Dynamische Geometrie mit der TI-Nspire-Technologie
Die Zissoide des Diokles, die Kardioide und die Astroide

Wolfgang Häfner

Die Idee zu diesem Beitrag entwickelte ich, als ich mich wieder einmal mit einigen Seiten in Clifford Pickovers Werk „Das Mathebuch" beschäftigte, das ich sehr empfehlen kann.

„Clifford Pickover, produktiver Autor und universell gebildet, hat ein wunderbares Nachschlagewerk zusammengestellt. Die 250 kurzen Einträge machen es zu einem veritablen Band über die Geschichte der Mathematik, indem ihre bedeutendsten Lehrsätze und deren geniale Schöpfer präsentiert werden."

Martin Gardner

In der Schule könnte das Thema für die Begabtenförderung, in mathematischen Arbeitsgemeinschaften, für Haus- und Projektarbeiten interessant sein.

Da die drei ebenen Kurven punktweise über Lageveränderung geometrischer Objekte definiert werden können, bieten sich die Möglichkeiten der dynamischen Geometrie für eine eingehendere Beschäftigung mit diesen geradezu an.

Hinweis: Die Zitate in diesem Beitrag sind sämtlich aus dem oben genannten Buch.

Die Zissoide des Diokles

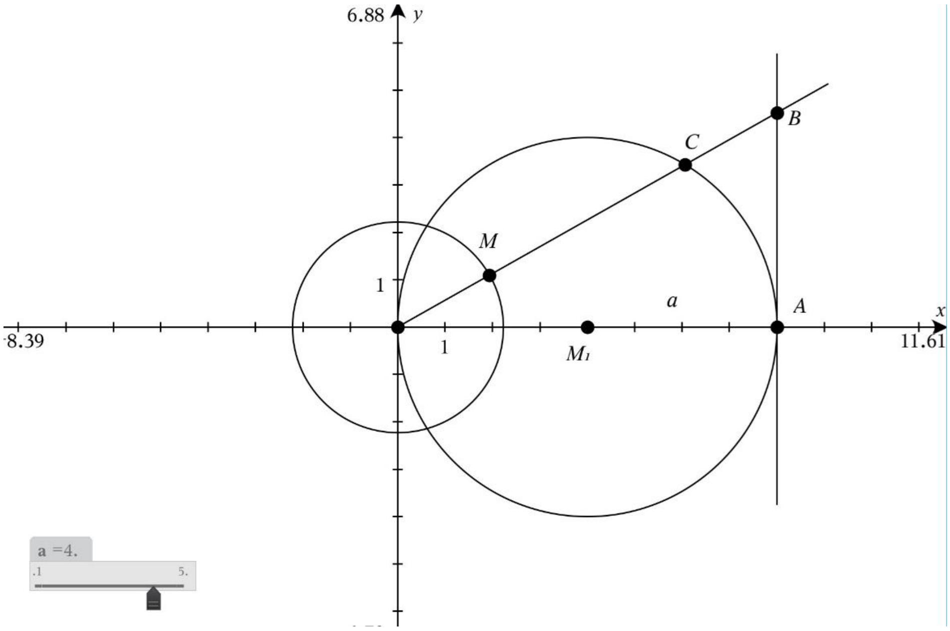
„Der griechische Mathematiker Diokles hat die nach ihm benannte Zissoide etwa 180 v. Chr. entdeckt bei der Nutzung ihrer bemerkenswerten Eigenschaften für eine Würfelverdopplung."

„Der Graph der Kurve strebt in beide Richtungen der y-Achse gegen unendlich und hat eine einzige Spitze. Die von der Spitze ausgehenden Zweige der Kurve nähern sich der gleichen senkrechten Asymptote an. Wenn wir nun einen Kreis zeichnen, der die Spitze im Punkt O schneidet und der tangential zur Asymptote ist, dann kann die Verbindungslinie von O und einem Punkt M auf der Zissoide verlängert werden, bis sie die Asymptote im Punkt B schneidet.
Die Länge der Strecke von C bis B entspricht dabei stets der Länge zwischen O und M."
Anmerkung: Der Abbildung im Buch entnimmt man, dass C Schnittpunkt der Geraden mit dem Kreis und O der Koordinatenursprung ist.

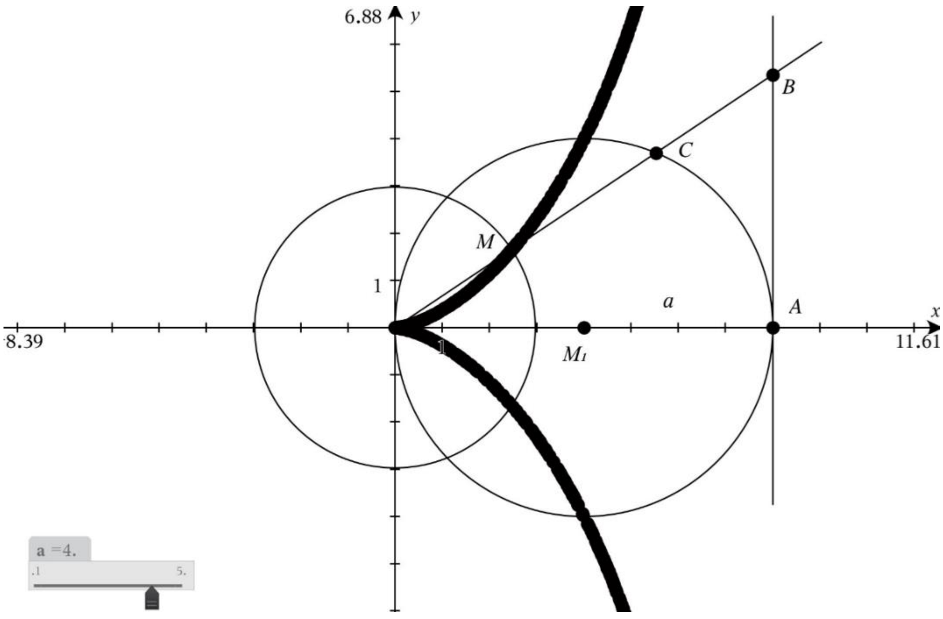
„Ausdrücken lässt sich die Kurve in Polarkoordinaten mit $r = 2a \cdot (sec(\theta) - cos(\theta))$ *oder aber in Rechteckkoordinaten als* $y^2 = x^3/(2a - x)$*."*

Konstruktionsbeschreibung (Vorschlag):
Die im Zitat beschriebene Eigenschaft der Zissoide kann natürlich auch zu ihrer Konstruktion genutzt werden.
Die Arbeit erfolgt in der Applikation Graphs.
Zuerst erzeugt man einen Schieberegler für die Variable a mit beispielsweise folgenden Einstellungen:
Anfangswert: 4
Minimum:0.1
Maximum: 5
Schrittweite: 0.001

Danach erstellt man über ‚Punkt nach Koordinaten' den Punkt $M_1(a|0)$.
(Die Beschriftung kann gelöscht werden.)
Dann konstruiert man einen Kreis mit dem Mittelpunkt M_1 und dem Radius a.
Auf dem Kreis wird ein Punkt C festgelegt und außerdem werden die Schnittpunkte des Kreises mit der x-Achse erzeugt.
Nun erstellt man einen Strahl, der im Koordinatenursprung beginnt und durch C geht.
Im Schnittpunkt $A(2a|0)$ wird die Senkrechte auf der x-Achse errichtet.
Danach erstellt man den Schnittpunkt B des Strahls mit der Senkrechten.
Mit ‚Zirkel' konstruiert man nun den Kreis mit dem Koordinatenursprung als Mittelpunkt und dem Radius $\overline{CB}$.
Man erstellt danach den Schnittpunkt M dieses Kreises mit dem Strahl.



