

Helmut Springer

Wege zur „Bewegungsgleichung“

Vielen Schülern bereitet die Interpretation eines gegebenen Funktionsgraphen (Unterscheidung von Argument und Funktionswert usw.) große Schwierigkeiten. Damit stellt sich auch die Frage, wie klar die Bedeutung eines Zeit-Weg-Diagramms aus Schülersicht ist und wie weit eine „trockene“ Geradengleichung mit einer gleichförmigen Bewegung in Zusammenhang gebracht werden kann. Ist der TI-83 Plus verfügbar, bietet sich ein sehr anschaulicher Zugang.

Mathematische Vorkenntnisse: Kenntnis des Koordinatensystems

Erstellung eines Zeit-Weg-Diagramms (Statistikplot)

Beispiel: Der Regionalzug R 83 fährt von A-Hausen um 12:32 ab und erreicht das 120 km entfernte D-Burg um 13:52. Dazwischen hält er um 13:00 in B-Stadt (30km) und um 13:45 in C-Berg (115 km). Erstelle mit dem TI-83 Plus ein Zeit-Weg-Diagramm. Wählen Sie mit **[STAT], EDIT; 1:Edit...** den Modus zum Editieren der Listen.

Geben Sie in die Liste L₁ die Zeiten und in L₂ die Kilometerzahlen ein. Dabei kann etwa 13.52 als 13 + 52/60 eingegeben werden.

L1	L2	L3	1
12.533	0		-----
13	30		
13.75	115		
13.87	120		
-----	-----		
L1(4)=13+52/60			

Abb. 1

Wählen Sie mit **[WINDOW]** das Menü der Fenstereinstellungen und passen Sie diese an.

WINDOW
Xmin=12.5
Xmax=14
Xscl=.5
Ymin=0
Ymax=120
Yscl=50
Xres=1

Abb. 2

Aktivieren Sie unter **[2nd], STAT PLOT, 1: Plot 1...** die passende Statistik-Plot-Betriebsart.

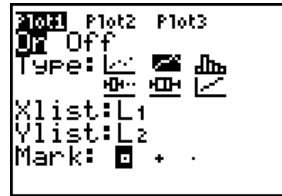


Abb. 3

Achten Sie darauf, dass im Funktionseditor (**[Y=]**) nur Plot1 aktiviert ist. Zeichnen Sie das Diagramm mittels Druck auf **[GRAPH]**.

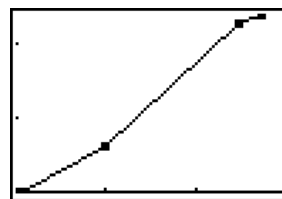


Abb. 4

Untersuchen Sie den Graphen mit Trace-Funktion (**[TRACE]**) und besprechen Sie die Bedeutung der Koordinaten. Warum sind manche Geradenstücke steiler als andere? Wie ist der Verlauf der Geradenstücke festgelegt? *Müssen* die Punkte durch Geraden verbunden sein? Welche Information kann den Geradenstücken entnommen werden?

Damit ist es nur ein kurzer Weg zur Erkenntnis, dass sich die Steigung der Geradenstücke als Quotient von Weg- und Zeitdifferenz ergibt, welche aber wiederum die mittlere Geschwindigkeit darstellt.

Man arbeitet also mit einem Modell, das auf der Beziehung $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ basiert. Mit $s = v \cdot t$ kann daher der

zurückgelegte Weg in Abhängigkeit von Geschwindigkeit und Zeit beschrieben werden. Dies soll im nächsten Schritt geschehen und mit dem Rechner dargestellt werden.

Von der Bewegung zur Geraden... (Parameterplot).

Beispiel: Der EN „C.F. Gauss“ verlässt den Startbahnhof „Am Koordinatenursprung“ um 0:00 und fährt auf der y-Achse 3 Stunden lang mit 60 km/h. Betrachten wir die y-Achse als Fahrstrecke des Zuges, so gilt für die x-Koordinate $x=0$, und für die y-Koordinate $y=60 \cdot t$. Die Darstellung $[x,y] = [0, 60 t]$ führt unmittelbar zur Parameterdarstellung:

Wählen Sie mit **[MODE]** die Systemeinstellungen, ändern Sie den Plot-Modus auf *Par* (vierte Zeile) und

aktivieren Sie das gleichzeitige Zeichnen von Funktionen mit der Wahl von *Simul* (sechste Zeile, alles ohne Abb.).

