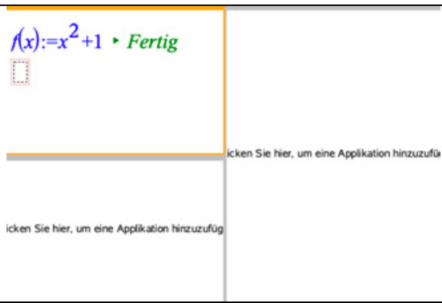
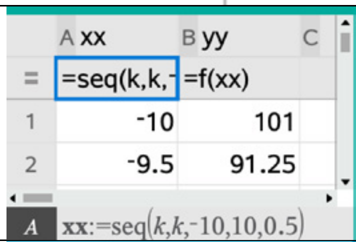
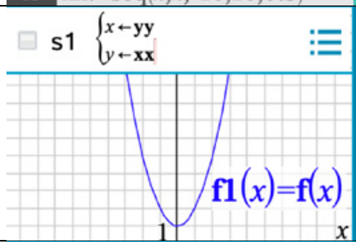
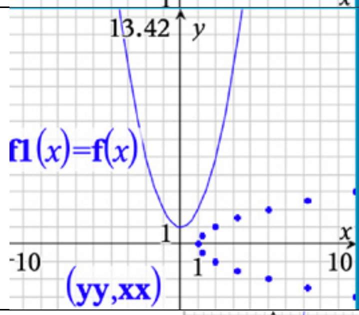
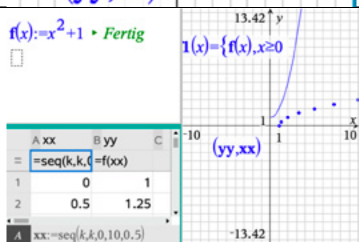
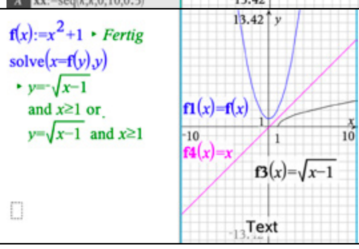

Aufgabe 2
Gegeben ist die Funktion f(x) = $x^3 + 1$.

a) Bestimmen Sie mit dem MMS die Gleichung der Umkehrfunktion $f^{-1}$ zur Funktion f.
b) Stellen Sie beide Funktionen grafisch dar
c) Verketten Sie beide Funktionen auf zwei Arten $f \circ f^{-1}$ bzw. $f^{-1} \circ f$. Interpretieren Sie das Ergebnis und untersuchen Sie, wann dieses Ergebnis auch bei anderen Funktionen zutrifft.

Aufgabe 3:
Erzeugen Sie das dargestellte Bild und entwerfen Sie ähnliche Bilder.

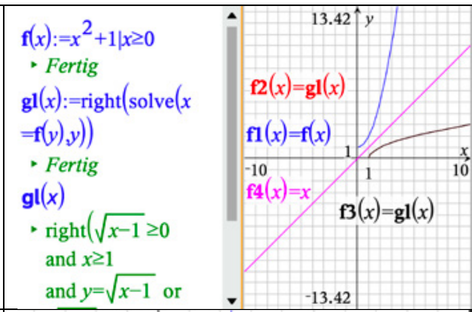


Lösungen
Aufgabe 1

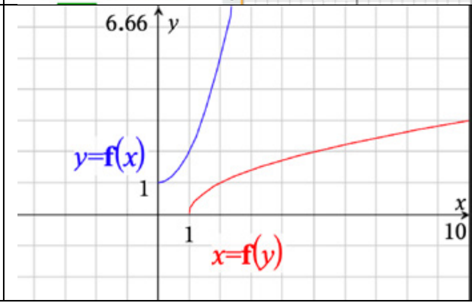
| | |
|---|---|
| a)<br>Um später einfach Änderungen am Funktionsterm vornehmen zu können, wird die Funktion f in der Applikation *Notes* definiert. Gleichzeitig wird der Bildschirm in drei Teile geteilt, damit sowohl der Funktionsterm, die Tabellen als auch der Graph sichtbar sind. |   |
| Um die mögliche Umkehrfunktion zeichnen zu können, müssen in der Tabelle zum einen mittels der Laufanweisung *seq*() eine Reihe x-Werte bestimmt werden und zum anderen die zugehörigen y-Werte berechnet werden. |   |
| Anschließend wählt man im Graphikfenster die Darstellung Streudiagramm aus. |   |
| Die Darstellung zeigt, dass die Punkte zwar eine Relation, aber keine Funktion beschreiben. Der Definitionsbereich muss eingeschränkt werden. |   |
| b)<br>Hinweis:<br>Der Definitionsbereich von f darf nicht im *Notesfenster* eingeschränkt werden, sondern im Graphikfenster. Ebenso muss im *seq*()-Befehl die Einschränkung erfolgen. |   |
| d)<br>Im Screenshot wird das rechnerische Vorgehen zur Ermittlung einer Umkehrfunktion dargestellt. Dies kann auf die gegebene Funktion angewendet werden. Gleichzeitig wurde noch die Gerade y = x eingezeichnet. |   |
| | |


© 2024 T³ Deutschland

Hinweis: Unter Verwendung des Befehls right() kann man diese Darstellung automatisieren. Die Umkehrfunktion wird nur gezeichnet, wenn man ein Intervall eingibt, in welchem die Funktion f streng monoton ist.

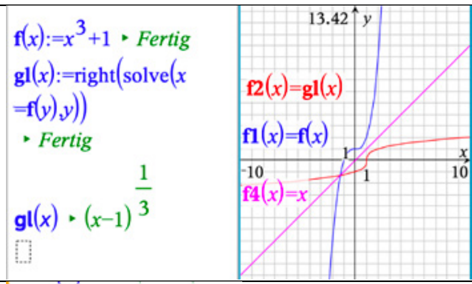



d)
In der Graphikeinstellung *„Relation"* können viele Relationen dargestellt werden.

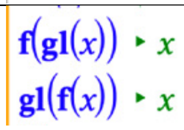



Aufgabe 2

a) und b)
Die Umkehrfunktion zur Funktion
f(x) = $x^3 + 1$ ist $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$.
Hinweis: Definitionsbereich für $f^{-1}$ ist $D = \{x | x \geq 1\}$.

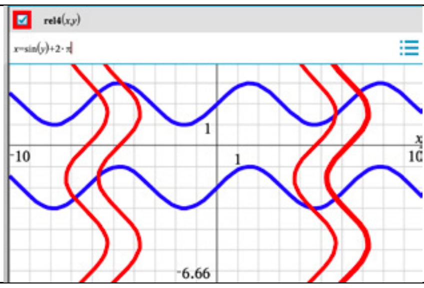



c)
Bei der Verkettung dieser beiden Funktionen entsteht die Funktion h(x) = x.
Dieser Zusammenhang gilt allerdings nur dann, wenn beide Funktionen den gleichen Definitionsbereich haben. Hier zeigt das MMS keinen Fehler an, da im amerikanischen Raum Wurzeln mit ungeraden ganzzahligen Wurzelexponenten auch für negative Radikanden definiert ist



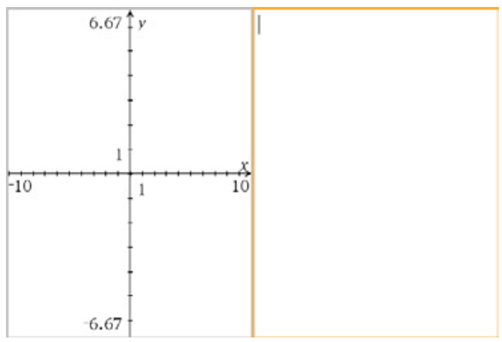
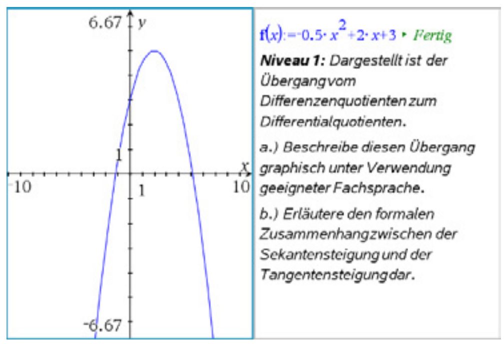
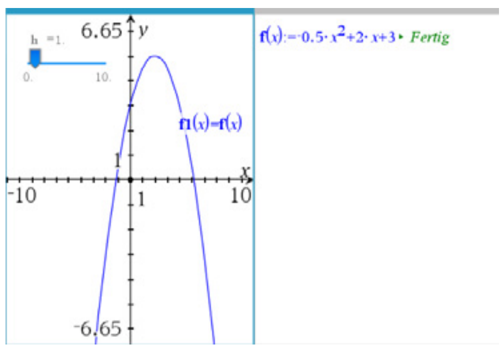

Aufgabe 3

Das Bild lässt sich aus verschiedenen Sinusfunktionen und entsprechenden Umkehrfunktionen von Sinusfunktionen erzeugen.

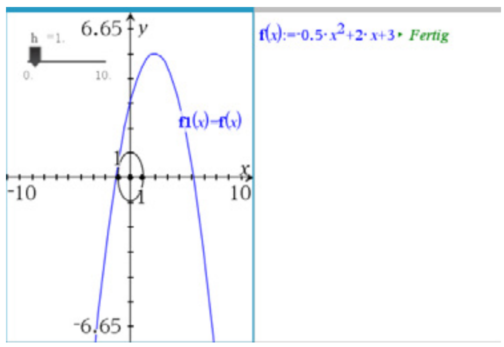
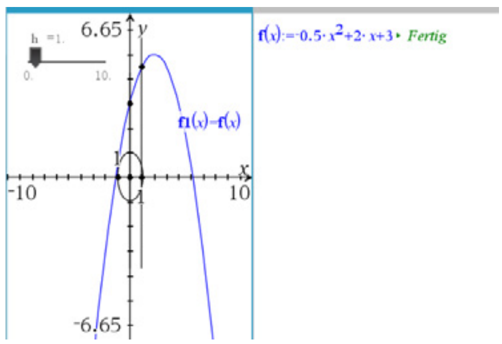
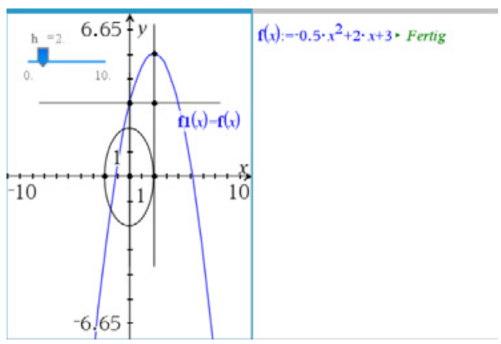
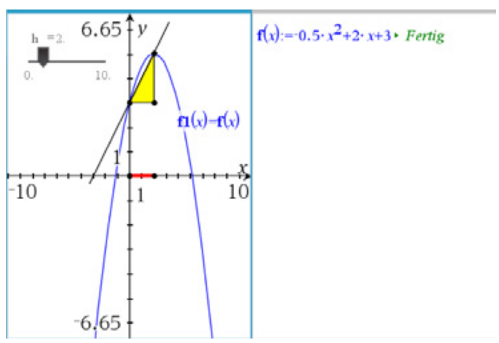


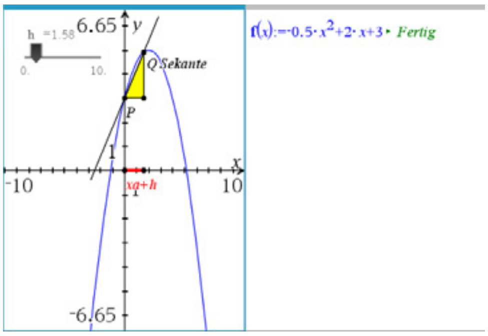
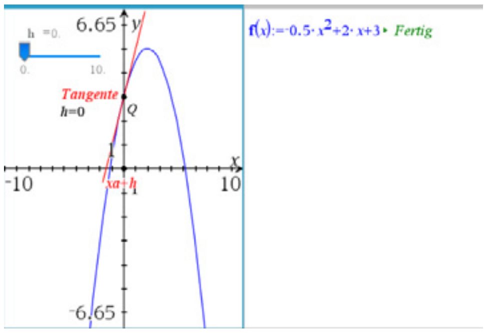
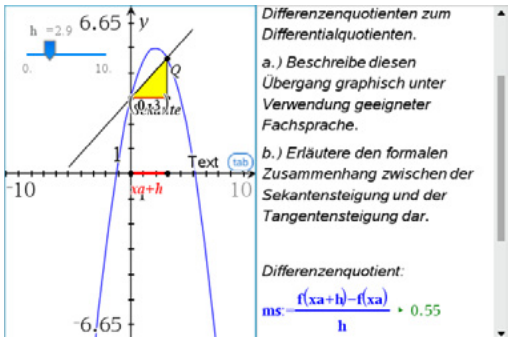
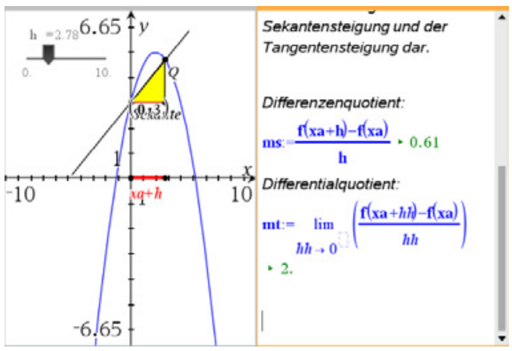
## Top 4 Vom Differenzen- zum Differentialquotienten

Aufgabe 1:
Dargestellt ist der Übergang vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten.
a) Beschreibe diesen Übergang graphisch unter Verwendung geeigneter Fachsprache.
b) Erläutere den formalen Zusammenhang zwischen der Sekantensteigung und der Tangentensteigung dar und experimentieren Sie mit verschiedenen Funktionen.
Ziel der Aufgabe ist es, den Differentialquotienten möglichst praxisorientiert zu erarbeiten. Die Schüler sollen den Begriff eigenständig erkunden.
Weiterhin kann die Aufgabe auch für Lehrerfortbildungen genutzt werden, um die Funktionsweise des CAS/MMS auf fortgeschrittenem Niveau weiterzuentwickeln.
Hinweis: Lehrkräfte, die diese Aufgabe in der Schule einsetzen wollen, sollten den Schülern die Datei mit der Aufgabe zur Verfügung stellen. Im Anschluss kann selbst entschieden werden, was den Schülern vorgegeben wird.

<table>
<tr>
<td>Zu Beginn der Aufgabe ist es notwendig, eine neue Datei anzulegen. Das Dokument sollte dann ein zweigeteiltes Layout haben, indem auf der einen Seite Notes und auf der anderen Seite Graphs geöffnet wird.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Im Anschluss wird die Funktion im Notes-Fenster definiert und im Graphs-Menü dargestellt.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Im Anschluss wird ein Punkt auf der x-Achse über das Menü → Geometrie eingefügt.<br>Ein Schieberegler wird angelegt und mit h bezeichnet. Als Schrittweite wird 0.01 und ein Mindestwert von 0 festgelegt.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>


© 2024 T³ Deutschland

| | |
|---|---|
| Über das Menü → Geometrie → Konstruktion → Zirkel wird nun ein Kreis erzeugt, der den Radius h (vom Schieberegler) besitzt. Die Schnittpunkte des Kreises mit der x-Achse werden bestimmt. |   |
| Um nun die fortlaufenden Punkte auf dem Graphen der Funktion zu erzeugen, werden Senkrechte durch den Mittelpunkt des Kreises und einen der Schnittpunkte gelegt (Menü → Geometrie → Konstruktion). Zwischen den Senkrechten und dem Graphen werden dann die Schnittpunkte ermittelt. Wenn der Schieberegler nun verschoben wird, bewegen sich sowohl die Schnittpunkte des Kreises als auch die Punkte auf dem Graphen. |   |
| Um das Anstiegsdreieck erzeugen zu können, muss noch eine Senkrechte durch den Schnittpunkt des Graphen und der Senkrechten des Kreises gelegt werden (s. rechts). Diese schneidet dann die zweite Senkrechte. Der Schnittpunkt ist dann der dritte Punkt des Anstiegsdreiecks und … |   |
| … das Dreieck kann über das Menü → Geometrie eingezeichnet werden. Alle „überflüssigen“ und störenden Elemente werden nun über Menü → Aktionen → Anzeigen/ausblenden ausgeblendet. Dazu gehören der Kreis, die Geraden und der Schnittpunkt des Kreises mit der x-Achse. Durch die beiden Punkte des Graphen wird nun die Sekante gelegt. |   |

| | |
|---|---|
| Die Strecke, die auf der x-Achse zwischen Mittelpunkt des Kreises und Schnittpunkt verläuft, wird rot gefärbt und mit „xa+h“ bezeichnet.<br>Die Sekante wird mit einem Textbaustein als Sekante bezeichnet. |  |
| Abschließend wird noch der Textbaustein „Tangente“ und „h=0“ programmiert. Dafür werden die Texte „Tangente“ und „h=0“ untereinander eingefügt. Mit einem Rechtsklick auf den Text und Klick auf „Bedingungen“ öffnet sich ein Dialogfenster. In dieses wird bei „Anzeigen bei:“ folgendes eingetragen: „h=0“<br>Für den Text „Sekante“ tragen Sie in diesem Feld „$h \neq 0$" ein. |  |
| Im *Notes*-Fenster wird nun der Differenzenquotient als „ms“ definiert. Für die Definition müssen die Variablen der Koordinaten genutzt werden, unter denen sie abgespeichert sind. Hierfür speichern Sie die x-Koordinate des linken Punktes als „xa“. |  |
| Zuletzt muss noch der Differentialquotient mittels h-Methode im Notes-Menü definiert werden.<br>Nun kann die Applikation für die Erkundung genutzt werden. |  |


© 2024 T³ Deutschland

Aufgabe 2
Nutzen Sie die h-Methode, um mittels einer *Notes*-Applikation die Ableitungsfunktion f‘ als Grenzwert des Differenzenquotienten einer beliebigen Funktion f zu bestimmen. Nutzen Sie das in Problem 2 der TI-Nspire-Datei vorbereitete Arbeitsblatt.