Jetzt kann man die Geometriespur (‚Spur', ‚Geometriespur') des Punktes M erzeugen, indem man Punkt C bewegt.



Nach dem Löschen der Geometriespur sollte man die entsprechende Ortskurve erzeugen.
Die so konstruierte Kurve ist die Zissoide des Diokles.
Für diese ergeben sich folgende Gleichungen:
in kartesischen Koordinaten:

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$$

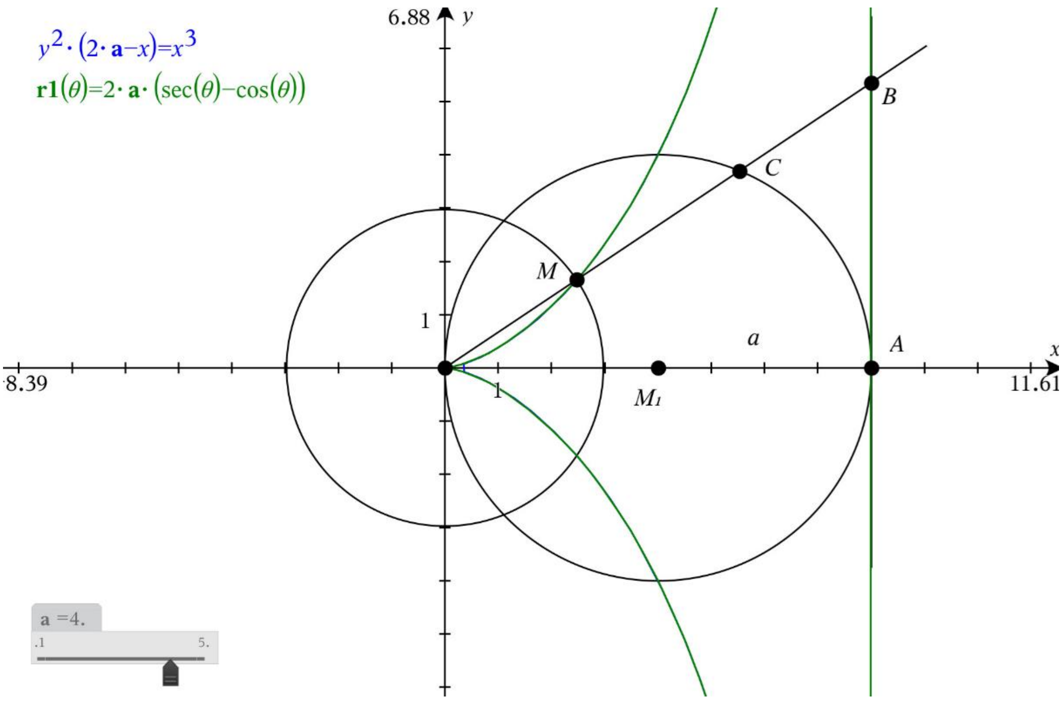
in Polarkoordinaten:

$$r = 2a \cdot \frac{\sin^2(\theta)}{\cos(\theta)} = 2a \sin(\theta) \cdot \tan(\theta)$$

$$r = 2a \cdot \frac{1 - \cos^2(\theta)}{\cos(\theta)} = 2a \cdot \left(\frac{1}{\cos(\theta)} - \cos(\theta)\right) = 2a \cdot (\sec(\theta) - \cos(\theta))$$

Herleitungen: siehe Anhang

Die Zissoide kann dann auch noch, am besten nach dem Ausblenden der Ortskurve, mit Hilfe der Gleichungen gezeichnet werden. Dabei ist für die Graph-Einstellung ‚Relation' bzw. ‚Polar' zu wählen. Man muss die Relation in der Form $y^2 \cdot (2a - x) = x^3$ eingeben.



Die Zissoide und die Gerade mit der Gleichung $y = 2 \cdot (2a - x)$ schneiden sich im I. Quadranten des Koordinatensystems im Punkt R (siehe nächstes Bild).
Die Gerade mit der Gleichung $x = a$ schneidet $\overline{OR}$ im Punkt P und die x-Achse im Punkt L.
Ist a die Länge einer Würfelkante, dann ist $|\overline{PL}| = \sqrt[3]{2} \cdot a$ die Länge einer Würfelkante eines Würfels mit doppeltem Volumen.

Beweis:

$I)\ y = 2 \cdot (2a - x) \quad \Rightarrow 2a - x = \frac{y}{2}$

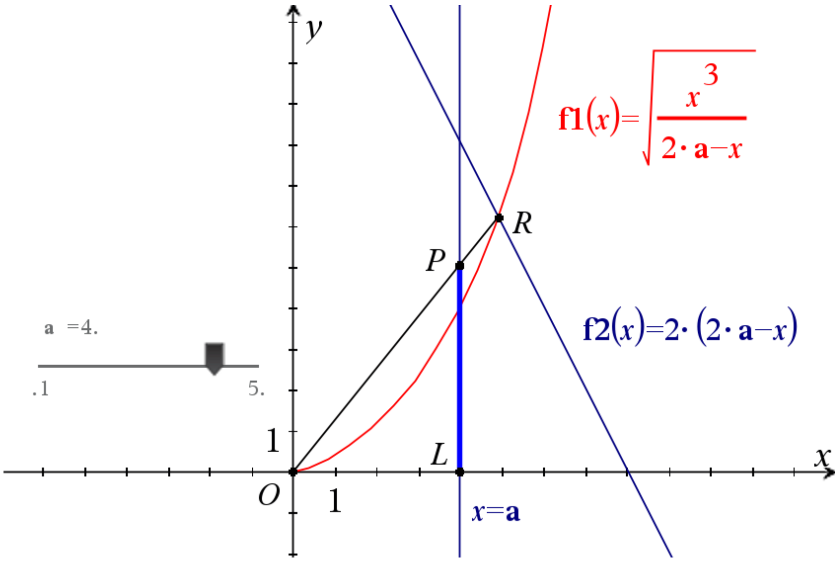
$II)\ y^2 \cdot (2a - x) = x^3 \quad Gleichung\ der\ Zissoide$