Geben Sie im Funktionseditor (**[Y=]**) die richtigen Koordinatenfunktionen ein und wählen Sie das Format des Plots laut Abbildung (mit den Pfeiltasten das Symbol ansteuern und mit **[ENTER]** ändern). Deaktivieren Sie sämtliche Statistikplots.

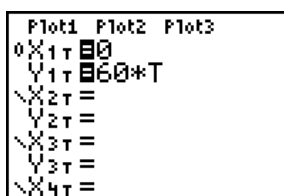


Abb. 5

Passen Sie nach einem Druck auf **[WINDOW]** die dortigen Einstellungen an. Der Bereich für T wird von 0 bis 3 (Stunden) gewählt (nicht auf der Abb.)

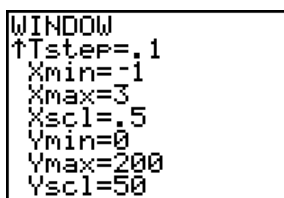


Abb. 6

Mittels **[GRAPH]** kann die (animierte) „Fahrt“ unseres Zuges beobachtet werden.

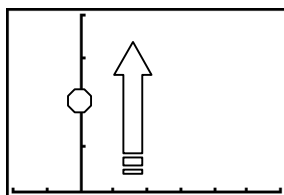


Abb. 7

Diskutieren Sie die rechnerische Verwertbarkeit dieser Darstellung. Lässt sich auch Information (Abfahrtszeit, Geschwindigkeit, Fahrdauer) gewinnen, wenn die Animation nicht läuft?

Tipp: Ein wirksames Vorgehen zum Wiederholen der Animation ist den Funktionseditor (**[Y=]**) zu wählen und eine Koordinatenfunktion mit sich selbst zu überschreiben. Bei der nachfolgenden Betätigung von **[GRAPH]** wird das Bild erneut animiert.

Ein sinnvolle „Idee“ ist es offensichtlich, auf der x-Achse „viele“ Zeitpunkte einzuzeichnen und in y-Richtung die zu diesen Zeitpunkten zurückgelegten Wegstrecken abzutragen. Für unseren Parameterplot lauten die Koordinatenfunktionen dann $[x,y] = [t, 60t]$. Ändern Sie die Einstellungen im Funktionseditor (

[Y=]) und ändern Sie auch das Format des Plots wie in der Abbildung.

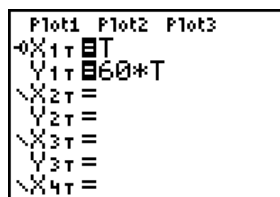


Abb. 8

Das Resultat (mittels **[GRAPH]**) erinnert ganz offensichtlich an das anfängliche Zeit-Weg-Diagramm. Verwenden Sie die Trace-Funktion, um zu zeigen, dass jedem Zeitpunkt eine Wegstrecke zugeordnet ist. Lassen Sie mit verschiedenen Geschwindigkeiten experimentieren.

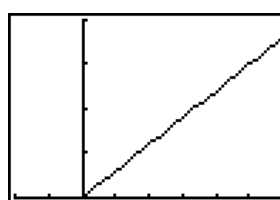


Abb. 9

Hier ist nun deutlich zu erkennen, dass die Gerade nicht die Fahrstrecke des Zuges ist – er fährt ja nach wie vor auf der y-Achse. Um dies zu veranschaulichen könnte man den „Zug“ selbst (Koordinatenfunktionen $[x,y] = [0,60t]$ gleichzeitig mit dem Zeit-Weg-Diagramm animieren.

Eine sinnvolle Erweiterungsmöglichkeit wäre die Parameterdarstellung des Bewegungsvorgangs des ersten Beispiels mithilfe stückweise definierter Funktionen.

Besprechen Sie, wann eine solche Gerade nicht durch den Koordinatenursprung geht und was es bedeutet, wenn sich zwei solche Geraden schneiden.

Beispiel: Der EN „C.F. Gauss“ verlässt den Startbahnhof um 0:00 mit 60 km/h. Der EN „G.W. Leibniz“ fährt um 60 min später mit einer Geschwindigkeit von 120 km/h ab. Wann ist er nur mehr 10 km vom anderen Zug entfernt?

Das bei Bewegungsaufgaben beliebte Einholen ergibt beim Rechnen mit Zügen wenig Sinn, sehr wohl ist aber die Frage nach jenen Abständen berechtigt, die von hintereinander fahrenden Zügen eingehalten werden müssen. Diese Aufgabe kann durch Einführung eines imaginären Hilfszuges gelöst werden, der stets 10 km hinter „C. F. Gauss“ fährt. Hat „G. W. Leibniz“ diesen Hilfszug eingeholt, befindet er sich nämlich genau 10 km hinter „C. F. Gauss“.