Die h−Methode zur Bestimmung der Ableitungsfunktion f'

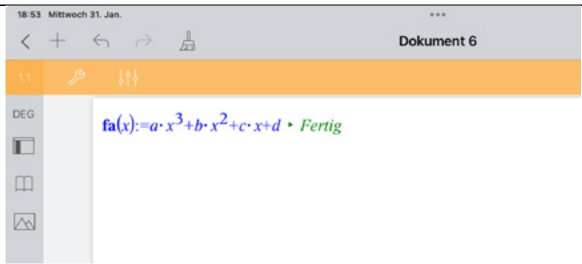
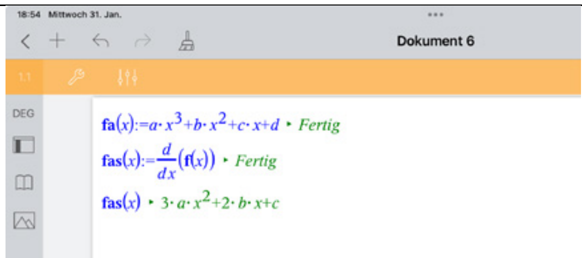
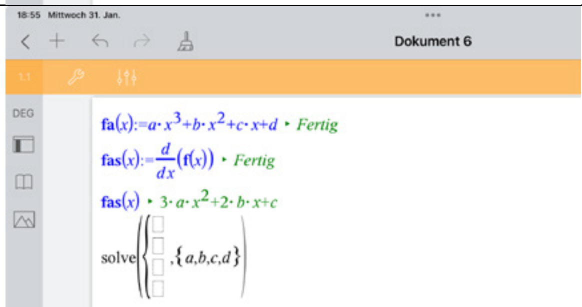
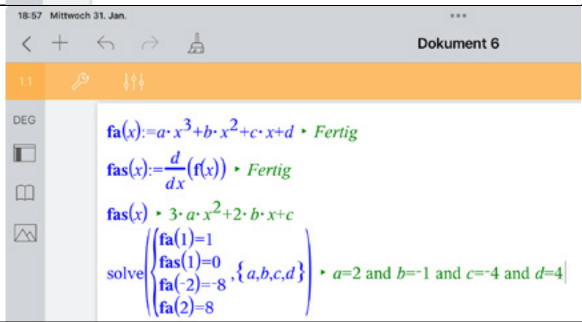
$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \blacktriangleright 5\cdot x^4+10\cdot h\cdot x^3+10\cdot h^2\cdot x^2+5\cdot h^3\cdot x+h^4$

$f(x):=x^5 \blacktriangleright \textit{Fertig}$

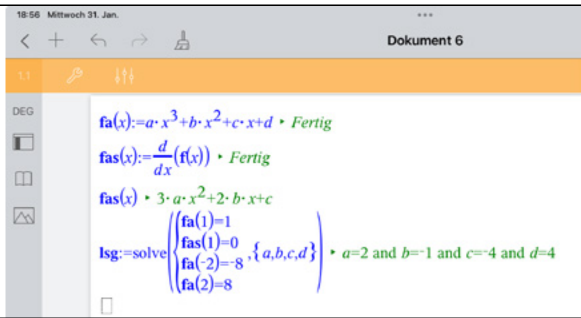
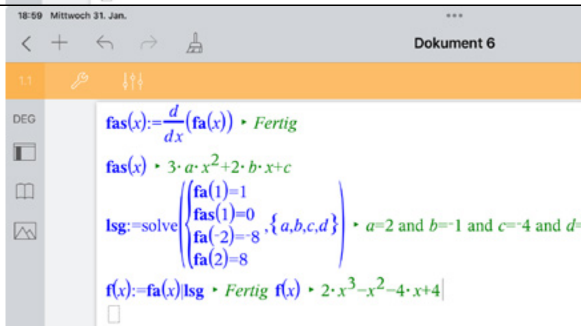
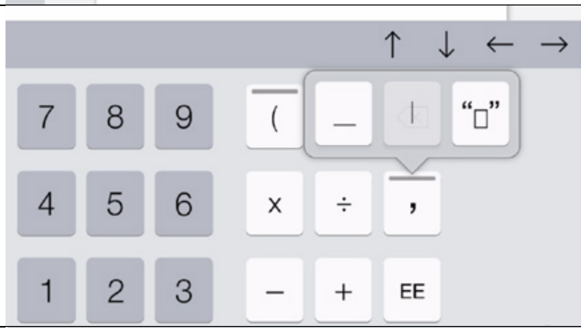
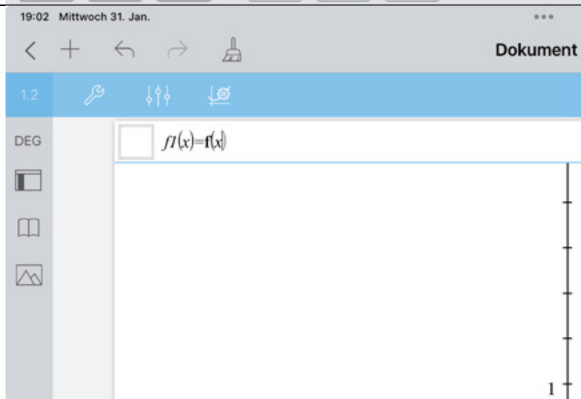
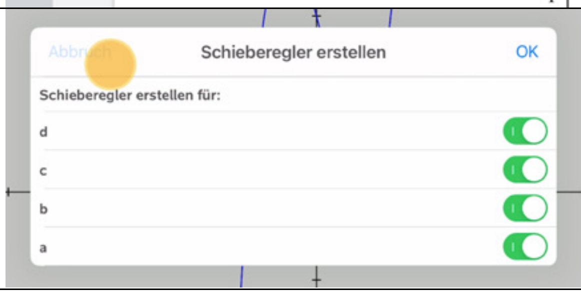
## Top 5: Steckbriefaufgaben - gezielt üben mit Notes

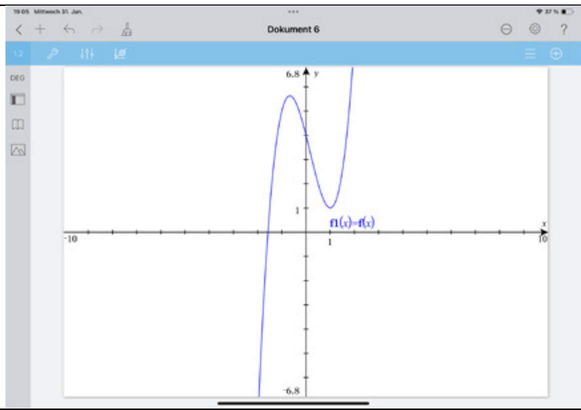
Bei Steckbrief- oder Rekonstruktionsaufgaben werden lediglich die Grundfunktion und die Bedingungen, die die Funktion erfüllen soll, angegeben. Dabei gibt es für Schülerinnen und Schüler in der Regel zwei große Hürden. Zum einen muss die sprachliche Beschreibung der Bedingungen in Gleichungen übersetzt werden und zum anderen muss dann das resultierende Gleichungssystem gelöst werden.
Hier möchten wir eine Möglichkeit zeigen, gezielt die Übersetzung der Texte in Gleichungen zu trainieren.
Dazu wird eine sehr praktische Eigenschaft von *Notes* im TI-Nspire CX CAS verwendet: die dynamische Verknüpfung von Rechnungen und Definitionen.

Aufbau des Dokuments:

| | |
|---|---|
| Zunächst muss ein Dokument mit einer Notizen- (*Notes*) Seite erstellt werden. In einer Mathebox wird die allgemeine Funktion $fa(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ definiert. Eine Mathebox erstellen Sie über den Schraubenschlüssel->Einfügen->Math Box bzw. STRG+M. Achten Sie auf die Multiplikationszeichen zwischen den Koeffizienten und dem x. |   |
| Nun soll die erste Ableitung der Funktion unter dem Funktionsnamen $fas(x)$ gespeichert werden. Das *s* steht dabei für Strich für die Ableitung. |   |
| Nun wird in einer neuen Zeile das Gleichungssystem definiert. Dazu können Sie den Werkzeugassistenten nutzen (Schraubenschlüssel->Berechnen->Algebra->Gleichungssystem->Gleichungssystem) oder den Befehl direkt eingeben. Denken Sie an die Koeffizienten im Befehl zum Lösen des Gleichungssystems. |   |
| Nun geben Sie beliebige Bedingungen ein, in dem Beispiel rechts wurden die Zahlen so gewählt, dass die Koeffizienten ganzzahlig sind, das ist aber nicht notwendig. |   |


© 2024 T³ Deutschland

<table>
<tr><td>Um die Funktionsgleichung in einem Diagramm darstellen zu können, muss nun eine Funktion mit dem Ergebnis aus der Berechnung definiert werden. Dazu wird das Ergebnis des Gleichungssytems als Variable mit dem Namen lsg gespeichert.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Die tatsächliche Funktion ergibt sich nun als die allgemeine Funktion, in dem die Koeffizienten entsprechend eingesetzt werden. Dazu wird der Mit-Operator „|“ genutzt.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Der Mit-Operator lässt sich durch längeres Drücken auf das Syntaxkomma erreichen.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Durch Hinzufügen einer Graphsseite und der Definition von $f1(x) = f(x)$ wird der Graph angezeigt.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Achtung! Der Nspire möchte Schieberegler erstellen. Drücken Sie an dieser Stelle auf Abbruch, wenn Sie einen Schieberegler nicht erstellen wollen.</td><td>
</td></tr>
</table>

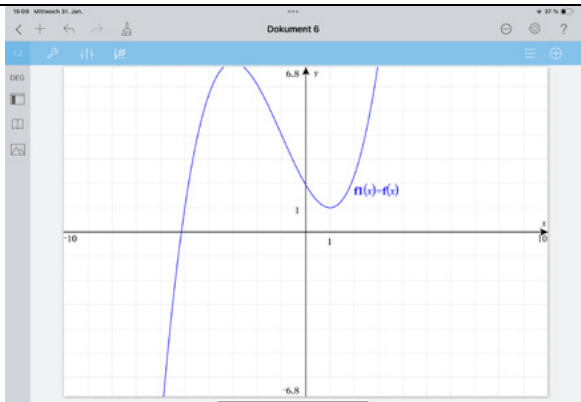
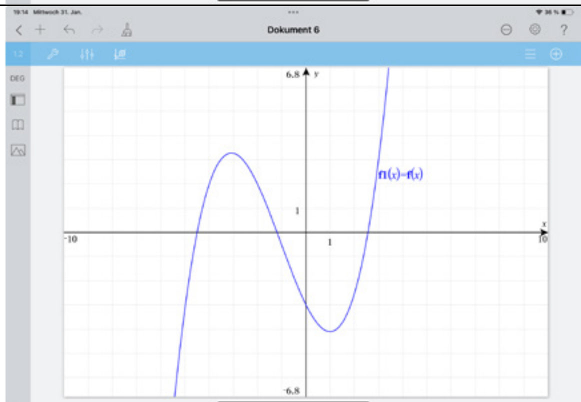
| | |
|---|---|
| So sieht der Graph aus. |  |
| Werden die Bedingungen auf der *Notesseite* geändert, so passt sich die Funktionsgleichung und der zugehörige Graph an. | |

Natürlich kann auch die zweite Ableitung, die Stammfunktion an einer ausgezeichneten Stelle, ein Flächeninhalt oder anderes in den Bedingungen abgebildet werden.

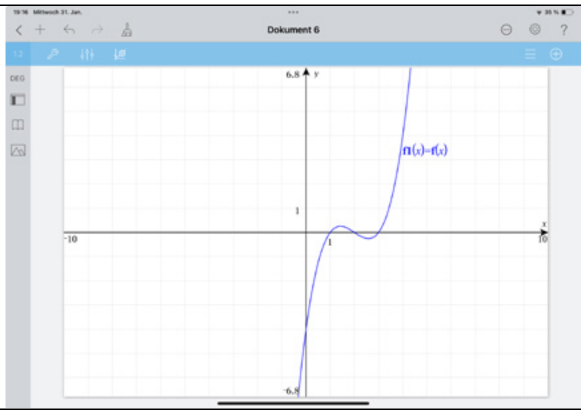
Vorgeschlagener Unterrichtsverlauf:

Im Unterricht lässt sich diese Datei zusammen mit Schülerinnen und Schülern unter Anleitung erstellen. Als Hilfe kann die tabellarische Anleitung den Lernenden zur Verfügung gestellt werden.
Übliche Fehler sind fehlende Matheboxen, Weglassen der Malzeichen zwischen Koeffizient und Variable sowie die Bestätigung der Rechnung in einer *Mathebox* durch Enter.
Danach bietet sich an, in Kleingruppen Steckbriefaufgaben selbst zu entwickeln und zu verbalisieren. Als Kontrolle lassen sich Bilder von den erzeugten Graphen speichern.

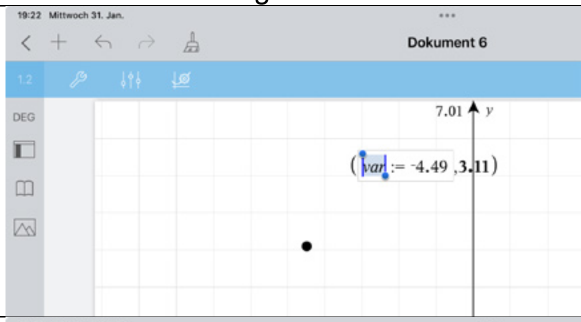
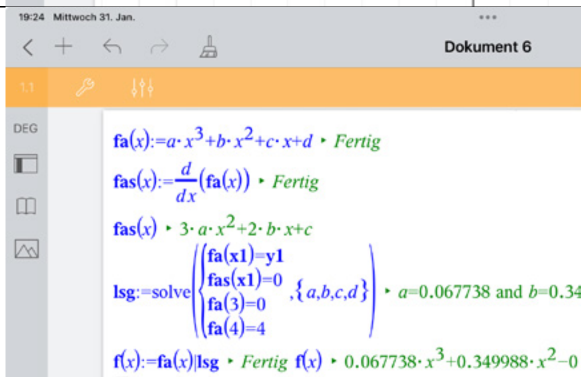
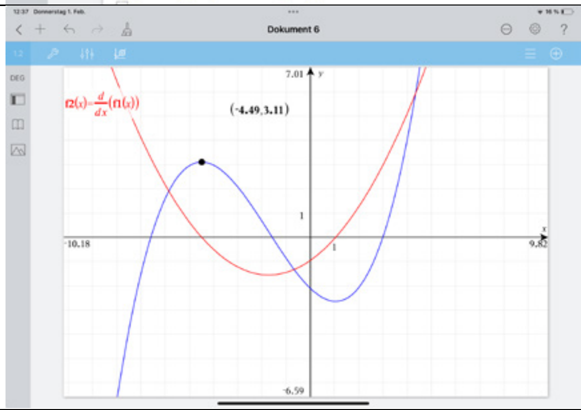
Beispielhafte Schüleraufgaben

| | |
|---|---|
| Die Funktion hat einen Extrempunkt in $E_1(1\|1)$ und einen zweiten Extrempunkt in $E_2(-3\|7)$ |  |
| Die Funktion hat einen y-Achsenabschnitt von -3, bei x=0 eine Steigung von -2 und geht durch die Punkte $P_1(3\|3)$ und $P_2(-4\|2)$ |  |


© 2024 T³ Deutschland

<table>
<tr><td>Die Funktion hat Nullstellen bei $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ und $x_3 = 3$ und geht durch den Punkt $P(4|4)$.</td><td>
</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

Ausblick:
Für Kolleginnen und Kollegen lässt sich das Arbeitsblatt leicht umbauen, um den Zusammenhang zwischen Funktion, Stammfunktion und Ableitungsfunktion durch Lernende untersuchen zu lassen. Dazu wird lediglich in *Graphs* über *Geometry* ein Punkt eingefügt und die Koordinaten unter $(x1|y1)$ gespeichert. Diese Koordinaten gehen in das Gleichungssystem ein, so dass bei dem Punkt ein Extremum vorliegt.