$I) \curvearrowright II) \quad y^2 \cdot \frac{y}{2} = x^3$

$y^3 = 2x^3$

$y = \sqrt[3]{2} \cdot x$

Mit $x = a$ erhält man dann also $y = |\overline{PL}| = \sqrt[3]{2} \cdot a$

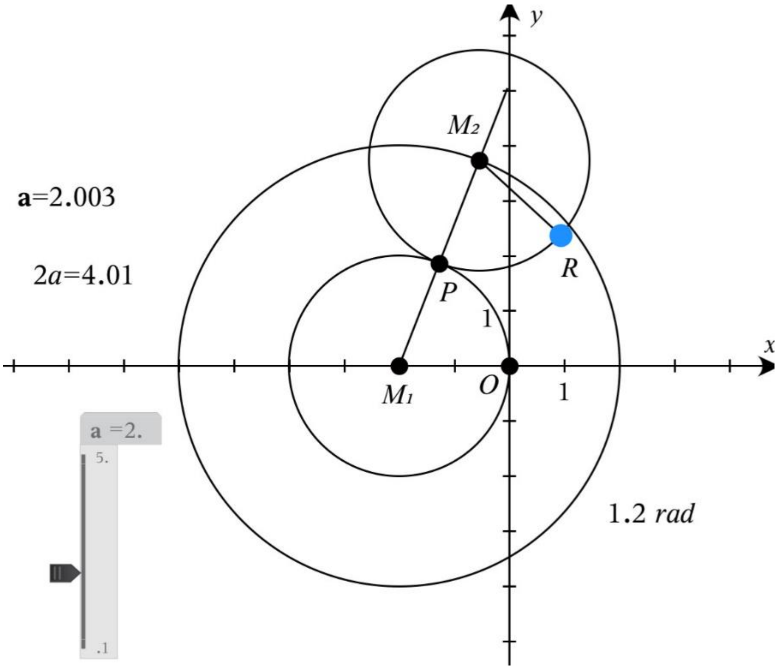


Die Kardioide

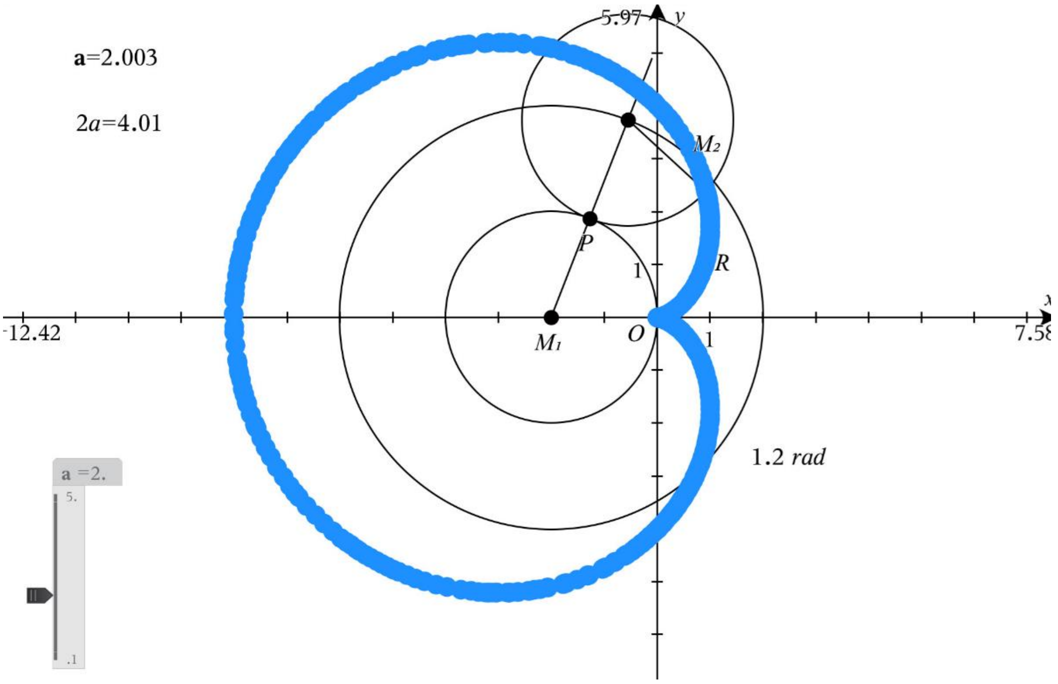
„Die Kurve kann einfach erzeugt werden, indem man einem Punkt auf einem Kreis folgt, während er auf einem anderen festen Kreis mit dem gleichen Radius abrollt. Der Name ist vom griechischen Wort für Herz abgeleitet und die Polargleichung lautet $r = 2a(1 - cos(\theta))$. "

Konstruktionsbeschreibung (Vorschlag):
Die Arbeit erfolgt in der Applikation Graphs. Zuerst erzeugt man einen Schieberegler für die Variable a mit beispielsweise folgenden Einstellungen:
Anfangswert: 2
Minimum: 0.1
Maximum: 5
Schrittweite: 0.001
Vertikal
Danach erstellt man über ‚Punkt nach Koordinaten' die Punkt $M_1(-a|0)$ und $O(0|0)$.
(Die Beschriftungen können gelöscht werden.)
Der Text ‚2a' wird eingegeben und der Wert dieses Terms berechnet.
Anmerkung:
Bei Nutzung der iPad-App ist dieser Vorgang etwas umständlicher, weshalb ich hier etwas ausführlicher erkläre. Man muss hier eine beliebige Zahl als Text eingeben und diese mit der Schiebereglervariable a verknüpfen. Anstelle der eingegebenen Zahl erscheint ‚a=' und der aktuelle Wert von a. Diesen Wert muss man für die Berechnung des Terms wählen.

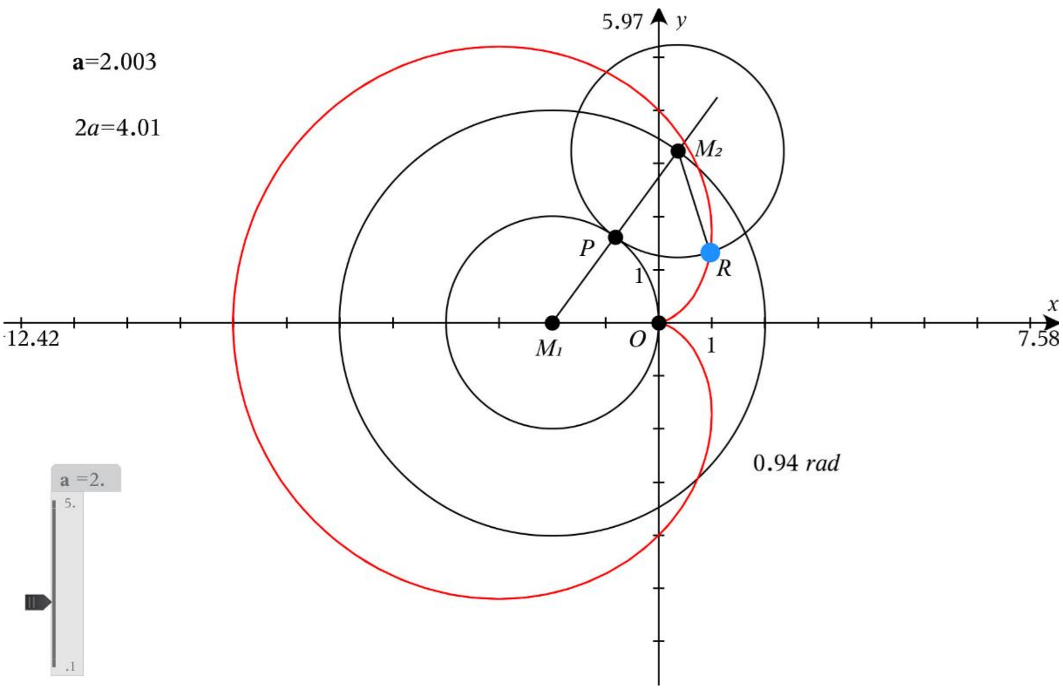
Die Kreise k_1 und k_2 mit dem Mittelpunkt M_1 und den Radien a und 2a werden konstruiert. Auf dem Kreis k_2 wird ein Punkt M_2 erzeugt, der Mittelpunkt eines weiteren Kreises wird.
Man erzeugt einen Strahl, der in M_1 beginnt und durch M_2 geht.
Nun muss man den Schnittpunkt P des Strahls mit Kreis k_1 erstellen. Der Kreis k_3 mit Mittelpunkt M_2 geht durch P. Dieser Kreis wird nun gezeichnet. Danach erfolgt die Messung des gerichteten Winkels $\sphericalangle(OM_1P)$. (Der zugehörige Kreisbogen kann ausgeblendet werden.)
Der Punkt P wird um M_2 mit dem Drehwinkel $\sphericalangle(OM_1P)$ gedreht. Das Ergebnis der Drehung ist Punkt R. Man wählt Blau als Farbe des Punktes und macht ihn etwas größer.
Nun ist noch die Strecke M_2R zu zeichnen.