Die Herleitung der richtigen Koordinatenfunktionen gibt sicher Anlass zur Diskussion, wobei hier programmgemäß der Zusammenhang zwischen Zeit und Weg im Vordergrund steht.

Hier ist es anschaulich, die zwei beteiligten echten Züge zuerst auf der y-Achse fahren zu lassen, indem die y-Koordinatenfunktionen auf null gesetzt werden und die entsprechende Plotoption eingestellt wird (siehe Beispiel 2). Auch hier ist anzumerken, dass der gefragte Zeitpunkt nicht aus der Animation ermittelt werden kann!

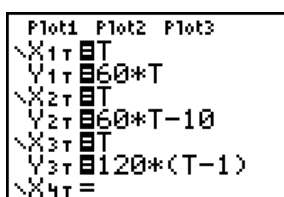


Abb. 10

Wird danach das Zeit-Weg-Diagramm gezeichnet, kann mittels Trace-Funktion näherungsweise der Schnittpunkt der beiden (richtigen) Geraden ermittelt werden. Aus der Bedingung $60 \cdot T - 10 = 120 \cdot (T - 1)$ kann der Zeitpunkt auch berechnet werden.

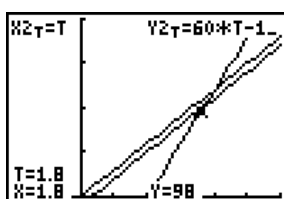


Abb. 11

... und zur Geradengleichung (Funktionsplot, Gleichungssysteme).

Komfortabler kann mit der bekannten Darstellung einer Geraden gerechnet werden, die sich sofort aus den Koordinatenfunktionen bestimmen lässt:

G. W. Leibniz: $[x,y] = [t, 120(t-1)] \Rightarrow y = 120(x-1) \Rightarrow y = 120x - 120$

Nach einer Untersuchung der Gleichung (z.B. $x = 0$ setzen) könnten Ergebnisse der bisherigen Tätigkeiten folgendermaßen lauten:

Gleichförmige Bewegungen lassen sich in der Form $y = kx + d$ beschreiben, dabei ist k die Geschwindigkeit, x die Zeit und d der zurückgelegte Weg um 0:00. Da dies die Darstellung einer Geraden ist, ist ein gleichförmiger Bewegungsvorgang etwa durch zwei Paare der Form (Zeit, Ort) eindeutig festgelegt.

Beispiel: Der ICE „J. Bernoulli“ hat um 13:30 bereits 100 km zurückgelegt, um 14:00 ist er bei 160 km angekommen. Wie lautet die Bewegungsgleichung?

Mit diesen Wertepaaren ist das Ansetzen eines Gleichungssystems in zwei Variablen für k und d möglich, das danach mit dem TI 83 gelöst werden könnte.

Dies erscheint mir für das Erlangen eines Verständnisses jedoch nicht sinnvoll. Verständnisorientierter ist die Berechnung von

$$k = \bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta v} = \frac{60}{0,5} = 120 \text{ und der anschließenden Be-}$$

rechnung von $d = -1520$ durch Einsetzen von k und des Wertepaares $(13,5, 100)$ in die allgemeine Geradengleichung $y = kx + d$.

Auch das mit der Parameterdarstellung im Grafikfenster nur näherungsweise gelöste Beispiel führt auf ein Gleichungssystem mit zwei Variablen. Beim händischen Rechnen führt hier wohl nur das Gleichsetzen der Wege zu einem verständnisorientierten Zugang. Ergänzend können die Funktionen in der expliziten Darstellung gezeichnet und der Schnittpunkt mittels **[2nd], CALC, 5: intersect** bestimmt werden.

Ändern Sie in den Systemeinstellungen (**[MODE]**) den Plot-Modus auf *Func* (vierte Zeile) und geben Sie die Funktionen im Funktionseditor (**[Y=]**) ein.

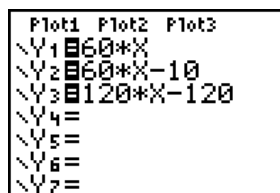


Abb. 12

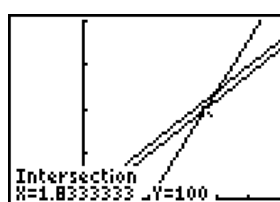


Abb. 13

Der Autor:
Mag. Helmut Springer
helmutspringer@aon.at