<table>
<tr><td>Die Koordinaten eines Punktes werden gespeichert, indem man einmal auf den Wert der Koordinate tippt, kurz wartet und dann wieder tippt.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Die Koordinaten $x1$ und $y1$ werden in das Gleichungssystem eingebaut.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Nun kann man auf der Graphsseite den Verlauf des Graphens durch Bewegen des Punktes verändern. Lässt man sich als f2(x) die erste Ableitung der Funktion f(x) anzeigen, können die Lernenden sehr leicht einen Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihrer ersten Ableitung erforschen.</td><td>
</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

## Top 6: Exponentialfunktionen

Modellierung einer Temperaturabnahme
In einem Experiment hat man in regelmäßigen Abständen die Temperatur von abkühlendem Teewasser gemessen und folgende Messwerte erhalten.

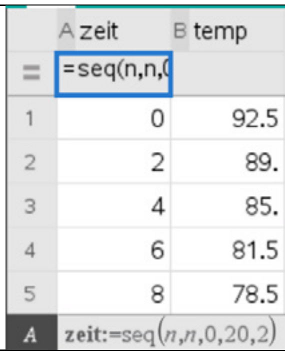
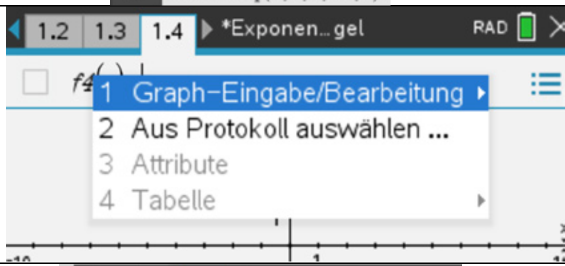
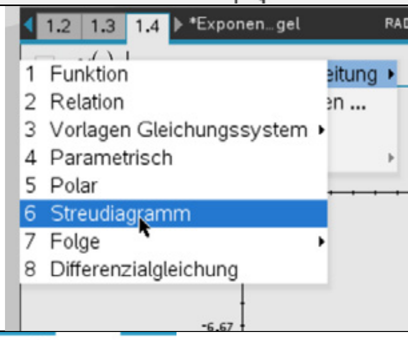
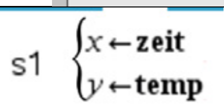
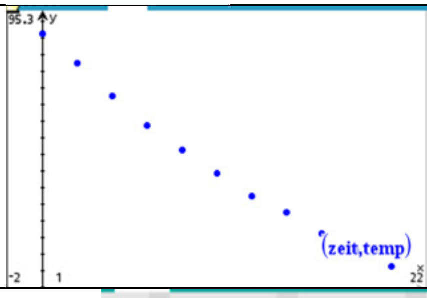
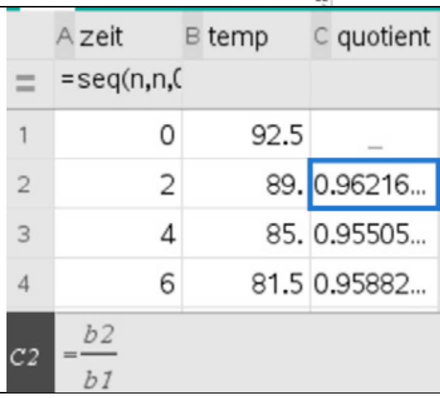
| **Zeit in min** | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Temperatur in °C** | 92,5 | 89,0 | 85,0 | 81,5 | 78,5 | 75,7 | 73,0 | 71,0 | 68,5 | 66,5 | 64,5 |

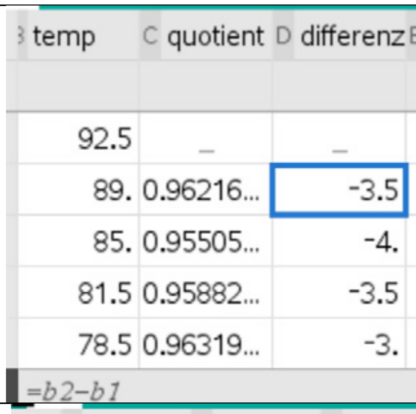
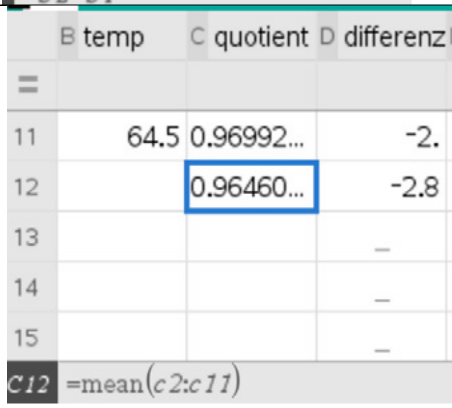
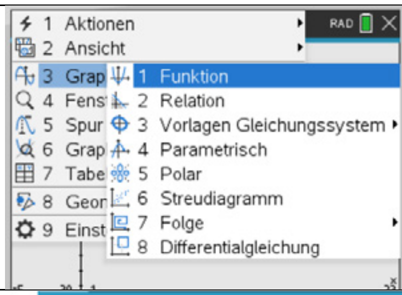
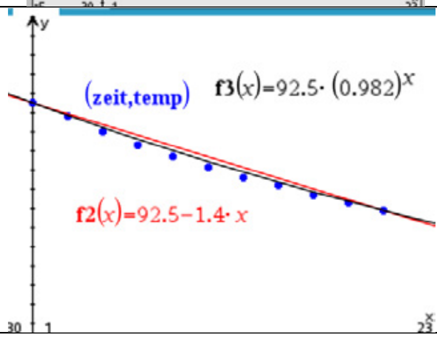
Gibt es ein geeignetes mathematisches Modell, um die Temperaturabnahme zu beschreiben?

a) Übertragen Sie die Daten aus der Tabelle in ein L&S-Dokument.
b) Stellen Sie die Messwerte in einem Streudiagramm dar.
c) Überprüfen Sie die Messwerte mithilfe der Tabellenkalkulation auf…
   a. Quotientengleichheit
   b. Differenzengleichheit
d) Ermitteln Sie eine mögliche lineare Funktion und eine mögliche exponentielle Funktion zur Beschreibung der Temperaturabnahme. (Anmerkung: Die Ermittlung der entsprechenden Faktoren kann z. B. durch Mittelwertbildung vorgenommen werden. Alternative Vorgehensweisen wie das Aufstellen von Funktionsgleichungen aus zwei Punkten sind ebenso denkbar.)
e) Beurteilen Sie mithilfe der Graphen der in d) aufgestellten Funktionen, inwieweit diese den Sachverhalt geeignet beschreiben können oder nicht.
f) (für Klasse 10:) Die Teetasse steht in einem 20°C warmen Raum. Ermitteln Sie ein geeignetes Zeitintervall, in dem die Modellierung der Temperaturabnahme mit der Funktion f bzw. g realistisch sein könnte, und begründen Sie die Wahl.
g) (für die Sekundarstufe II:) Begründen Sie, dass beide Modelle nicht realistisch sind, sondern dass ein sogenanntes begrenztes Wachstum (begrenzter Zerfall) vorliegt. Nutzen Sie das Werkzeug Regression, um eine Gleichung für den Abkühlungsprozess zu bekommen.


© 2024 T³ Deutschland

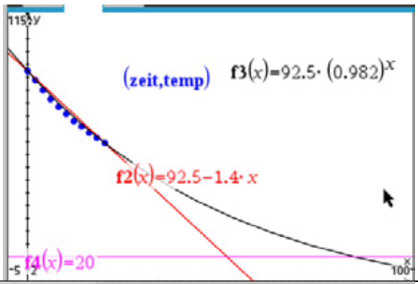
**LÖSUNGSANSÄTZE UND HINWEISE:**

<table>
<tr><td>a) Bei der Eingabe der Messwerte ist die Beschriftung der Spalten wichtig, um anschließend ein Streudiagramm erzeugen zu können. Durch den Befehl seq(n,n,0,20,2) [allgemein: seq(Ausdruck, Variable, Von, Bis (,Schritt))] können die Zeitabstände generiert werden.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>b) Zur Erstellung des Streudiagramms öffnet man ein neues Graphs-Dokument. In die Eingabezeile für die Funktion kann man mit einem Rechtsklick 1 Graph-Eingabe/Bearbeitung auswählen.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Unter 6 Streudiagramm findet sich der gesuchte Befehl.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>In der Eingabezeile können nun die Variablen zugewiesen werden.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Nach einer Anpassung der Fenstereinstellungen erscheint das Streudiagramm.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>c) Der Quotient der aufeinanderfolgenden Messwerte wird in der 3. Spalte generiert, indem man auf die Zellen Bezug nimmt. Durch Herunterziehen des blauen Rahmens wird die Berechnung auf die Folgezellen übertragen.</td><td>
</td></tr>
</table>

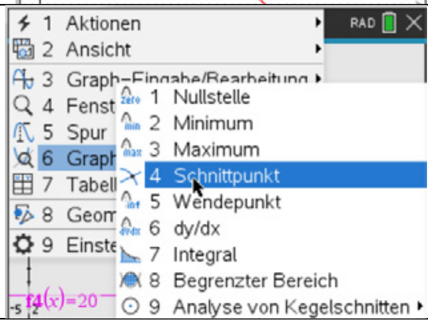
<table>
<tr>
<td>Analog verfährt man mit den Differenzen.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>d) Wählt man die Methode der Mittelwerte, kann man diese durch den Befehl mean(Startzelle, Endzelle) oder mean(quot) berechnen lassen.<br>Da in diesem Beispiel die Zeiteinheit 2 Minuten beträgt, muss man die Faktoren noch umrechnen zu näherungsweise<br>$a = \sqrt{0{,}96460} \approx 0{,}9821$ und<br>$m = -2{,}8 : 2 = -1{,}4$. Somit ergeben sich die Modellfunktionen<br>$f(x) = 92{,}5 \cdot 0{,}9821^x$ und<br>$g(x) = 92{,}5 - 1{,}4 \cdot x$.<br>Ggf. Hinweis geben, dass keine annähernde Differenzengleichheit vorliegt, daher das lineare Modell nicht sinnvoll ist.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>e) Fügt man die Funktionen dem Streudiagramm hinzu, kann man die Graphen der Modellfunktionen mit den Messwerten vergleichen.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Beide Graphen geben den Verlauf der Messwerte annähernd wieder, wobei die Exponentialfunktion geeigneter erscheint.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>


© 2024 T³ Deutschland

f) Die Temperatur des Wassers kann nicht unter die Raumtemperatur sinken. Nach Anpassung des Fensters und Eingabe der Funktion $r(x) = 20$ lassen sich die gesuchten Zeitpunkte als Schnittpunkte der Graphen ermitteln.

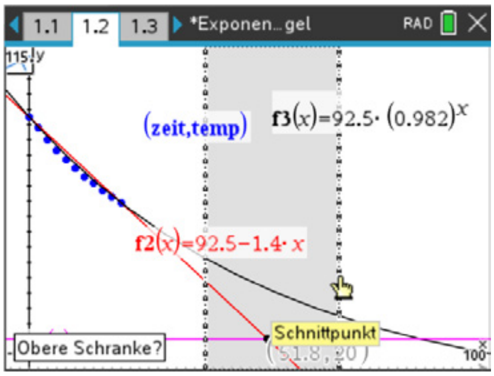


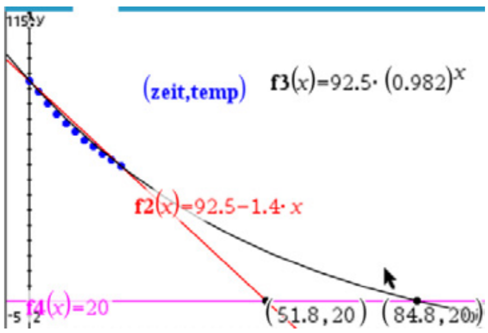

Im Menu kann unter *6 Graph analysieren* der Punkt *4 Schnittpunkt* ausgewählt werden.




Durch Auswahl der jeweiligen Graphen und Festlegung der unteren und oberen Schranke ergeben sich die Schnittpunkte $(51{,}8|20)$ bzw. $(84{,}8|20)$.

Daraus ergeben sich für eine sinnvolle Modellierung maximal die Intervalle $[0\,;51]$ und $[0\,;84]$.
(Anmerkung: Da in vielen Kernlehrplänen die Betrachtung von beschränktem Wachstum erst in der Sekundarstufe II erfolgt, wird hier nur auf die Grenzen des Modells eingegangen.)