Jetzt kann man die Geometriespur des Punktes R erzeugen, indem man Punkt M_2 bewegt.

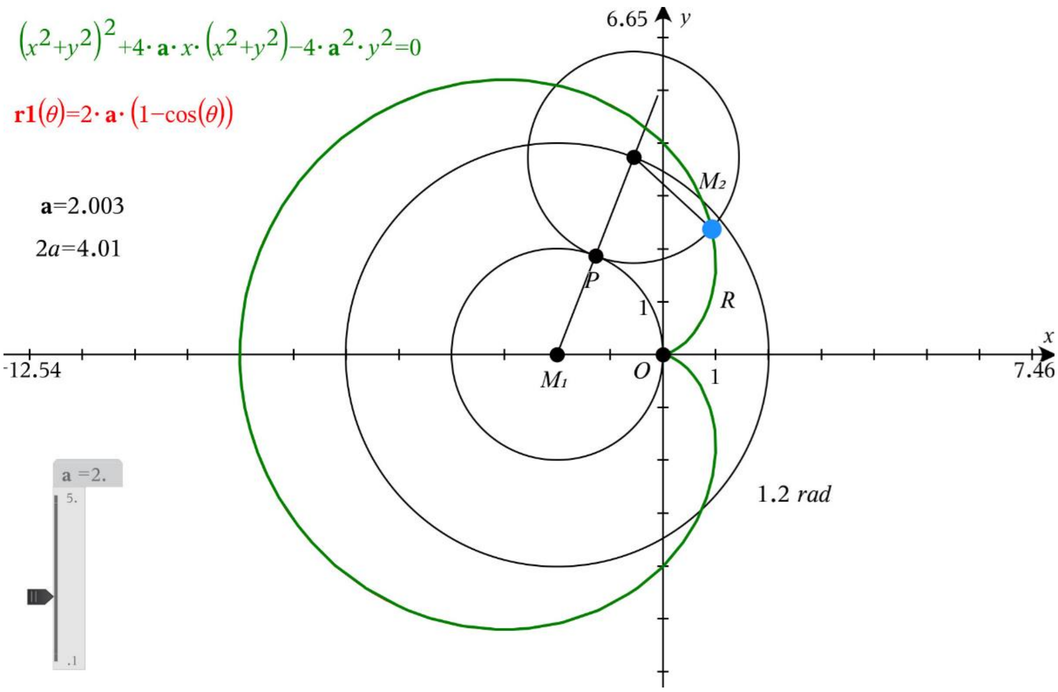


Nach dem Löschen der Geometriespur sollte man die entsprechende Ortskurve erzeugen.



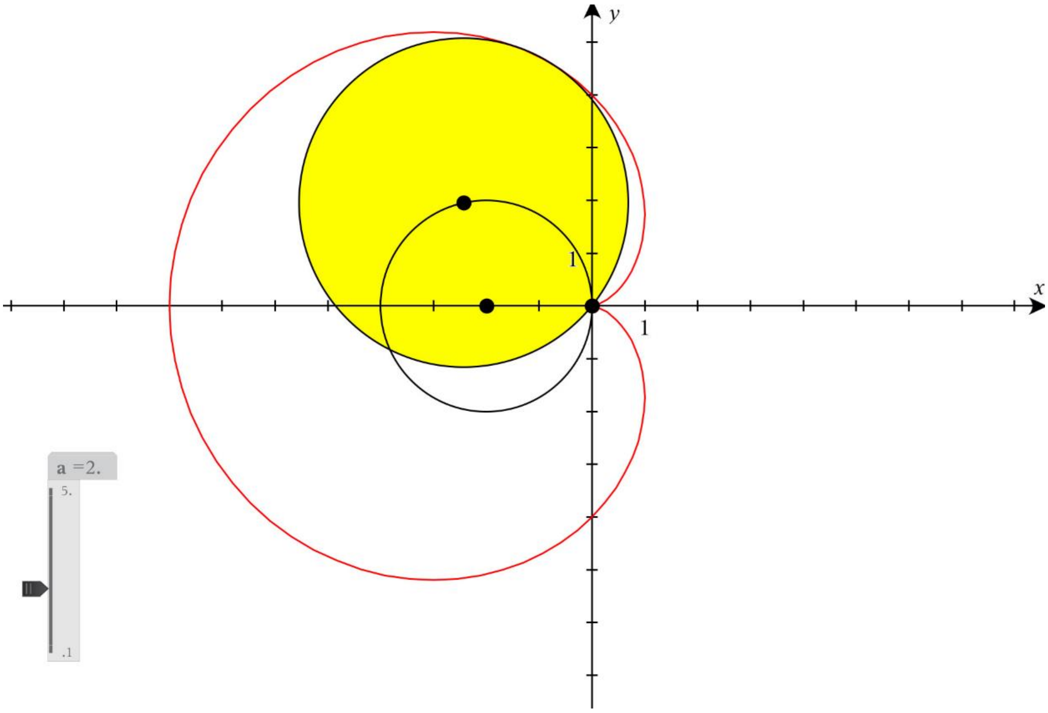
Die so konstruierte Kurve ist die Kardioide.
Für diese ergeben sich folgende Gleichungen:
in Polarkoordinaten:
$r = 2a(1 - \cos(\theta))$
in kartesischen Koordinaten:
$(x^2 + y^2)^2 + 4ax(x^2 + y^2) - 4a^2y^2 = 0$
Herleitungen siehe Anhang

Die Kardioide kann dann ebenfalls, am besten nach dem Ausblenden der Ortskurve, mit Hilfe der Gleichungen gezeichnet werden.

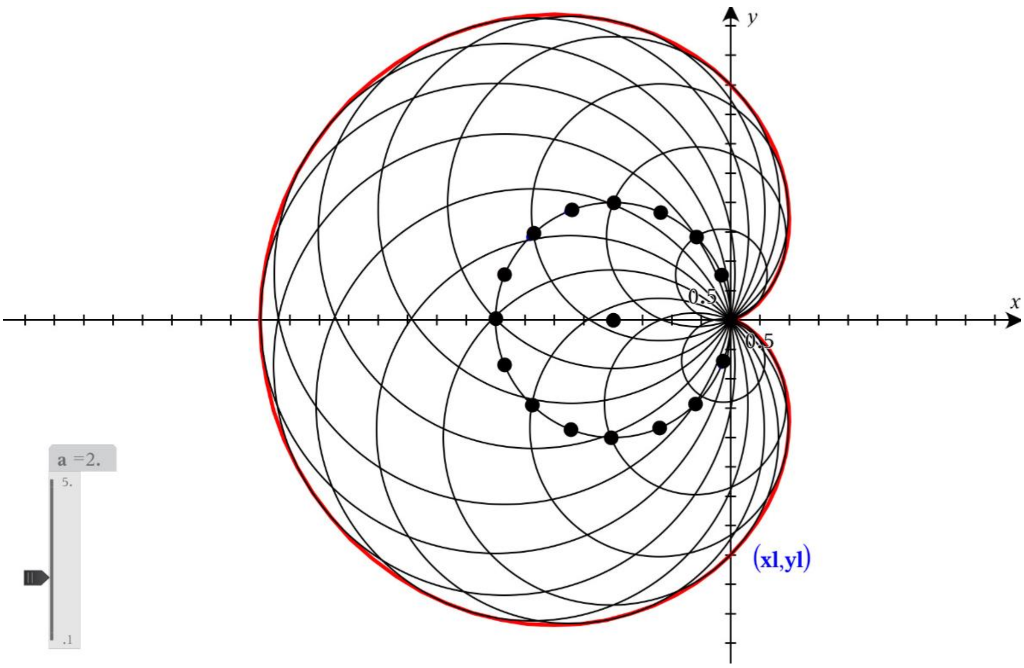


Ohne rechnerischen Nachweis, sei hier noch auf folgenden Zusammenhang verwiesen.
Man erhält die Kardioide auch als Hüllkurve aller Kreise, deren Mittelpunkte auf k_1 liegen und die durch den Koordinatenursprung gehen.

Die Konstruktion ist im Vergleich zu den bisherigen relativ einfach. Die Kardioide wird allerdings vorgegeben.



Man muss hier den Punkt auf k_1 bewegen, um den Zusammenhang zu erkennen.



Die Listen xl und yl enthalten die Mittelpunktskoordinaten der in der Konstruktion verwendeten 15 Kreise.

$$\mathbf{xl}:=\mathrm{seq}\left(\mathbf{a}\cdot\cos\left(\frac{i\cdot\pi}{8}\right)-\mathbf{a},i,1,15\right)$$

$$\blacktriangleright\left\{\sqrt{\sqrt{2}+2}-2,\sqrt{2}-2,\sqrt{2-\sqrt{2}}-2,-2,-\sqrt{2-\sqrt{2}}-2,-\sqrt{2}-2,-\sqrt{\sqrt{2}+2}-2,-4,-\sqrt{\sqrt{2}+2}-2,-\sqrt{2}-2,-\sqrt{2-\sqrt{2}}-2,\right.$$

$$\mathbf{yl}:=\mathrm{seq}\left(\mathbf{a}\cdot\sin\left(\frac{i\cdot\pi}{8}\right),i,1,15\right)$$

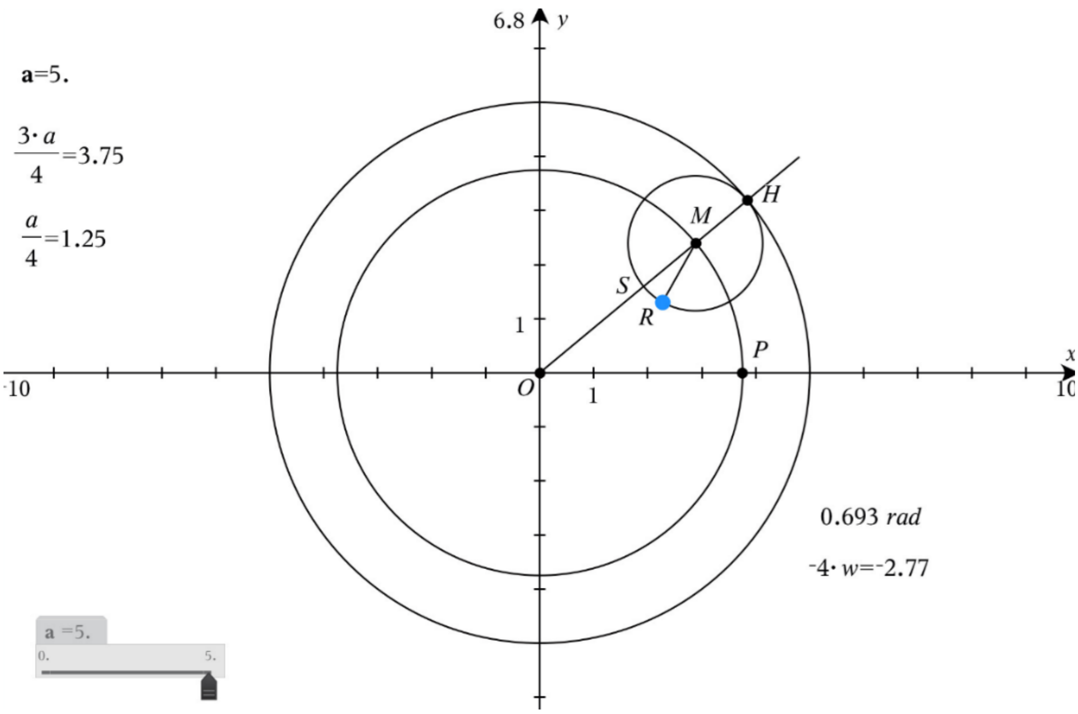
$$\blacktriangleright\left\{\sqrt{2-\sqrt{2}},\sqrt{2},\sqrt{\sqrt{2}+2},2,\sqrt{\sqrt{2}+2},\sqrt{2},\sqrt{2-\sqrt{2}},0,-\sqrt{2-\sqrt{2}},-\sqrt{2},-\sqrt{\sqrt{2}+2},-2,-\sqrt{\sqrt{2}+2},-\sqrt{2},-\sqrt{2-\sqrt{2}}\right\}$$

Die Astroide

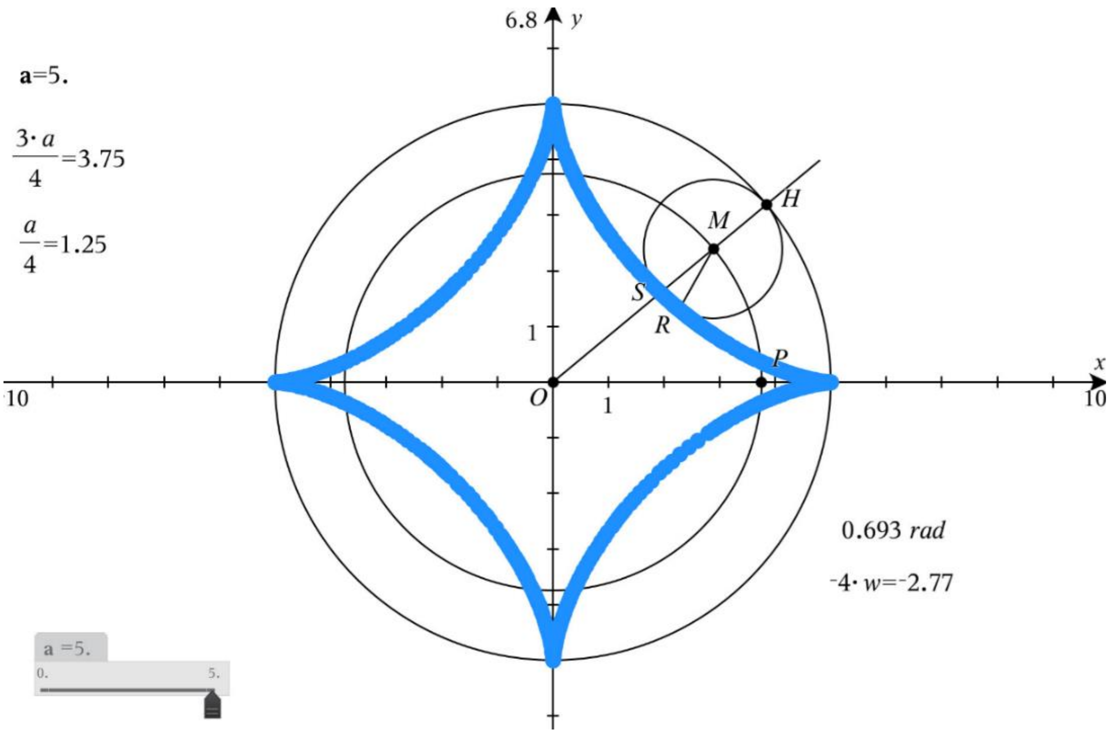
„Eine Astroide ist eine Kurve mit vier Spitzen, die entsteht, wenn ein Kreispunkt wie ein Zahnrad in einem größeren Kreis abrollt. Der größere Kreis hat den vierfachen Durchmesser des kleineren Kreises."
„Die Astroide hat die Gleichung $x^{2/3}+y^{2/3}=R^{2/3}$ wobei R der Radius des ruhenden äußeren Kreises ist und R/4 der Radius des inneren abrollenden Kreises."