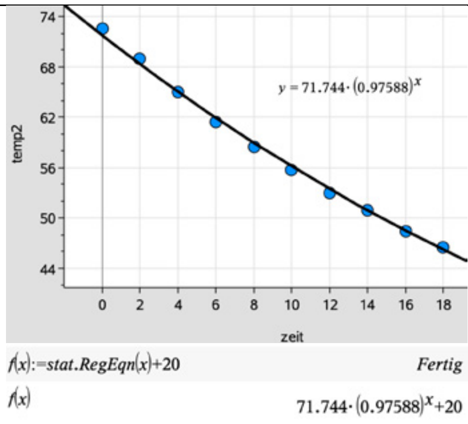



g) Es liegt kein rein exponentieller Prozess vor, da die Endtemperatur sonst 0° Celsius erreichen würde. Um trotzdem das Regressionswerkzeug des TI-Nspire CX CAS nutzen zu können, verschiebt man die gegebenen Temperaturen um die Raumtemperatur und ermittelt mit dem Regressionswerkzeug (es ginge allerdings auch wie oben beschrieben) einen passenden Funktionsterm.
Dies kann z. B. im Modul *Data&Statistics* erfolgen.

| | A zeit | B temp | C temp2 | D quot | E |
|---|---|---|---|---|---|
| = | =seq(k,k,( | | =temp−20 | | |
| 1 | 0 | 92.5 | 72.5 | _ | 0.95238 |
| 2 | 2 | 89 | 69 | 0.95172 | |
| 3 | 4 | 85 | 65 | 65/69 | |
| 4 | 6 | 81.5 | 61.5 | 0.94615 | |
| 5 | 8 | 78.5 | 58.5 | 0.95122 | |
| 6 | 10 | 75.7 | 55.7 | 0.95214 | |
| 7 | 12 | 73 | 53 | 0.95153 | |
| 8 | 14 | 71 | 51 | 51/53 | |

E1 =mean(quot)

| | |
|---|---|
| Der gefundene Funktionsterm stimmt bzgl. der „Zerfallskonstanten“ gut mit dem oben ermittelten Term für die Exponentialfunktion überein. |   |
| | |

 © 2024 T³ Deutschland

## Top 7: Grundaufgaben der analytischen Geometrie

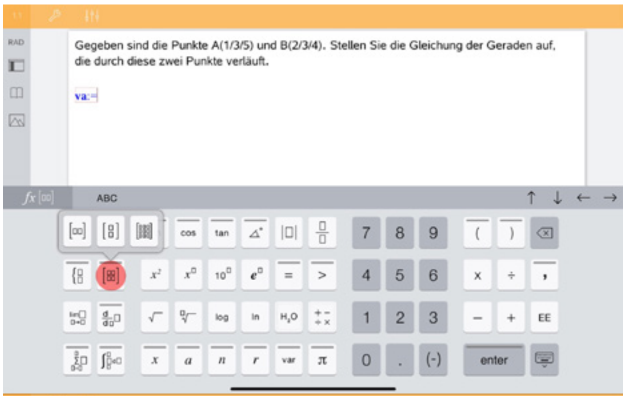
Im Folgenden werden wir einige der grundlegenden Fragestellungen der analytischen Geometrie vorstellen. Wir beschränken uns dabei auf folgende Problemstellungen:

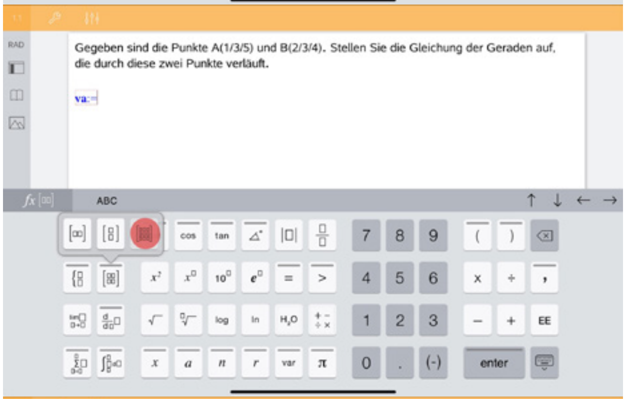
- Aufstellen einer Geradengleichung mit Hilfe zweier gegebener Punkte
- Aufstellen einer Ebenengleichung mit Hilfe dreier gegebener Punkte
- Berechnung der Lagebeziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen
- Transformation der Darstellungsformen der Ebenengleichung untereinander

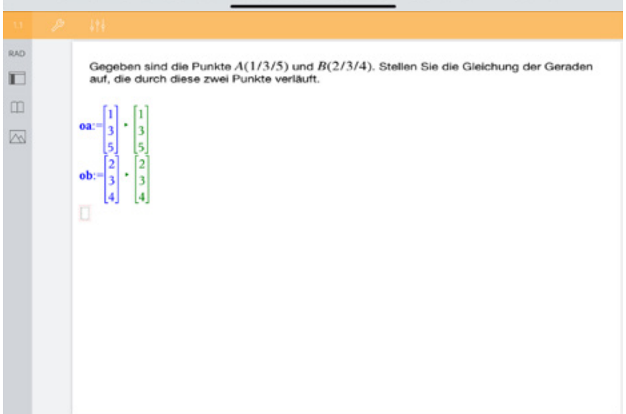
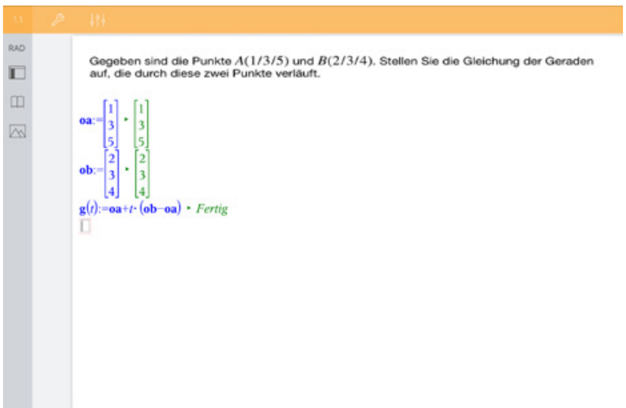
Aufgrund der Vielzahl an Darstellungsformen und Lösungswegen sind exemplarisch nur einige davon thematisiert - einen Anspruch auf Vollständigkeit kann dieser Beitrag nicht erheben. Hier zeigt sich der Vorteil des MMS, da die SuS alle Lagebeziehungen zunächst über die intuitiv leicht zugänglichen Parameterdarstellungen nachvollziehen können, bevor anschließend andere Darstellungsformen ergänzt werden können - didaktisch sind hier viele Wege möglich. Alle Berechnungen wurden in der TI-Nspire CAS-App auf dem iPad® vorgenommen. Die Bearbeitung auf dem Handheld oder in der Software erfolgt analog hierzu.

### Aufstellen von Geraden- und Ebenengleichungen

Gegeben sind die Punkte $A(1/3/5)$ und $B(2/3/4)$. Stellen Sie die Gleichung der Geraden auf, die durch diese zwei Punkte verläuft.

<table>
<tr><td>Definieren der Ortsvektoren zu den Punkten A und B.<br><br>Vektoren werden als Matrizen mit einer Spalte wie folgt im MMS definiert:</td><td>

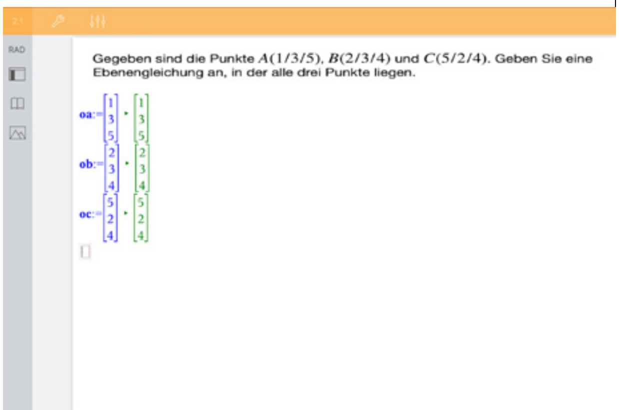
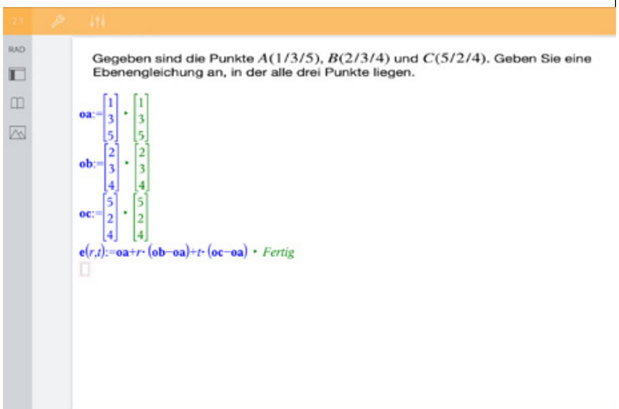



</td></tr>
<tr><td>Aufstellen der Geradengleichung:</td><td>
</td></tr>
</table>


© 2024 T3 Deutschland

**Analog gilt für Ebenengleichungen:**

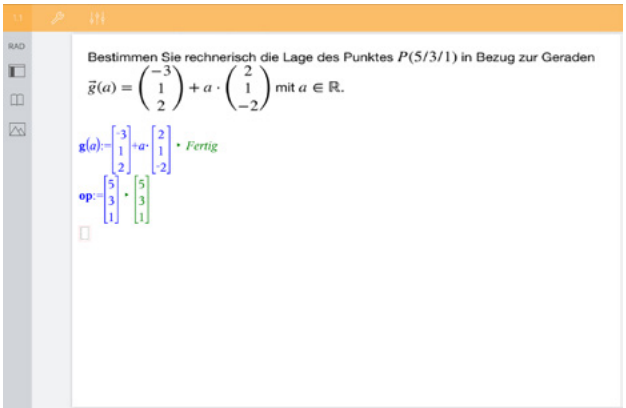
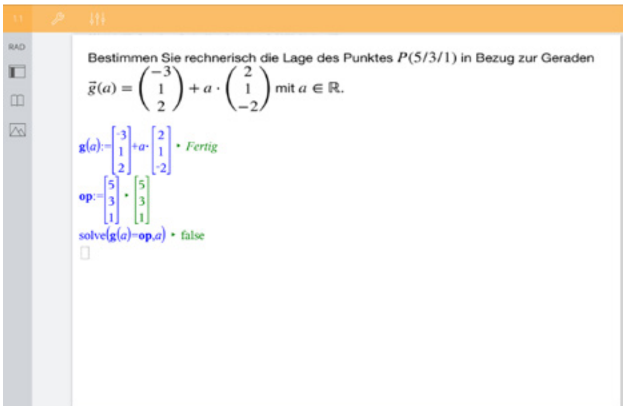
Gegeben sind die Punkte $A(1/3/5)$, $B(2/3/4)$ und $C(5/2/4)$. Geben Sie eine Ebenengleichung an, in der alle drei Punkte liegen.

| | |
|---|---|
| Definition der Ortsvektoren: |   |
| Aufstellen der Ebenengleichung: |   |

**Lagebeziehung Punkt - Gerade:**

Bestimmen Sie rechnerisch die Lage des Punktes $P(5/3/1)$ in Bezug zur Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

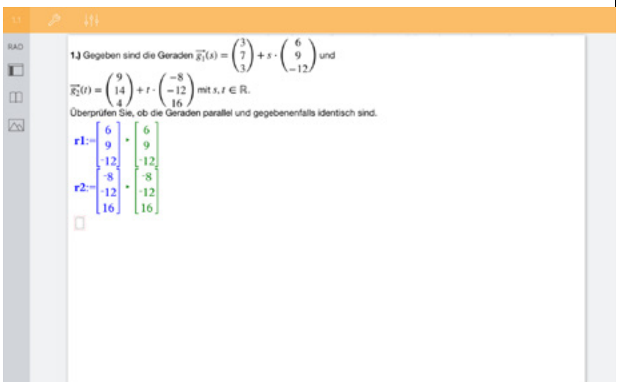
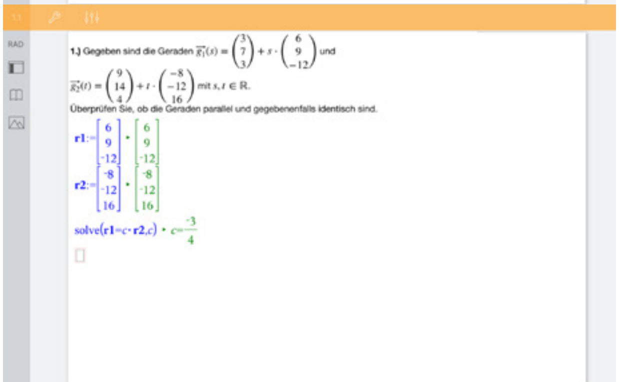
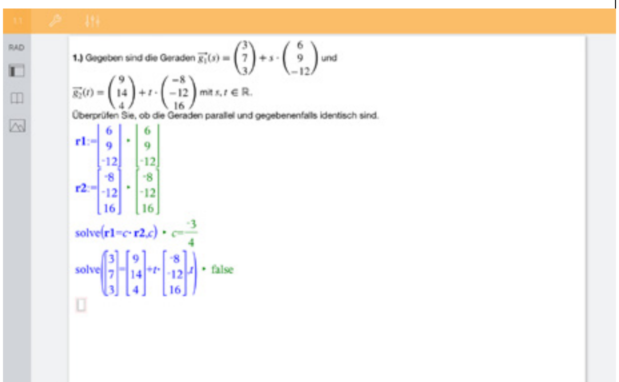
| | |
|---|---|
| Definieren der Geradengleichung sowie des Ortsvektors des Punktes P. |  |
| Prüfen, ob der Punkt auf der Geraden liegt: |  |


© 2024 T³ Deutschland

**Lagebeziehungen zweier Geraden**

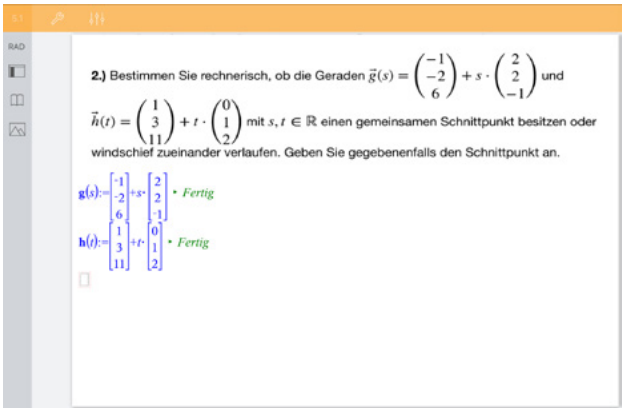
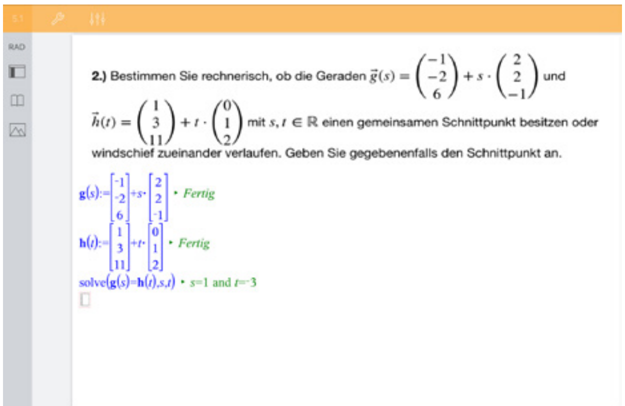
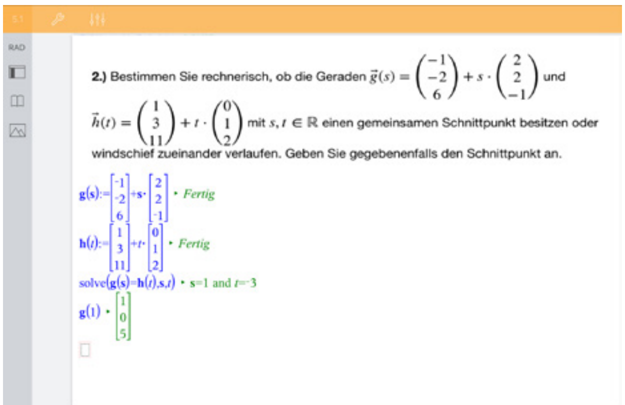
1. Überprüfung auf Parallelität/Identität
2. Überprüfen eventueller Schnittpunkte

1. Gegeben sind die Geraden $g_1\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix}$ und $g_2\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \\ 16 \end{pmatrix}$ mit $s, t \in \mathbb{R}$.
Überprüfen Sie, ob die Geraden parallel und gegebenenfalls identisch sind.

| | |
|---|---|
| Definieren der Richtungsvektoren und Nachweis der linearen Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit dieser. |   |
| Da die Richtungsvektoren linear abhängig sind, prüfen wir noch die Möglichkeit identischer Geraden: |  |

Die Geraden sind also parallel, aber nicht identisch.

2. Bestimmen Sie rechnerisch, ob die Geraden $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $s, t \in \mathbb{R}$ einen gemeinsamen Schnittpunkt besitzen oder windschief zueinander verlaufen. Geben Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt an.

<table>
<tr><td>Definieren der Geradengleichungen:</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Gleichsetzen der Geradengleichungen und Bestimmung der Skalare $s$ und $t$:</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Berechnung des Ortsvektors des Schnittpunktes, indem wir $s := 1$ setzen und $g(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ erhalten. Damit gilt für die Koordinaten des Schnittpunktes $S(1/0/5)$.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Alternativ kann über ein LGS und die Interpretation der Anzahl der Lösungen abgekürzt werden.</td><td>$\text{solve}\left(\begin{cases} -1+2\cdot s=1 \\ -2+2\cdot s=3+t \\ 6-s=11+2\cdot t \end{cases}, \{s,t\}\right) \blacktriangleright s=1 \text{ and } t=-3$<br>$os=\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}+1\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \blacktriangleright os=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$</td></tr>
</table>

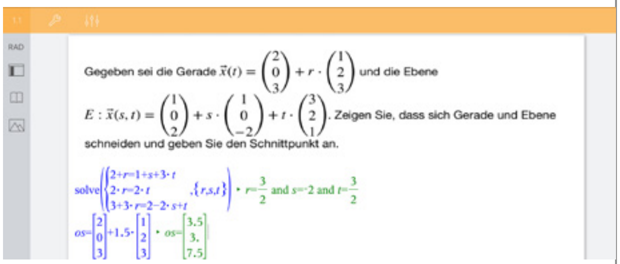
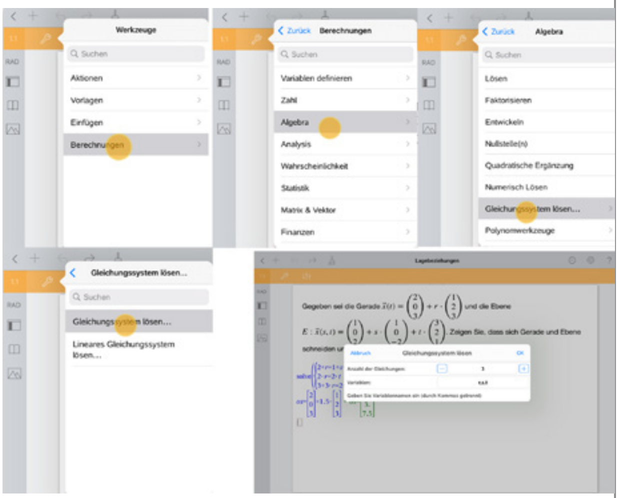

© 2024 T³ Deutschland

**Lagebeziehungen zwischen Gerade und Ebene**

Gegeben sei die Gerade $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und die Ebene

$E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $r, s, t \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie, dass sich Gerade und Ebene schneiden und geben Sie den Schnittpunkt an.

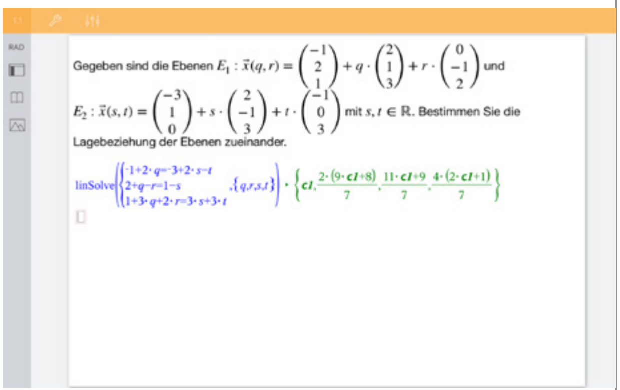
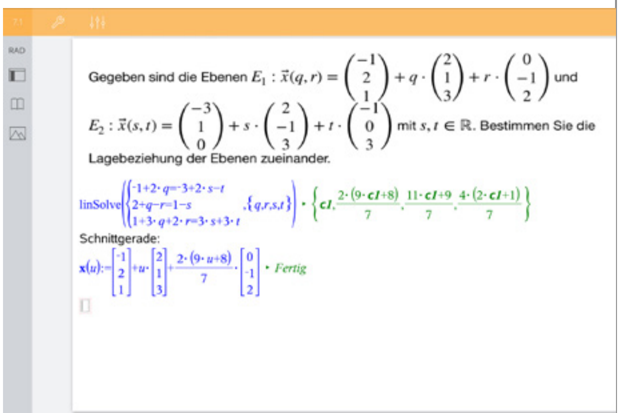
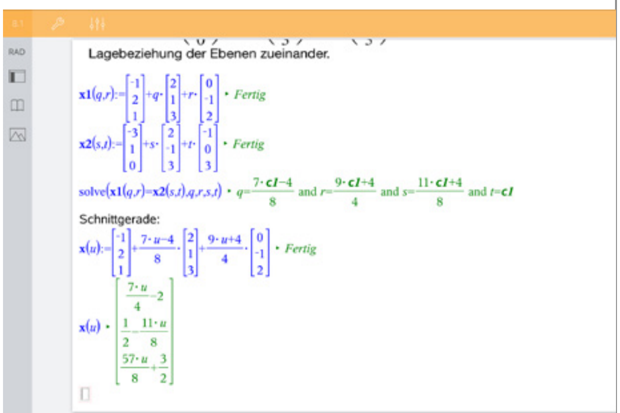
| | |
|---|---|
| Ein möglicher Ansatz ist das Lösen über ein Gleichungssystem. Anhand der Anzahl der Lösungen des Gleichungssystems kann eine Aussage zur Lage zwischen Ebene und Gerade getroffen werden. In dem Fall existiert eine Lösung und somit schneiden sich Gerade und Ebene. Anschließend kann der Ortsvektor des Schnittpunkts berechnet werden. |  |
| Das Gleichungssystem kann wie folgt eingefügt werden: |  |

**Lagebeziehung zwischen zwei Ebenen:**

Gegeben sind die Ebenen $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und

$E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $q, r, s, t \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie die Lagebeziehung der Ebenen zueinander.

| | |
|---|---|
| Ein möglicher Ansatz ist es wieder, die gleichgesetzten Ebenengleichungen komponentenweise in ein LGS zu überführen und dieses zu lösen. Über die Lösungsmenge kann auf die Lage der Ebenen zueinander geschlossen werden. |  |
| Da es unendlich viele Lösungen gibt, die untereinander über den beliebigen Parameter $c1 \in \mathbb{R}$ abhängig sind, existiert eine Schnittgerade. Deren Gleichung lautet $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{2}{7} \\ \frac{39}{7} \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{11}{7} \\ \frac{57}{7} \end{pmatrix}$ |  |
| Alternativ können zunächst die Ebenengleichungen definiert und anschließend gleichgesetzt werden. |  |

 © 2024 T³ Deutschland

**Transformation der Darstellungsformen der Ebenengleichungen untereinander**

Gegeben ist die Ebene $E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$. Bestimmen Sie eine Ebenengleichung von E in Normalenform und in Koordinatenform.

<table>
<tr>
<td>

**Bestimmen eines Normalenvektors von E:**

a) mit dem Kreuzprodukt: $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

b) mit der Lösung eines linearen Gleichungssystems: $\left| \begin{array}{l} \vec{n} \circ \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = 0 \\ \vec{n} \circ \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = 0 \end{array} \right|$

</td>
<td>

a) $\text{crossP}\left(\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}\right) \blacktriangleright \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$

b) $\text{solve}\left(\begin{cases}\text{dotP}\left(\begin{bmatrix}n1\\n2\\n3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}\right)=0\\ \text{dotP}\left(\begin{bmatrix}n1\\n2\\n3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}\right)=0\end{cases},\{n1,n2,n3\}\right)$

$\blacktriangleright\ n1=\frac{c3}{3} \text{ and } n2=\frac{2\cdot c3}{3} \text{ and } n3=c3$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

**Definition einer Normalengleichung von E:**

a) E: $(\vec{x} - \overrightarrow{va}) \circ \vec{n} = 0$

oder auch:

b) E: $\vec{x} \circ \vec{n} = \overrightarrow{va} \circ \vec{n}$

**Anzeigen einer Koordinatengleichung von E:**

$\boldsymbol{n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z = d}$

</td>
<td>

a) $\mathbf{e1}(vx):=\text{dotP}\left(vx-\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right)=0 \blacktriangleright \textit{Fertig}$

oder auch:

b) $\mathbf{e2}(x,y,z):=\text{dotP}\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right)=\text{dotP}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right) \blacktriangleright \textit{Fertig}$

$\mathbf{e1}\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right) \blacktriangleright x+2\cdot y+3\cdot z-6=0$

$\mathbf{e2}(x,y,z) \blacktriangleright x+2\cdot y+3\cdot z=6$

</td>
</tr>
</table>

Gegeben ist die Ebene $E\colon x + 2y + 3z = 6$. Bestimmen Sie eine Ebenengleichung von E in Parameterform.

<table>
<tr>
<td>

**Bestimmen dreier Punkte in E (z. B. die Spurpunkte mit den Achsen)**

$S_x(x|0|0)$ Koordinaten in Koordinatengleichung einsetzen und nach der Variablen x auflösen,

ebenso mit $S_y(0|y|0)$ und mit $S_z(0|0|z)$.

Definieren der drei zugehörigen Ortsvektoren.

</td>
<td>

$\text{solve}\left(\mathbf{e1}\left(\begin{bmatrix}x\\0\\0\end{bmatrix}\right),x\right) \blacktriangleright x=6$ oder $\text{solve}(\mathbf{e2}(x,0,0),x) \blacktriangleright x=6$

$\text{solve}(\mathbf{e2}(0,y,0),y) \blacktriangleright y=3$

$\text{solve}(\mathbf{e2}(0,0,z),z) \blacktriangleright z=2$

$\mathbf{sx}:=\begin{bmatrix}6\\0\\0\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}6\\0\\0\end{bmatrix}$ $\mathbf{sy}:=\begin{bmatrix}0\\3\\0\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}0\\3\\0\end{bmatrix}$ $\mathbf{sz}:=\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}$

</td>
</tr>
</table>

© 2024 T³ Deutschland 

| | |
|---|---|
| **Definition einer Parametergleichung von E:**<br><br>$E: \vec{x} = \overrightarrow{sx} + r \cdot (\overrightarrow{sy} - \overrightarrow{sx}) + s \cdot (\overrightarrow{sz} - \overrightarrow{sx})$<br><br>Probe:<br><br>a) durch Gleichsetzen mit der ursprünglichen Ebenengleichung,<br><br>b) durch Einsetzen in die Koordinatengleichung. | $\mathbf{e}(r,s):=\mathbf{sx}+r\cdot(\mathbf{sy}-\mathbf{sx})+s\cdot(\mathbf{sz}-\mathbf{sx}) \blacktriangleright \textit{Fertig}$<br>$\mathbf{e}(r,s) \blacktriangleright \begin{bmatrix} -6\cdot r-6\cdot s+6 \\ 3\cdot r \\ 2\cdot s \end{bmatrix}$<br>$\text{solve}\left(\mathbf{e}(r,s)=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+p\cdot\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}+q\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix},r,s,p,q\right)$<br>$\blacktriangleright r=\frac{\mathbf{c2}-2\cdot\mathbf{c3}+1}{3} \text{ and } s=\frac{-(\mathbf{c2}-\mathbf{c3}-1)}{2} \text{ and } p=\mathbf{c3}$<br>$\text{and } q=\mathbf{c2}$<br>$\mathbf{e1}(\mathbf{e}(r,s)) \blacktriangleright \text{true}$ |

 © 2024 T³ Deutschland

## Top 8: Analytische Geometrie mit dem Ti-Nspire CAS - Abstände

Für das Berechnen von Abständen zwischen einer Geraden und einem Punkt gibt es mehrere Lösungswege, die mit den Lernenden vergleichend betrachtet werden können.

Das dargestellte Material ist für den Einsatz im Unterricht konzipiert, wobei zunächst die Betrachtung des Lösungsverfahrens *„laufender Punkt“ auf der Geraden* über eine Anordnung von Lösungsschritten in den Mittelpunkt gerückt wird. Hierbei sollen die Lernenden ihre Vorkenntnisse einbringen und im Kommunizieren und Begründen gestärkt werden. Die Rechnungen können mit dem MMS nachvollzogen und der gesuchte Abstand berechnet werden.

In den anschließenden Arbeitsaufträgen sollen die Lernenden die beiden weiteren Verfahren zur Abstandsbestimmung (über eine Hilfsebene bzw. als Extremwertproblem) arbeitsteilig erarbeiten, indem sie die tabellarisch dargestellten Rechenwege im CAS/MMS kommentieren und sich die Verfahren gegenseitig erklären. Anschließend ist eine gemeinsame Reflexion der verschiedenen Rechenwege hinsichtlich des Rechenaufwands etc. möglich. Auch hier liegt der Fokus auf der Förderung der Kommunikations- und Argumentationskompetenz.

**Abstand eines Punkts von einer Geraden**[3]
Ein Vergleich mehrerer Lösungswege

Im Sommer sieht man viele „bunte Punkte“ am Himmel – möglicherweise eine Gruppe Touristen, die mit einem Heißluftballon am Rhein in Oberkassel gestartet sind und die Region Düsseldorf von oben betrachten.
Die Steuerung eines solchen Ballons ist nicht so einfach: Durch Erhitzen der im Ballon befindlichen Luft mithilfe eines Gasbrenners steigt dieser. Ein Ablassen heißer Luft an der Oberseite des Ballons führt zu einem Sinken. Allerdings führen Wind- und Luftdruckverhältnisse dazu, dass ein präzises Lenken, wie man es vom Autofahren kennt, nicht möglich ist.
Unter anderem aus diesem Grund muss beim Flug ein Sicherheitsabstand von $500\ m$ z.B. zu Sendemasten eingehalten werden, um eine Kollision zu vermeiden.

Ein auf den Rheinwiesen gestarteter Ballon befindet sich im Steigflug. Unter Wahl eines geeigneten Koordinatensystems mit der Einheit $1\ km$ und dem Startpunkt $(1|1|0)$ des Ballons kann der Steigflug durch die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ beschrieben werden, wobei $t$ die seit dem Start vergangene Zeit in Minuten angibt. Im gewählten Koordinatensystem kann die Spitze eines Sendemastes durch den Punkt $S(1|2|0{,}08)$ beschrieben werden.

<u>**Arbeitsauftrag:**</u> Überprüft rechnerisch, ob der steigende Ballon den vorgeschriebenen Sicherheitsabstand zum Sendemast einhält. Geht dabei folgendermaßen vor:

1. Erstellt eine geeignete Skizze der Situation.
2. Ihr erhaltet verschiedene „Puzzleteile“, die ihr in zwei Kategorien ordnet (z.B. parallel nebeneinander):
   - Allgemeine **Kenntnisse**, die wir haben
   - **Lösungsschritte** zur Berechnung des Abstands
3. Nachdem alle Lösungsschritte geordnet sind, muss nur noch der letzte Schritt getan werden: Berechnet händisch den gesuchten Abstand.

<u>**Aufgabe für die Schnellen**</u>: Überprüft die einzelnen Lösungsschritte mit Hilfe des CAS/MMS.

---

<u>**Weiterführende Arbeitsaufträge:**</u>
Es gibt noch zwei weitere Methoden, mit denen man den gesuchten Abstand berechnen kann. Diese schauen wir uns arbeitsteilig an.

1. **Einzelarbeit:** In der linken Spalte der Tabelle siehst du die Rechenschritte, die im CAS/MMS durchgeführt werden. Erläutern Sie diese in der rechten Spalte.

2. **Partnerarbeit:** Stellt euch gegenseitig die dargestellten Rechenwege vor.

3. **Gruppenarbeit:** Diskutiert gemeinsam Vor- und Nachteile der drei Methoden zur Abstandsberechnung.