Anmerkung: In den weiteren Ausführungen wird in Anlehnung an die bisherigen Bezeichnungen R durch a ersetzt.

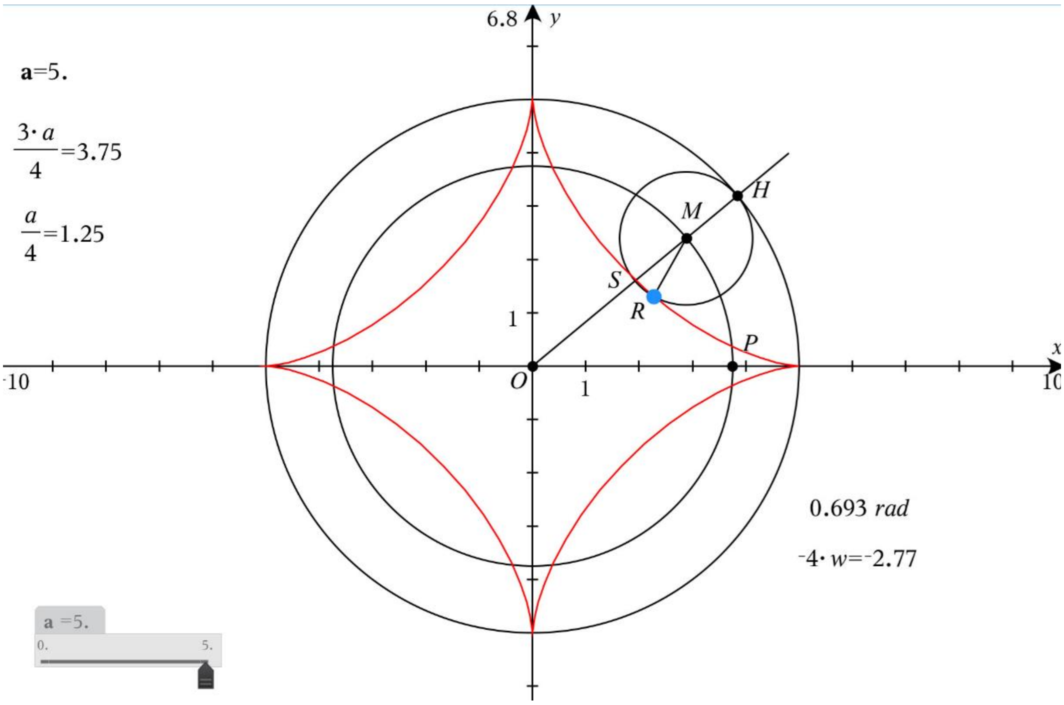
Konstruktionsbeschreibung (Vorschlag):
Zuerst erzeugt man einen Schieberegler für die Variable a, beispielsweis mit folgenden Einstellungen:
Anfangswert: 4
Minimum: 0
Maximum:5
Schrittweite: 0.001
Die Texte $\frac{3a}{4}$ und $\frac{a}{4}$ sind einzugeben und die zugehörigen Termwerte zu berechnen.
Mit ‚Zirkel' wird der Kreis k_1 konstruiert. Dieser hat den Koordinatenursprung als Mittelpunkt und den Radius a. Der Kreis k_2 mit dem gleichen Mittelpunkt und dem Radius $\frac{3a}{4}$ wird ebenfalls mit ‚Zirkel' erstellt.
Danach wird auf k_2 ein Punkt M gezeichnet. Wiederum mit ‚Zirkel' wird ein dritter Kreis k_3 mit dem Mittelpunkt M und dem Radius $\frac{a}{4}$ konstruiert.
Danach zeichnet man einen Strahl vom Koordinatenursprung durch M.
Man ermittelt nun die Schnittpunkte S und H des Strahls mit Kreis k_3.
Der Schnittpunkt S innerhalb von k_2 kann ausgeblendet werden.
Der Punkt $P\left(\frac{3a}{4}|0\right)$ wird gezeichnet und der gerichtete Winkel $\sphericalangle(POM)$ gemessen.
(Der eventuell eingeblendete Bogen kann ausgeblendet werden.)
Der Text $'-4\cdot w'$ wird eingefügt und der zugehörige Termwert berechnet, wobei w der Größe des Winkels $\sphericalangle(POM)$ entspricht.
Der Punkt H wird um den Winkel $-4w$ und das Drehzentrum M gedreht. Das Ergebnis ist der Punkt R. Man wählt Blau als Farbe des Punktes und macht ihn etwas größer.
Dann zeichnet man die Strecke $\overline{MR}$.



Jetzt kann man die Geometriespur des Punktes R erzeugen, indem man Punkt M bewegt.



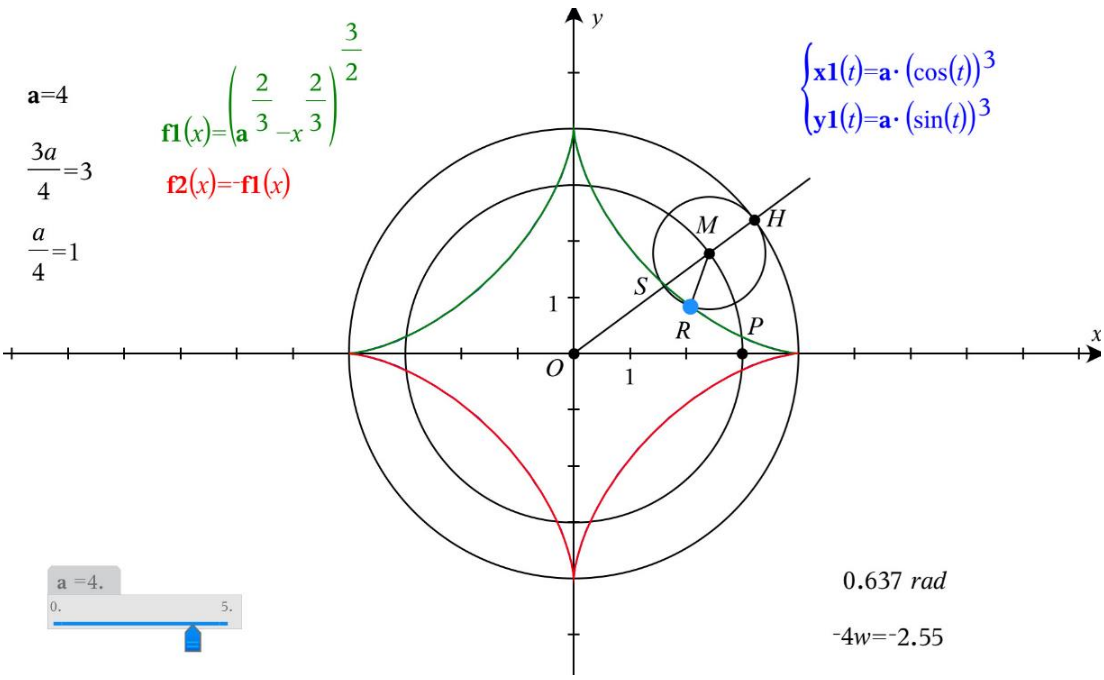
Nach dem Löschen der Geometriespur sollte man die entsprechende Ortskurve erzeugen.