[3] (Aufgabe orientiert am Lambacher Schweizer 2015 NRW LK/GK)


© 2024 $T^3$ Deutschland

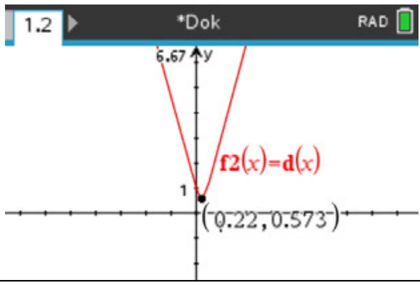
**Material für die weiterführenden Arbeitsaufträge:**

**Methode 2: Abstandsberechnung mit einer Hilfsebene**

| Rechenschritt im TI-Nspire CAS | Erläuterung |
|---|---|
| $e(v):=\text{dotP}\left(v,\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}\right)=\text{dotP}\left(\begin{bmatrix}1\\2\\0.08\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}\right)$ *Fertig*<br>$e\left(\begin{bmatrix}x1\\x2\\x3\end{bmatrix}\right)$ $2\cdot x1+3\cdot x2+x3=8.08$ | |
| $g(t):=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+t\cdot\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}$ *Fertig*<br>$\text{solve}(e(g(t)),t)$ $t=0.22$ | |
| $g(0.22)$ $\begin{bmatrix}1.44\\1.66\\0.22\end{bmatrix}$ | |
| $ovs:=\begin{bmatrix}1\\2\\0.08\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1\\2\\0.08\end{bmatrix}$<br>$\text{norm}(g(0.22)-ovs)$ $0.573411$ | |

**Methode 3: Abstandsberechnung als Extremwertproblem**

| Rechenschritt im TI-Nspire CAS | Erläuterung |
|---|---|
| $g(t):=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+t\cdot\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}$ *Fertig* | |
| $vs:=\begin{bmatrix}1\\2\\0.08\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1\\2\\0.08\end{bmatrix}$<br>$sg(t):=g(t)-vs$ *Fertig*<br>$sg(t)$ $\begin{bmatrix}2\cdot t\\3\cdot t-1\\t-0.08\end{bmatrix}$ | |

| | |
|---|---|
| $d(t):=\text{norm}(sg(t))$ *Fertig*<br>$d(t)$ $\sqrt{14\cdot\left(t^{2}-0.44\cdot t+0.071886\right)}$ | |
| $d1(t):=\frac{d}{dt}(d(t))$ *Fertig*<br>$\text{solve}(d1(t)=0,t)$ $t=0.22$<br>$d2(t):=\frac{d}{dt}(d1(t))$ *Fertig*<br>$d2(0.22)$ $24.4153$<br>$d(0.22)$ $0.573411$ | |
| Alternative:  | |


© 2024 T³ Deutschland

**Material für die Lehrkraft:**

**Material für den ersten Arbeitsauftrag:**
Puzzleteile zum Ausschneiden

| | |
|---|---|
| Jeder Punkt der Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ kann auch als $P_t(x_1 + v_1 \cdot t \mid x_2 + v_2 \cdot t \mid x_3 + v_3 \cdot t)$ geschrieben werden. | Gerade als Punkt schreiben („laufender Punkt“): $G_t(1+2t \mid 1+3t \mid t)$ |
| Der Vektor zwischen zwei Punkten berechnet sich als Differenz der beiden Ortsvektoren der Punkte. | Verbindungsvektor zwischen dem laufenden Punkt und dem Punkt $S$ aufstellen: $\overrightarrow{SG_t} = \overrightarrow{0G_t} - \overrightarrow{0S} = \begin{pmatrix} 1+2t-1 \\ 1+3t-2 \\ t-0{,}08 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t-1 \\ t-0{,}08 \end{pmatrix}$ |
| Der Abstand ist die kürzeste Entfernung zwischen zwei Objekten. | **Orthogonalitätsbedingung** aufstellen: $\overrightarrow{SG_t} * \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ |
| Die kürzeste Entfernung eines Punktes zu einer Gerade erhält man, indem man vom Punkt aus das Lot auf die Gerade fällt. | **Orthogonalitätsbedingung** umformen: $2t \cdot 2 + (3t-1) \cdot 3 + (t-0{,}08) \cdot 1 = 0$ $\leftrightarrow 4t + 9t - 3 + t - 0{,}08 = 0$ |
| Lot fällen ≙ senkrechte Verbindung herstellen | Gleichung nach $t$ auflösen: $14t - 3{,}08 = 0 \leftrightarrow t = 0{,}22$ |
| Ein Vektor ist orthogonal zu einer Geraden, wenn er orthogonal zum Richtungsvektor der Geraden ist. | |
| **Orthogonalitätsbedingung:** Zwei Vektoren sind zueinander orthogonal, wenn ihr Skalarprodukt $0$ ergibt. | $t = 0{,}22$ in $\overrightarrow{SG_t}$ bzw. $G_t$ einsetzen: $\overrightarrow{SG_{0,22}} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0{,}22 \\ 3 \cdot 0{,}22 - 1 \\ 0{,}22 - 0{,}08 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}44 \\ -0{,}34 \\ 0{,}14 \end{pmatrix}$ $G_{0,22}(1{,}44 \mid 1{,}66 \mid 0{,}22)$ |
| Die **Länge eines Vektors** berechnet sich durch $\lvert\vec{x}\rvert = \sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2}$. | **Abstand** von Punkt und Gerade, d.h. Länge des Vektors $\overrightarrow{SG_{0,22}}$ berechnen: $\left\lvert\overrightarrow{SG_{0,22}}\right\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix} 0{,}44 \\ -0{,}34 \\ 0{,}14 \end{pmatrix}\right\rvert$ |

**Methode 1: Abstandsberechnung mit einem „laufenden Punkt“**

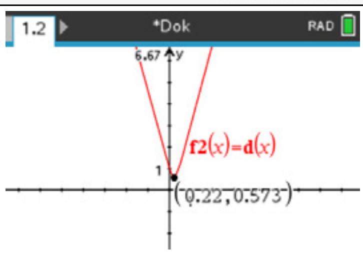
| Rechenschritt per Hand | Rechenschritt im TI-Nspire CAS |
|---|---|
| Gerade als Punkt schreiben („laufender Punkt“):<br>$G_t(1+2t\vert 1+3t\vert t)$ | $g(t):=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+t\cdot\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}$ *Fe* |
| Verbindungsvektor zwischen dem laufenden Punkt und dem Punkt $S$ aufstellen:<br>$\overrightarrow{SG_t}=\overrightarrow{0G_t}-\overrightarrow{0S}=\begin{pmatrix}1+2t-1\\1+3t-2\\t-0{,}08\end{pmatrix}$<br>$=\begin{pmatrix}2t\\3t-1\\t-0{,}08\end{pmatrix}$ | $vs:=\begin{bmatrix}1\\2\\0.08\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1\\2\\0.08\end{bmatrix}$<br>$sg(t):=g(t)-vs$ *Fertig*<br>$sg(t)$ $\begin{bmatrix}2\cdot t\\3\cdot t-1\\t-0.08\end{bmatrix}$ |
| **Orthogonalitätsbedingung** aufstellen:<br>$\overrightarrow{SG_t}*\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}=0$ | $\mathrm{solve}\left(\mathrm{dotP}\left(sg(t),\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}\right)=0,t\right)$ $t=0.22$ |
| **Orthogonalitätsbedingung** umformen:<br>$2t\cdot 2+(3t-1)\cdot 3+(t-0{,}08)\cdot 1=0$<br>$\leftrightarrow 4t+9t-3+t-0{,}08=0$ | |
| Gleichung nach $t$ auflösen:<br>$14t-3{,}08=0\leftrightarrow t=0{,}22$ | |
| $t=0{,}22$ in $\overrightarrow{SG_t}$ bzw. $G_t$ einsetzen:<br>$\overrightarrow{SG_{0,22}}=\begin{pmatrix}2\cdot 0{,}22\\3\cdot 0{,}22-1\\0{,}22-0{,}08\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}44\\-0{,}34\\0{,}14\end{pmatrix}$<br>$G_{0,22}(1{,}44\vert 1{,}66\vert 0{,}22)$ | $sg(0.22)$ $\begin{bmatrix}0.44\\-0.34\\0.14\end{bmatrix}$ |
| **Abstand** von Punkt und Gerade, d.h. Länge des Vektors $\overrightarrow{SG_{0,22}}$ berechnen:<br>$\left\vert\overrightarrow{SG_{0,22}}\right\vert=\left\vert\begin{pmatrix}0{,}44\\-0{,}34\\0{,}14\end{pmatrix}\right\vert\approx 0{,}573\ [km]$ | $\mathrm{norm}(sg(0.22))$ 0.573411 |


© 2024 T³ Deutschland

**Methode 2: Abstandsberechnung mit einer Hilfsebene**

| **Rechenschritt im TI-Nspire CAS** | **Erläuterung** |
|---|---|
| $e(v):=\text{dotP}\left(v,\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}\right)=\text{dotP}\left(\begin{bmatrix}1\\2\\0.08\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}\right)$ *Fertig* <br> $e\left(\begin{bmatrix}x1\\x2\\x3\end{bmatrix}\right)$ $2\cdot x1+3\cdot x2+x3=8.08$ | Aufstellen der Hilfsebene $E$, die orthogonal zur Geraden $g$ ist und durch den Punkt $S$ verläuft: <br> $E: \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\0{,}08\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ <br> $\leftrightarrow E: 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 8{,}08$ |
| $g(t):=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+t\cdot\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}$ *Fertig* <br> $\text{solve}(e(g(t)),t)$ $t=0.22$ | Schnittpunkt $L$ der Geraden $g$ mit der Ebene $E$ berechnen: <br> $2\cdot(1+2t)+3\cdot(1+3t)+t=8{,}08$ <br> $\leftrightarrow 2+4t+3+9t+t=8{,}08$ <br> $\leftrightarrow 5+14t=8{,}08$ <br> $\leftrightarrow t=0{,}22$ |
| $g(0.22)$ $\begin{bmatrix}1.44\\1.66\\0.22\end{bmatrix}$ | $\overrightarrow{0L} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 0{,}22\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1{,}44\\1{,}66\\0{,}44\end{pmatrix}$ <br> $\rightarrow L(1{,}44\vert 1{,}66\vert, 44)$ |
| $ovs:=\begin{bmatrix}1\\2\\0.08\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1\\2\\0.08\end{bmatrix}$ <br> $\text{norm}(g(0.22)-ovs)$ $0.573411$ | **Abstand** von Punkt und Gerade, d.h. Länge des Vektors $\overrightarrow{SL}$ berechnen: <br> $\left\vert\overrightarrow{SL}\right\vert = \left\vert\begin{pmatrix}0{,}44\\-0{,}34\\0{,}14\end{pmatrix}\right\vert \approx 0{,}573\ [km]$ |

### Methode 3: Abstandsberechnung als Extremwertproblem

| Rechenschritt im TI-Nspire CAS | Erläuterung |
|---|---|
| $g(t):=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+t\cdot\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}$ *Fertig* | Gerade als Punkt schreiben („laufender Punkt“): <br> $G_t(1+2t\|1+3t\|t)$ |
| $vs:=\begin{bmatrix}1\\2\\0.08\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1\\2\\0.08\end{bmatrix}$ <br> $sg(t):=g(t)-vs$ *Fertig* <br> $sg(t)$ $\begin{bmatrix}2\cdot t\\3\cdot t-1\\t-0.08\end{bmatrix}$ | Verbindungsvektor zwischen dem laufenden Punkt und dem Punkt $S$ aufstellen: <br> $\overrightarrow{SG_t}=\overrightarrow{0G_t}-\overrightarrow{0S}=\begin{pmatrix}1+2t-1\\1+3t-2\\t-0{,}08\end{pmatrix}$ <br> $=\begin{pmatrix}2t\\3t-1\\t-0{,}08\end{pmatrix}$ |
| $d(t):=\mathrm{norm}(sg(t))$ *Fertig* <br> $d(t)$ $\sqrt{14\cdot(t^2-0.44\cdot t+0.071886)}$ | Funktion für die Länge des Vektors $\overrightarrow{SG_t}$ aufstellen: <br> $d(t)=\left\|\begin{pmatrix}2t\\3t-1\\t-0{,}08\end{pmatrix}\right\|$ <br> $=\sqrt{(2t)^2+(3t-1)^2+(t-0{,}08)^2}$ <br> $=\sqrt{14t^2-6{,}16t+1{,}0064}$ |
| $d1(t):=\frac{d}{dt}(d(t))$ *Fertig* <br> $\mathrm{solve}(d1(t)=0,t)$ $t=0.22$ <br> $d2(t):=\frac{d}{dt}(d1(t))$ *Fertig* <br> ⚠ $d2(0.22)$ 24.4153 <br> $d(0.22)$ 0.573411 | Berechnung des Minimums der Funktion $d(t)$ liefert $t=0{,}22$ und $d(0{,}22)\approx 0{,}573\ [km]$ |
| Alternative:   | Alternative: Graphische Ermittlung des Minimums der Funktion $d(t)$ liefert $t=0{,}22$ und $d(0{,}22)\approx 0{,}573\ [km]$ |

**Mögliche Diskussionspunkte der drei dargestellten Methoden:**

- Rechenaufwand, v.a. beim händischen Rechnen
- Notwendige Kenntnisse (zu Ebenen, zur Extremwertberechnung)
- Anschaulichkeit


© 2024 T³ Deutschland

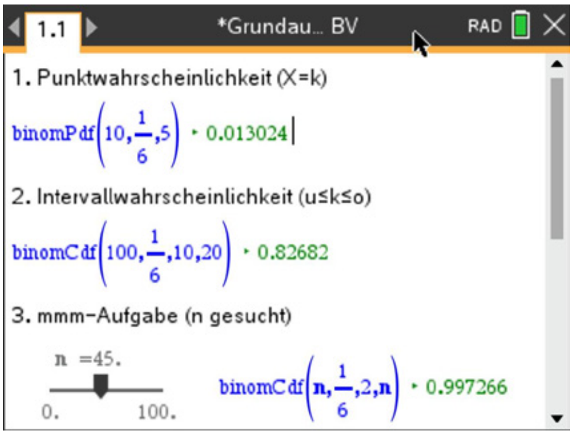
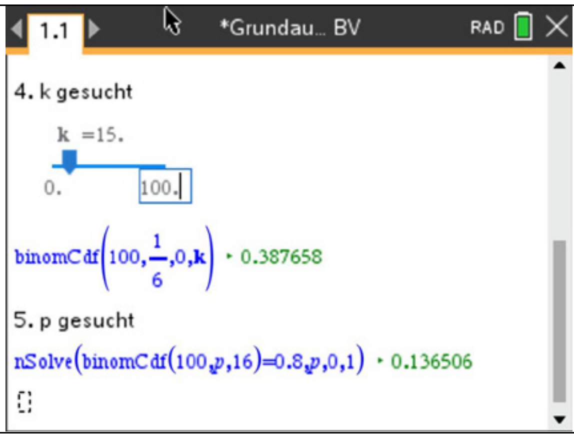
## Top 9: Grundaufgaben der Binomialverteilung

Als Grundaufgaben bezeichnen wir die nachfolgenden 5 Aufgabenschwerpunkte in der Binomialverteilung:

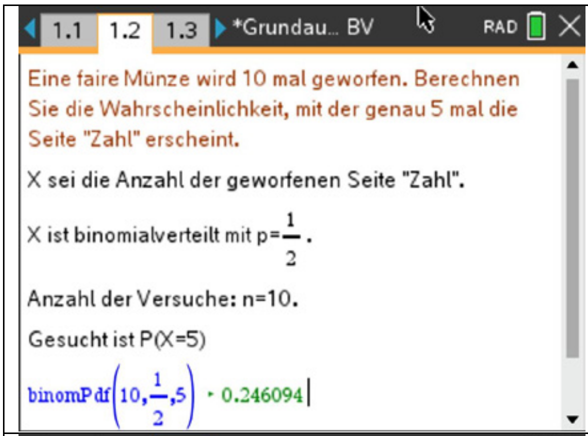
1. Berechnen der Punktwahrscheinlichkeit P(X=k)
2. Berechnen der Intervallwahrscheinlichkeit P(u ≤ X ≤ o)
3. Mindestens-mindestens-mindestens-Aufgabe (n gesucht)
4. Frage nach der Anzahl der „Erfolge“ (k gesucht)
5. Frage nach der unbekannten Wahrscheinlichkeit (p gesucht)

Zunächst werden die Berechnungen übersichtlich dargestellt.
Zu jeder Grundaufgabe wird ein einfaches Beispiel gezeigt.
Zu guter Letzt wird die Binomialverteilung grafisch dargestellt.

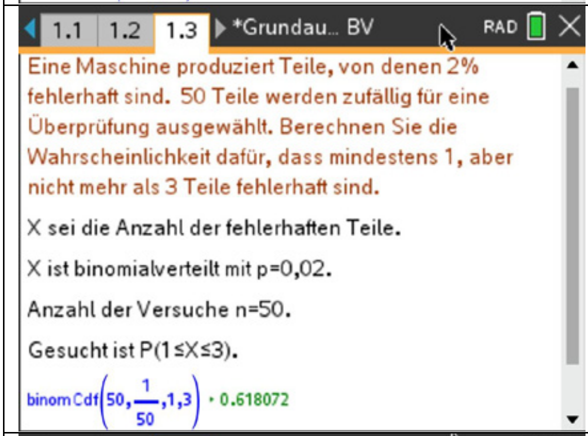
### A. Übersicht über die Grundaufgaben

| | |
|---|---|
| In der *Notes*-Seite verwenden Sie in einer Mathebox die beiden grundlegenden Befehle *binomPdf* sowie *binomCdf*.<br><br>Für die mmm-Aufgabe erstellen Sie zunächst einen Schieberegler mit einem ausreichend großen Bereich für n. Dabei ist zu beachten, dass bei den Schiebereglereinstellungen die Schrittweite 1 beträgt.<br>Jetzt kann die Mindestzahl von Versuchen so variiert werden, dass die Mindest-wahrscheinlichkeit überschritten wird. |   |
| Für die 4. Grundaufgabe muss man die Anzahl n der Versuche sowohl im Schieberegler als auch in der Formel entsprechend der Aufgabe anpassen.<br><br>Wird die Wahrscheinlichkeit p gesucht, kann der *nSolve*-Befehl verwendet werden. Hier ist zu beachten, dass der Lösungsbereich zwischen 0 und 1 vorgegeben werden muss. |   |

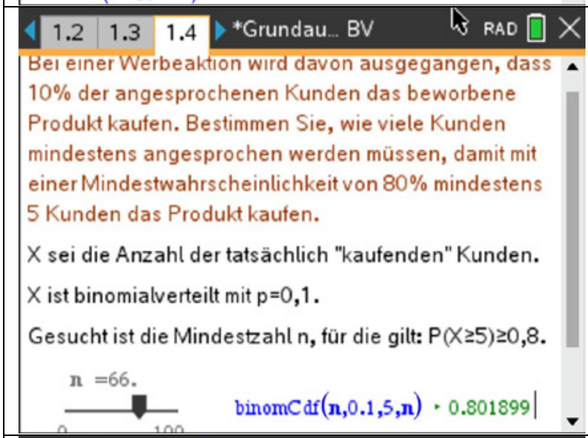
## B. Beispiele zu den Grundaufgaben



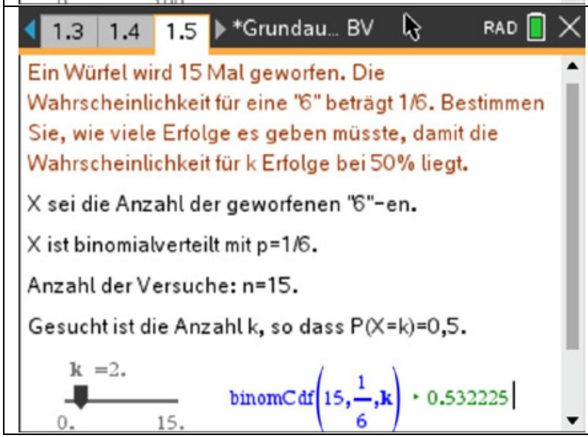

**Antwort:**
Wird eine faire Münze 10-mal geworfen, so beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass genau 5 mal die Seite "Zahl" erscheint, rund 25 %.




**Antwort:**
Bei der Auswahl von 50 Teilen aus der Produktion einer Maschine, welche zu 2 % fehlerhafte Teile produziert, beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 1, aber nicht mehr als 3 Teile fehlerhaft sind, ca. 62 %.

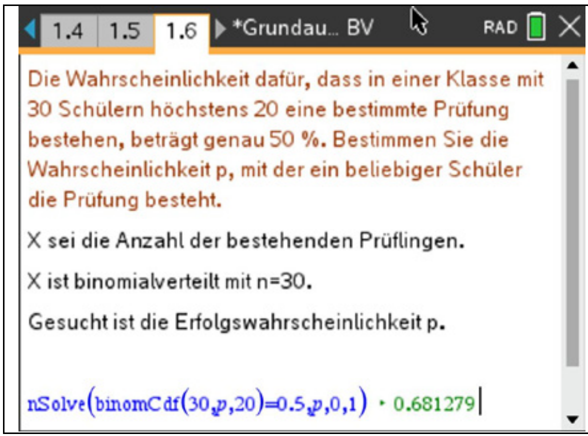



**Antwort:**
Um bei der Werbeaktion eine 80 prozentige Mindestwahrscheinlichkeit, dass mindestens 5 Kunden das Produkt kaufen, zu erreichen, müssten mindestens 66 Kunden angesprochen werden.



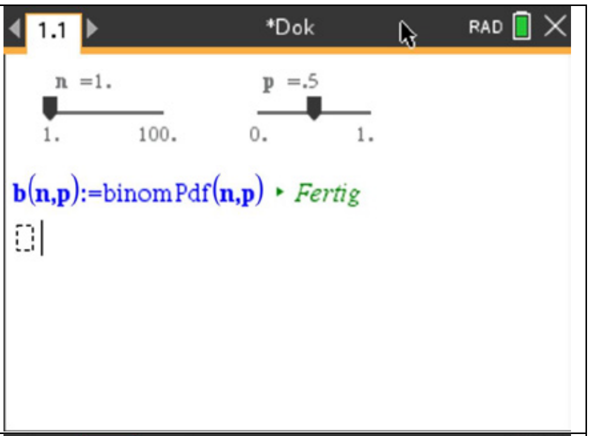
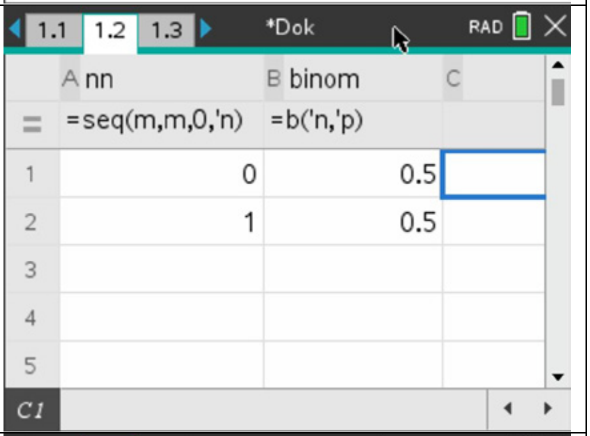
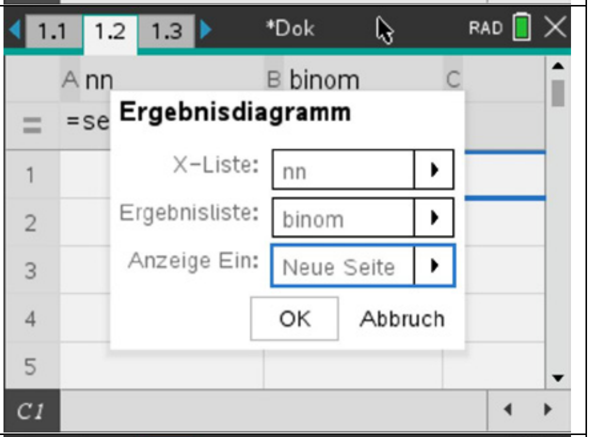
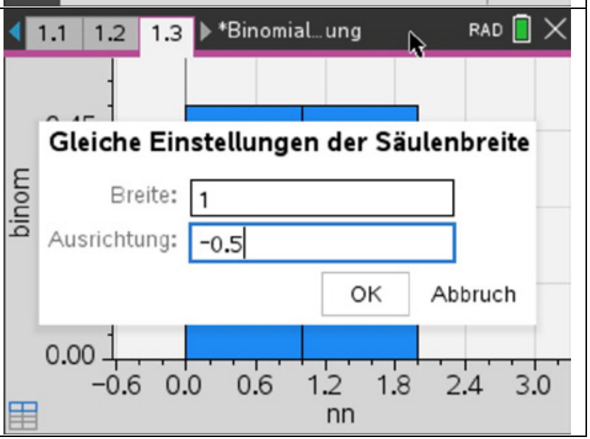

**Antwort:**
Wenn ein Würfel 15 Mal geworfen wird, kann man mit der vorgegebenen Wahrscheinlichkeit von 50 % mit zwei „6"-en rechnen.


© 2024 T³ Deutschland



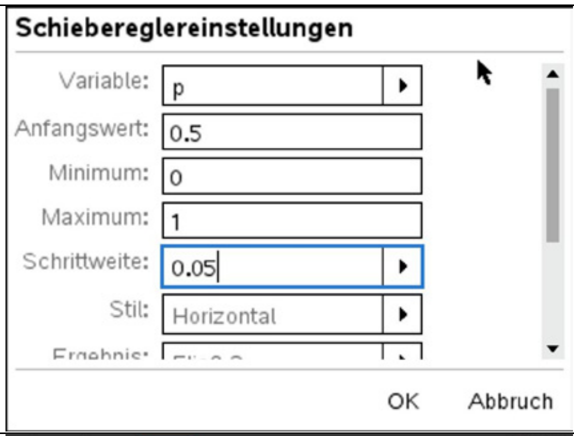

**Antwort:**
Wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Klasse mit 30 Schülern höchstens 20 eine bestimmte Prüfung bestehen, genau 50 % beträgt, so hat ein einzelner Schüler eine Chance von ca. 68 %, die Prüfung zu bestehen.

### C. Graphische Darstellung der Binomialverteilung mit Schiebereglern

| | |
|---|---|
| 1. Im *Notes*-Modul zwei Schieberegler einfügen, einen für n und einen für p. Die Schrittweite manuell auswählen.<br>2. Eine Funktion b(n,p) definieren. |  |
| 3. In *„Lists & Spreadsheet“* zwei Spalten erstellen, eine für n und eine für die definierte Funktion. |  |
| 4. Aus dem Menü „Daten“ oder mit dem Kontextmenü (ctrl + menu) das „Ergebnisdiagramm“ auswählen und auf eine „Neue Seite“ legen. |  |
| 5. Im Kontextmenü (ctrl + menu) die „Säuleneinstellungen“ auswählen, „Gleiche Säulenbreite“ auswählen und die Ausrichtung von –1 auf –0.5 ändern. |  |

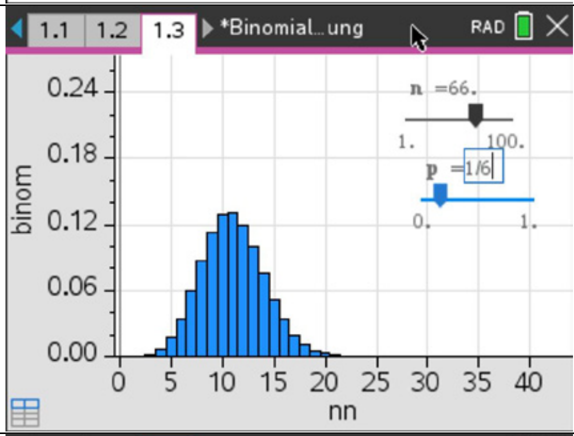

© 2024 T³ Deutschland

6. Im Menü unter „Aktionen“ erneut zwei Schieberegler mit den gleichen Werten wie in 1. erstellen.

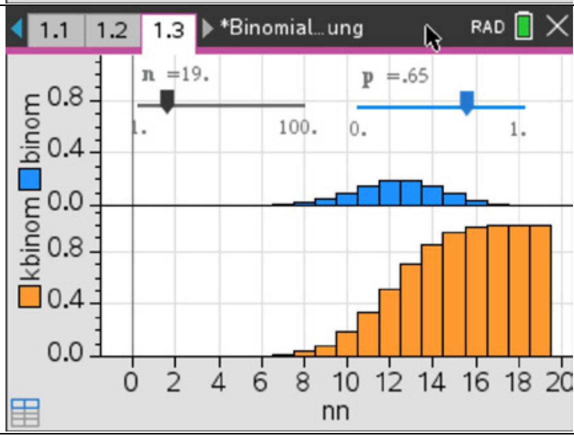



7. Beide Schieberegler können nun beliebig angepasst werden.

8. Zur besseren Veranschaulichung können die Achsen durch Verschieben gedehnt oder gestaucht werden.




9. Um die kumulierte Binomialverteilung zu veranschaulichen, muss lediglich die Funktion im *Notes*-Modul verändert werden oder eine zweite Funktion, z.B. bk(n,p), definiert werden.




Will man n und/oder p nicht variieren, so reicht die Erstellung der Liste für n und für die Binomialwahrscheinlichkeit in der Tabellenkalkulation.

## Top 10: Simulationen in der Stochastik

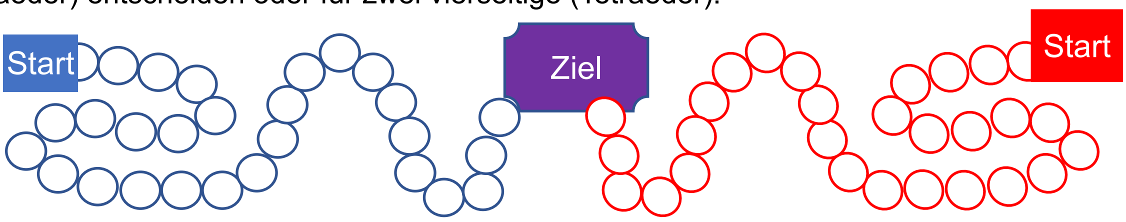
Die Modellierung realer Situationen mit zufälligem Ausgang durch ein Zufallsexperiment ist Bestandteil der meisten Curricula.
Man muss dabei

- den Zufallsversuch beschreiben, der dem Zufallsexperiment entspricht,
- das Zufallsexperiment „beliebig“ oft wiederholen können,
- Daten bezüglich der Ereignisse und Zufallsgrößen sammeln,
- die simulierten Daten auswerten und analysieren und ggf.
- eine Interpretation im Vergleich zu theoretischen Erkenntnissen

durchführen[4].

**Beispiel 1: Würfelduell**

Max und Marie spielen ein Spiel, bei dem es darum geht, das Ziel schnellstmöglich zu erreichen. Beide würfeln gleichzeitig. Sie können sich für einen achtseitigen Würfel (Oktaeder) entscheiden oder für zwei vierseitige (Tetraeder).




**Aufgabe 1:**

Spielt das Spiel in Zweierteam mindestens dreimal. Dabei soll ein Spieler[5] den Oktaeder, der andere die beiden Tetraeder benutzen. Notiert, welcher Spieler das Spiel gewonnen hat.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Gewinn mit Oktaeder: | | Gewinn mit Tetraedern: | |

Max und Marie diskutieren die Vor- und Nachteile der beiden Würfel.
Max: „Mit meinem Oktaeder würfele ich bei etwa jedem achten Wurf eine acht, das schaffst Du nur etwa bei jedem sechzehnten Mal.“
Marie: „Mit meinen beiden Tetraedern werfe ich jedes Mal mindestens eine zwei, Du wirfst in ungefähr jedem achten Wurf eine 1.

**Aufgabe 2:**
Überprüfen Sie die Argumente von Max und Marie und stellen Sie eine eigene Hypothese auf, mit welchen Würfeln man das Spiel eher gewinnt.

**Aufgabe 3:**
Führen Sie eine geeignete Simulation durch, um den Sachverhalt zu klären. Dabei soll die Frage im Mittelpunkt stehen, ob man mit dem Oktaeder oder zwei Tetraedern höhere Ergebnisse erzielt. Fügen Sie Screenshots der Programmierung (*Lists & Spreadheets*) und der Darstellung der Ergebnisse ein.

---

[4] Biehler, R., & Maxara, C. (2007). Integration von stochastischer Simulation in den Stochastikunterricht mit Hilfe von Werkzeugsoftware. *Der Mathematikunterricht, 53*(3), S.48.

[5] Mit Spieler sind Spielerinnen und Spieler gemeint, aufgrund der besseren Lesbarkeit wird nur die männliche Form benutzt.


© 2024 T³ Deutschland

**Aufgabe 4*:**
Beweisen Sie, dass die Auswahl der „Würfel“ Auswirkungen auf das Ergebnis des Spiels haben kann. Sie können dazu das Konzept des Erwartungswertes (gewichteten Mittelwertes) benutzen.

## Würfelduell
Lehrermaterial

**Lernvoraussetzungen**

Die Schüler*innen kennen…
… das Laplace-Experiment
… mehrstufige Zufallsexperimente
… Baumdiagramme und Pfadregeln

**Technische Voraussetzungen**

Die Schülerinnen und Schüler können…
… ein Diagramm darstellen mit zwei Größen.
… den Sequenz-Befehl zur Erzeugung von Folgen.
… statistische Größen berechnen lassen.

**Hinweise für die Lehrkraft**
Zum Gewinnen benötigt man insgesamt 25 Punkte. Da der Erwartungswert bei beiden Tetraedern bei 5 liegt, sollte das Ziel im Mittel nach fünf Zügen erreicht sein. Für den Oktaeder wäre E(X) = 22,5 nach fünf Würfen. Als Sozialform bietet sich die Partnerarbeit an. Nach dem Spielen kann es sinnvoll sein, nach den Gewinnen bei entsprechender Würfelwahl in der ganzen Gruppe zu fragen.
Die Simulation mit $1 \leq n \leq 2500$ mit variablem n ist als Datei zu diesem Dokument vorhanden. Dort findet sich in einem *Notes*-Modul auch ein mögliches Tafelbild. Verwenden die Schüler ein Handheld, sollten die drei Applikationen einzeln (ohne Splitscreen) erstellt werden.