Die so konstruierte Kurve ist die Astroide..

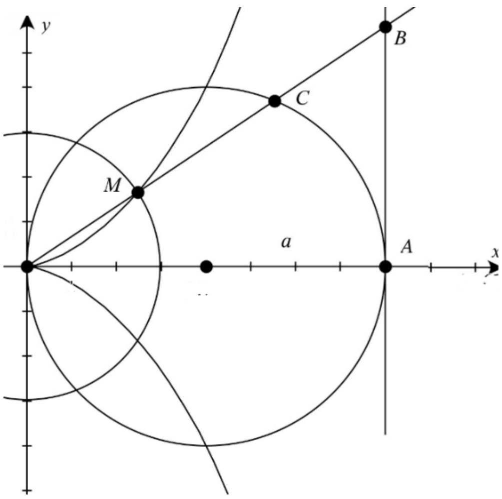
Für die Astroide ergeben sich folgende Gleichungen:
Pametergleichungen:
$x = a \cdot \cos^3 t; \qquad y = a \cdot \sin^3 t$
in kartesischen Koordinaten:
$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$
aus zwei Funktionen zusammengefügt:
$f_1(x) = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$
$f_2(x) = -f_1(x)$
Herleitungen siehe Anhang

Zuletzt zeichnen wir die Astroide, nachdem ihre Ortskurve gelöscht wurde, mit Hilfe der Parameter- bzw. Funktionsgleichungen.
Dabei ist für die Graph-Einstellung ‚Funktion' bzw. ‚Parametrisch' zu wählen.



Anlagen

Herleitung der Gleichungen für die Zissoide des Diokles



Kreisradius a

Kreisgleichung: $(x-a)^2+y^2=a^2$

Strahl: $y=m\cdot x$

$C(x_1|y_1)$: $(x_1-a)^2+m^2{x_1}^2=a^2$

$${x_1}^2-2a\cdot x_1+a^2+m^2{x_1}^2=a^2$$

$${x_1}^2\cdot(1+m^2)=2a\cdot x_1 \quad | \ :x_1 \ (x_1\neq 0)$$

$$x_1\cdot(1+m^2)=2a$$

$$x_1=\frac{2a}{1+m^2}$$

$B(x_2|y_2)$: $x_2=2a$

$M(x|y),(0<x<2a)$: $x=x_2-x_1=2a-\dfrac{2a}{1+m^2}=2a\cdot\left(1-\dfrac{1}{1+m^2}\right)=2a\cdot\dfrac{m^2}{1+m^2}$

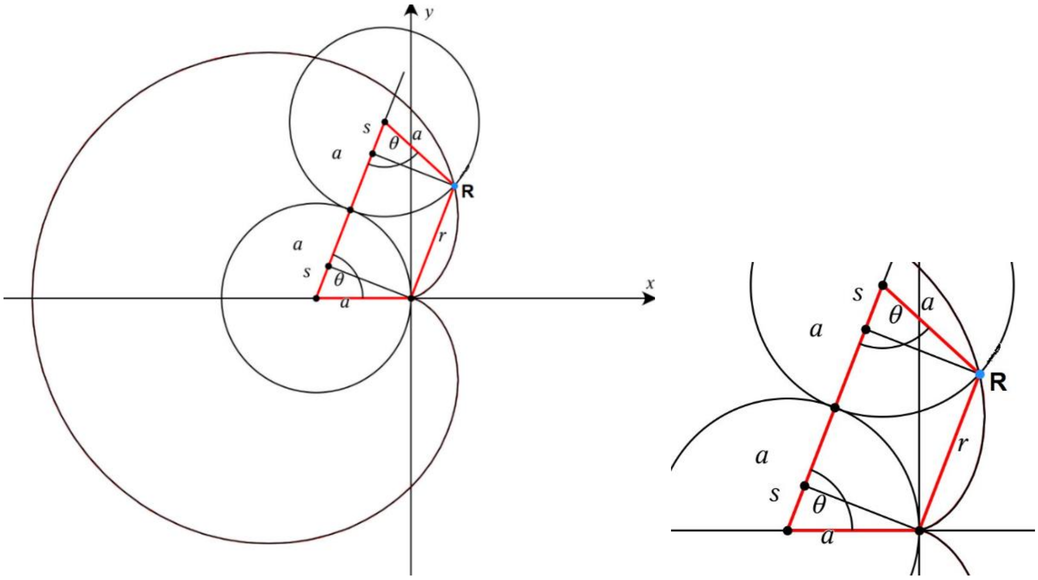
$$x = 2a \cdot \frac{\frac{y^2}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}}$$
$$x \cdot \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) = \frac{2a \cdot y^2}{x^2}$$
$$x^3 \cdot \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) = 2a \cdot y^2$$
$$x^3 + y^2 \cdot x = 2a \cdot y^2$$
$$x^3 = y^2 \cdot (2a - x)$$
$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$$
Für $x = 0$ gilt $y^2 = \frac{0^3}{2a-0} = 0$.

oder in Polarkoordinaten:
Für $-\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ gilt
$$1 + m^2 = 1 + \tan^2(\theta) = 1 + \frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} = \frac{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} = \frac{1}{\cos^2(\theta)}$$
$$\frac{m^2}{1 + m^2} = \tan^2(\theta) \cdot \cos^2(\theta) = \frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} \cdot \cos^2(\theta) = \sin^2(\theta)$$
$$x = r \cdot cos(\theta) = 2a \cdot \frac{m^2}{1 + m^2} = 2a \cdot \sin^2(\theta)$$
$$r = 2a \cdot \frac{\sin^2(\theta)}{cos(\theta)}$$

Für $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ ist $2a \cdot \frac{\sin^2(\theta)}{cos(\theta)}$ nicht definiert. Wenn $a > 0$ und $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3}{2}\pi$ gilt, so ergeben sich für r keine positiven Werte.

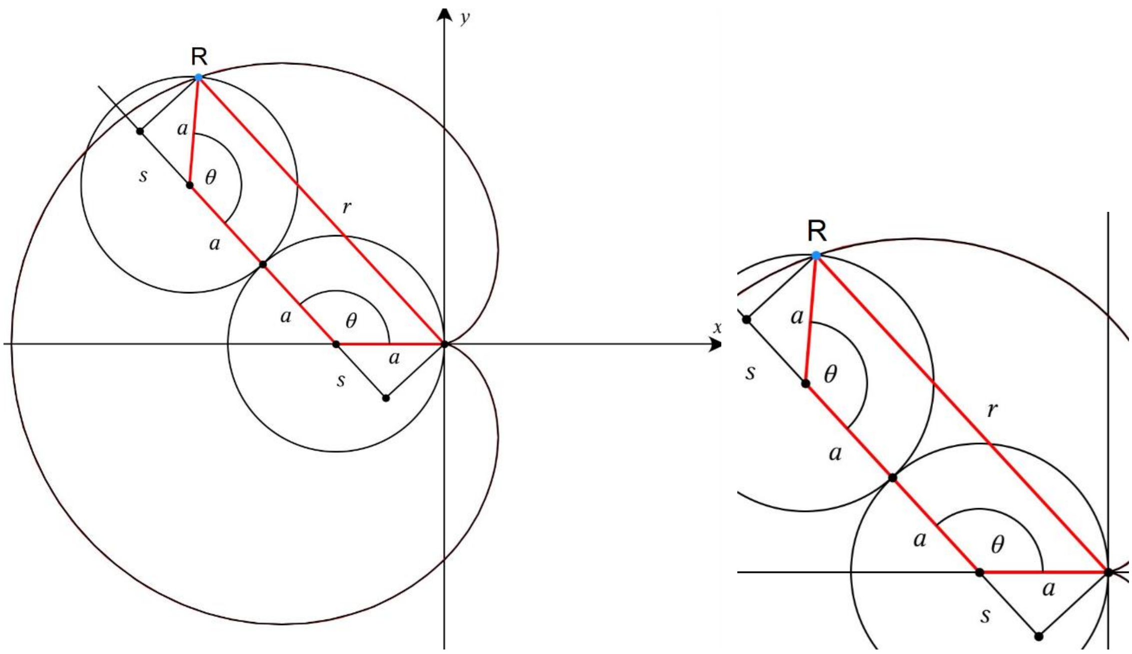
Man erkennt weiterhin, dass die Gerade mit der Gleichung $x = 2a$ Asymptote der Zissoide ist.
$$\lim_{x \to 2a} \frac{x^3}{2a - x} = \infty$$