**Lösungen**
**Aufgabe 1:**
Bei drei Spielen wäre ein Ergebnis von 1:2 am wahrscheinlichsten.

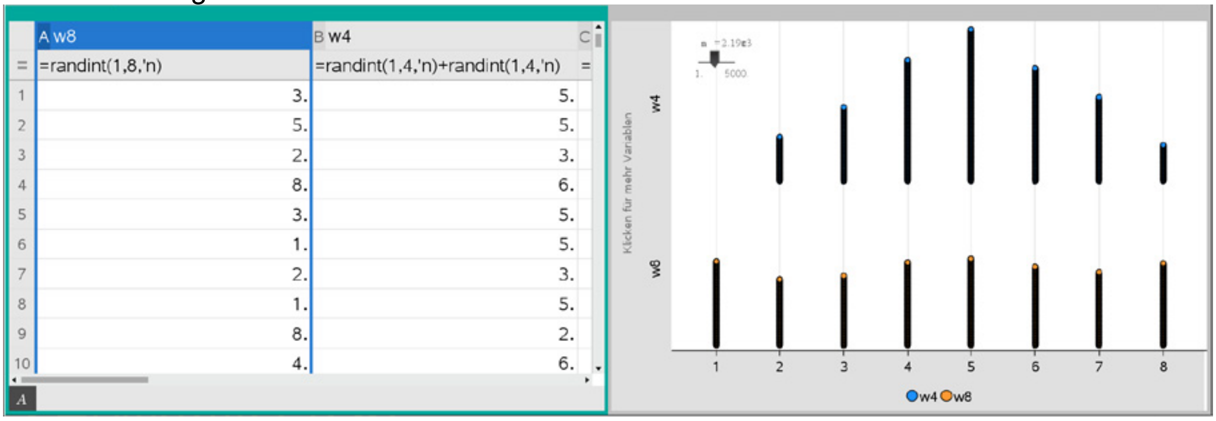
**Aufgabe 2:**
Als Lösung bietet sich eine tabellarische Wahrscheinlichkeitsverteilung an:

| W8 | | | 2 W4 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | $P(x_i)$ | | $x_i$ | Ergebnisse | $P(x_i)$ |
| 1 | $\frac{1}{8}$ | | 2 | (1;1) | $\frac{1}{16}$ |
| 2 | $\frac{1}{8}$ | | 3 | (1;2); (2;1) | $\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$ |
| 3 | $\frac{1}{8}$ | | 4 | (1;3), (2;2); (3;1) | $\frac{3}{16}$ |
| 4 | $\frac{1}{8}$ | | 5 | (1;4), (2;3),(3;2), (4;1) | $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ |
| 5 | $\frac{1}{8}$ | | 6 | (2;4), (3;3), (4;2) | $\frac{3}{16}$ |
| 6 | $\frac{1}{8}$ | | 7 | (3;4), (4;3) | $\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$ |
| 7 | $\frac{1}{8}$ | | 8 | (4;4) | $\frac{1}{16}$ |
| 8 | $\frac{1}{8}$ | | | | |

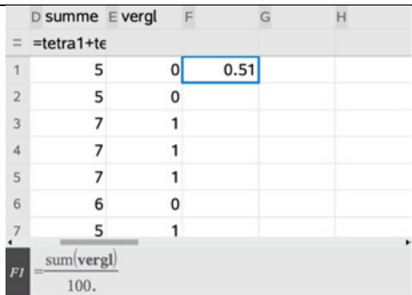
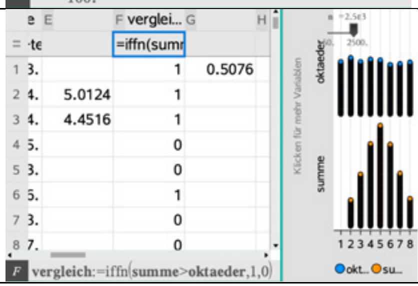
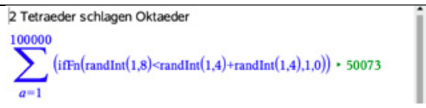
Aus der tabellarischen Aufstellung geht hervor, dass beide Argumente richtig sind. Allerdings ist die Verteilung bei zwei Tetraedern symmetrisch zur Summe 5, beim Oktaeder zur Mitte aus vier und fünf (also rechnerisch 4,5).
Aus dieser Argumentation ließe sich die Hypothese ableiten:
„Marie gewinnt häufiger, da sie durchschnittlich eine fünf würfelt, während Max durchschnittlich 4,5 Felder weiterkommt.“


© 2024 T³ Deutschland

**Aufgabe 3:**
Soll die Simulation dynamisch durchgeführt werden, bietet sich ein Schieberegler an. Als Maximum wurde hier mit 2500 gearbeitet. Bei der App für das iPad® muss manchmal auch 1000 als Obergrenze gewählt werden, im Handheld ggf. 500. Schüler*innen können anstelle des Schiebereglers eine feste Zahl wählen.




Varianten zur Simulation

<table>
<tr><td>Wir verwenden nun die Versuchsanzahl 100 und ermitteln, wann die Tetraeder den Oktaeder schlagen.<br>Es bestände die Möglichkeit, wie bei der Nutzung von Excel einen zeilenweisen Vergleich durchführen. Dazu benötigt man den Befehl „when().<br>Die relativen Zellbezüge müssen dann entsprechend der Versuchsanzahl bis zur Zeile 100 kopiert werden.</td><td></td></tr>
<tr><td>Danach muss man nur noch die Summe der Spalte E bilden und durch die Anzahl der Versuche teilen.<br>Man erhält hier eine relative Häufigkeit für den Gewinn des Tetraeders mit 51 %.</td><td></td></tr>
<tr><td>Einfacher lässt sich dies im Modul L&S mit dem Befehl iffn() realisieren.<br>Erläuterung zum Befehl iffn():<br>Hier vergleicht der Befehl elementweise die Listen „oktaeder“ und „summe“ und gibt den Wert 1 zurück, falls summe>oktaeder gilt, sonst wird 0 zurückgegeben.</td><td></td></tr>
<tr><td>Man kann aus dem Zufallsexperiment folgern, dass die „Tetraeder“ in 50 % der Fälle gewinnen. Da es auch den Fall der Gleichheit gibt, sind die Tetraeder die bessere Wahl.</td><td></td></tr>
<tr><td>Die Tabellenkalkulation erlaubt nur eine Zeilengröße von 2500. Um dies zu umgehen, könnte man z. B. das gleiche Problem auch in Notes lösen.</td><td></td></tr>
</table>

**Aufgabe 4*:**
Analog zur Datei kann der Beweis über die beiden Erwartungswerte geführt werden. Alle relevanten Wahrscheinlichkeiten sind in der Tabelle zu Aufgabe 2 schon angegeben:

Oktaeder: $E(X) = \frac{1}{8} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) = 4{,}5$
Tetraeder: $E(X) = \frac{1}{16} \cdot \left(2 + 8) + \frac{1}{8} \cdot (3 + 7) + \frac{3}{16} \cdot (4 + 6) + \frac{1}{4} \cdot 5\right) = 5$


© 2024 T³ Deutschland

### Beispiel 2: Mensch ärgere dich nicht

Die Wochenzeitschrift „Die Zeit“ führte 2013 und 2023 die sogenannte „Studie Bürgerkompetenz Rechnen“ durch. Die folgende Aufgabe erwies sich dabei als besonders problematisch.

**Aufgabe 25 im Test:** Beim Mensch- Ärgere-dich hat man drei Versuche um eine Sechs zu würfeln, wenn man rauskommen will. Die Wahrscheinlichkeit, mit diesen drei Versuchen eine Sechs zu würfeln ist…

kleiner $\frac{1}{2}$ gleich $\frac{1}{2}$ größer $\frac{1}{2}$

60 % der repräsentativen Stichprobe beantworteten die Frage im Jahr 2013 und 49 % im Jahr 2023 falsch.
Diese einfache Aufgabenstellung kann man natürlich auf bekannte Art und Weise lösen.
Klassisch stehen einem Schüler sicher mehrere Wege offen:
Baumdiagramm, Gegenereignis ... „Bauchgefühl“ ...

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^3 \qquad 0.4213$$

Aber vielleicht bietet ja gerade ein solch überschaubares Problem auch die Möglichkeit, den Blick auf einfache, vom Schüler beherrschbare Simulationen zu richten.

Aufgabe:
Entwerfen Sie verschiedene Simulationsideen und stellen Sie diese vor.

Mensch ärgere dich nicht

Lehrermaterial

Lösungshinweise

a)

„Halbautomatische Simulation“

Alle SuS der Klasse „werfen“ dreimal den digitalen Würfel mit dem Befehl *randint(1,6,3)* und entscheiden, ob man herauskommt oder nicht. Im Bild rechts ist zu erkennen, dass man dreimal herauskommt und zweimal nicht.
Die so ermittelten Daten aller SuS ergeben schnell einen Schätzwert.

| | |
|---|---|
| randInt(1,6,3) | {6,6,1} |
| randInt(1,6,3) | {4,3,5} |
| randInt(1,6,3) | {1,3,6} |
| randInt(1,6,3) | {2,5,6} |
| randInt(1,6,3) | {2,3,1} |

b) Nutzung der Tabellenkalkulation

Für jeden der drei Würfel wird eine Spalte erzeugt – hier mit 100 Würfen)

| | A w1 | B w2 | C w3 |
|---|---|---|---|
| = | =randint(1, | =randint(1, | =randint(1, |
| 1 | 3 | 2 | 5 |
| 2 | 3 | 1 | 1 |
| 3 | 3 | 5 | 6 |
| 4 | 4 | 2 | 3 |
| 5 | 4 | 4 | 2 |

A $w1:=\text{randint}(1,6,100)$

In einer weiteren Spalte werden mit Hilfe des *countif*-Befehls die Anzahl der gewürfelten Sechsen gezählt.

| w3 | D sechsen | E summe |
|---|---|---|
| andint(1, | | |
| 5 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 6 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 |

=countif({a1,b1,c1},?=6)

In der nächsten Spalte wird überprüft, ob mindestens eine Sechs vorliegt.

| | w3 | D sechsen | E summe |
|---|---|---|---|
| = | andint(1, | | |
| 1 | 5 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 6 | 1 | 1 |
| 4 | 3 | 0 | 0 |
| 5 | 2 | 0 | 0 |

E1 =when(d1>0,1,0)

Die relative Häufigkeit kann mit Hilfe der Spalte „summe“ dann einfach berechnet werden.

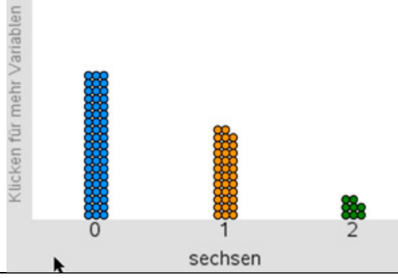
| | w3 | D sechsen | E summe | F |
|---|---|---|---|---|
| = | andint(1, | | | |
| 1 | 5 | 0 | 0 | 0.43 |
| 2 | 1 | 0 | 0 | |
| 3 | 6 | 1 | 1 | |
| 4 | 3 | 0 | 0 | |

F1 $=\frac{\text{sum(summe)}}{100.}$



© 2024 T³ Deutschland

Auch eine grafische Darstellung ist schnell erzeugt.




Variante unter Verwendung des *iffn()*-Befehls

Unter Verwendung des *iffn()*-Befehls lässt sich die Auswertung vereinfachen.

| | A wurf1 | B wurf2 | C wurf3 | D sechsen | E |
|---|---|---|---|---|---|
| = | =randint(1 | =randint(1 | =randint(1 | =iffn(wurf | |
| 1 | 5 | 4 | 5 | 0 | 0.43 |
| 2 | 2 | 1 | 4 | 0 | |
| 3 | 5 | 6 | 1 | 1 | |
| 4 | 4 | 2 | 4 | 0 | |
| 5 | 1 | 6 | 1 | 1 | |
| 6 | 3 | 4 | 4 | 0 | |
| 7 | 3 | 2 | 5 | 0 | |
| 8 | 6 | 1 | 3 | 1 | |

D sechsen:=iffn(wurf1=6 or wurf2=6 or wurf3=6,1,0)

c) Nutzung des Moduls *Notes*

Das Modul *Notese* rmöglicht es, wie schon beschrieben, mit größeren Versuchszahlen zu arbeiten. Dazu werden hier noch zwei kleine selbstgeschriebene Funktionen w bzw. w2 genutzt.

Die beiden Funktionen w und w2 sind abschnittsweise definiert und erlauben es, in Verbindung mit den Systembefehlen *max()* bzw. *countif()* die Simulation mit sehr großen Versuchszahlen durchzuführen.

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^3 \blacktriangleright 0.421296$$

$$\max(\mathrm{randInt}(1,6,3)) \blacktriangleright 6 \qquad w(x):=\begin{cases}0, & x<6\\ 1, & x=6\end{cases} \blacktriangleright \textit{Fertig}$$

$$\sum_{k=1}^{10000}\left(w(\max(\mathrm{randInt}(1,6,3)))\right) \blacktriangleright 4147$$

$$w2(x):=\begin{cases}0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases} \blacktriangleright \textit{Fertig}$$

$$\sum_{k=1}^{100000}\left(w2(\mathrm{countIf}(\mathrm{randInt}(1,6,3),?=6))\right) \blacktriangleright 42063$$

**Literaturhinweise:**

Auf den deutschsprachigen Webseiten von Texas Instruments (TI) education.ti.com/de
findet man unter der Rubrik „Downloads“ verschiedene Handbücher zum TI-Nspire CX II-T CAS™
z.B.
...

Alle im Text beschriebenen Programme, die TI Codes und viel mehr nützliche
Unterrichtsmaterialien finden Sie auf der TI Materialdatenbank unter
www.ti-unterrichtsmaterialien.net oder gehen Sie auf
https://resources.t3deutschland.de/t3deutsch-home/

Unter der Rubrik „Resources“ gibt es auch unzählige fremdsprachige Materialien.


© 2024 T³ Deutschland

# T³ Teachers Teaching with Technology

T³ DEUTSCHLAND

**Netzwerk**
Das T³ Lehrerfortbildungsnetzwerk richtet sich an Sie, an Lehrerinnen und Lehrer, die sich zum sinnvollen Einsatz digitaler Werkzeuge im MINT-Unterricht austauschen und weiterentwickeln wollen. T³ Deutschland ist Teil des internationalen T³ Netzwerks.

**Fortbildungen**
T³ Deutschland bietet Ihnen pädagogisch-didaktische Unterstützung in Form von schulinternen Fortbildungen, Online-Seminaren und Tagungen an.

**Materialien**
Aufgabenbeispiele, Tutorials, Videos und mehr nützliche Materialien für Ihren MINT-Unterricht stellen wir auf der Materialdatenbank kostenlos zur Verfügung.

**Der T³ EduBlog bietet exklusive Interviews, inspirierende Erfahrungsberichte und mehr**

## Informieren Sie sich. Machen Sie mit!

Nehmen Sie Kontakt zu uns auf unter:
**www.t3deutschland.de** I info@t3deutschland.de

Abonnieren Sie unseren Newsletter!

**T3 Europe**


© 2024 T³ Deutschland

# TI-Nspire™ CX CAS Technologie

Ob Handheld, Software (Win/Mac) oder Tablet (Win/iPad) - alle Produkte sind einzeln oder als integrierte Lösung einsetzbar. Passendes Zubehör unterstützt den fächerübergreifenden Einsatz in Mathematik, Informatik, Naturwissenschaft und Technik (MINT).

www.tinspirecas.de

## Praxisorientierte Unterrichtsmaterialien

Nützliche Aufgabenbeispiele für Ihren Unterricht, kostenlose Downloads und Hinweise auf Verlagspublikationen finden Sie auf der TI Materialdatenbank, auch ganz speziell zur TI-Nspire™ CX Technologie.

**Schauen Sie mal rein:**
TI Materialdatenbank: www.ti-unterrichtsmaterialien.net

- Nutzen Sie beispielsweise unser kostenloses Ausleihprogramm!
- Ausführliche Produkt- und Serviceinformationen sowie Bezugsquellen finden Sie auf unseren TI Webseiten education.ti.com/de
- Die TI Schulberater unterstützen Sie gerne bei allen Fragen rund um den Einsatz von TI Rechnern im Unterricht: schulberater-team@ti.com

Abonnieren Sie unseren Newsletter!

www.youtube.com/TIedtechDE

education.ti.deutschland

@TIEducationDE

www.t3deutschland.de

education.ti.com

T³ DEUTSCHLAND

Teachers Teaching with Technology™

Texas Instruments