Herleitung der Gleichungen für die Kardioide



Offensichtlich ist das rote Viereck ein gleichschenkliges Trapez, was sich aus den Maßen und der Konstruktion ergibt.
Daher gilt:
$r = 2a - 2s = 2a - 2 \cdot a \cdot \cos(\theta) = 2a \cdot (1 - \cos(\theta))$

Bei einem Drehwinkel $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ergibt sich folgendes Bild:

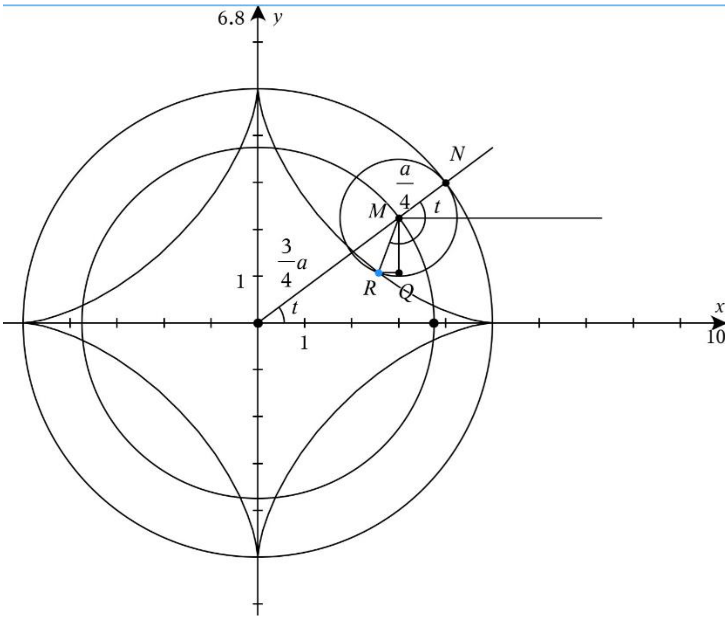


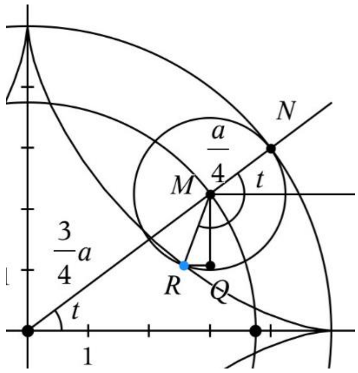
$r = 2a + 2s = 2a + 2 \cdot a \cdot \cos(\pi - \theta)$
$r = 2a + 2a \cdot (-\cos(\theta)) = 2a \cdot (1 - \cos(\theta))$ (Gleichung in Polarkoordinaten)
Für $\theta = 0$ erhält man $\mathrm{r} = 0$ und $r = 4a$, wenn $\theta = \pi$ ist, also die richtigen Werte.
Für $\pi < \theta < 2\pi$ erhält man $r = 2a \cdot (1 - \cos(\theta))$ durch analoge Überlegungen.
Damit ist $r = 2a \cdot (1 - \cos(\theta))$ die Gleichung der Kardioide in Polarkoordinaten.

Ist $R(x|y)$ ein Punkt auf der Kardioide so gilt:
$\cos(\theta) = \frac{x}{r}$ und $r^2 = x^2 + y^2$

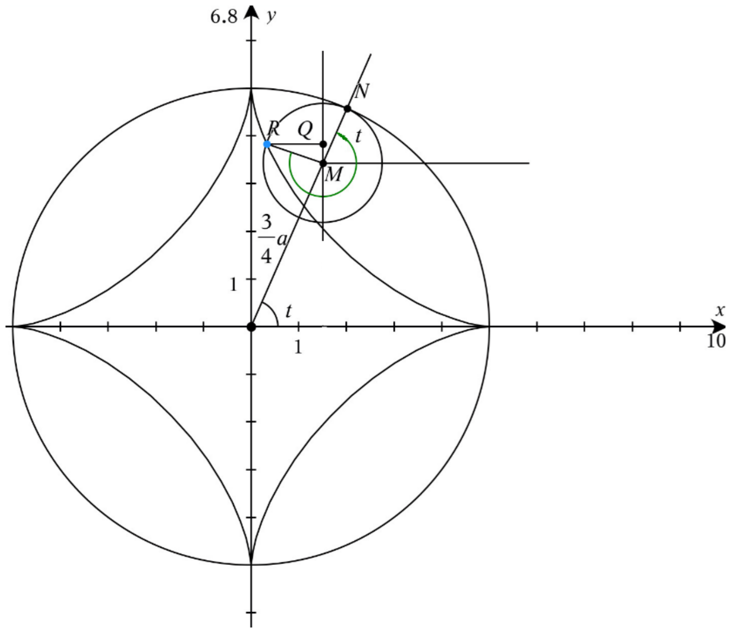
$r = 2a(1 - \cos(\theta)) = 2a - 2a \cdot \cos(\theta)$
$r = 2a - 2a \cdot \frac{x}{r}$
$r^2 = 2a \cdot r - 2a \cdot x$
$r^2 + 2ax = 2ar$
$r^4 + 4axr^2 + 4a^2x^2 = 4a^2r^2$
$(r^2)^2 + 4axr^2 - 4a^2 \cdot (r^2 - x^2) = 0$
$(x^2 + y^2)^2 + 4ax(x^2 + y^2) - 4a^2y^2 = 0$

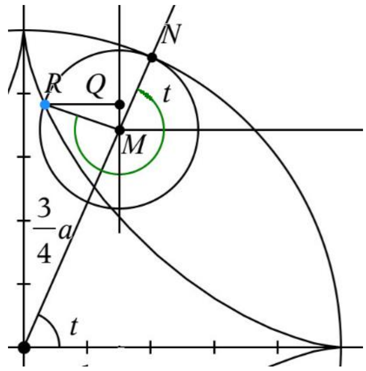
Herleitung der Gleichungen für die Astroide





$\sphericalangle(QRM) = \alpha, \qquad \sphericalangle(RMQ) = \beta, \qquad \sphericalangle(RMN) = 4t$
$\beta = 4t - t - \frac{\pi}{2} = 3t - \frac{\pi}{2}, \qquad \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta = \frac{\pi}{2} - \left(3t - \frac{\pi}{2}\right) = \pi - 3t$
$\overline{RQ} = \frac{a}{4} \cdot cos(\pi - 3t) = -\frac{a}{4} \cdot \cos(3t), \qquad \overline{QM} = \frac{a}{4} \cdot sin(\pi - 3t) = \frac{a}{4} sin(3t)$
$x_R = x_M - \overline{RQ} = \frac{3}{4} a \cdot \cos(t) + \frac{a}{4} \cdot \cos(3t); \qquad y_R = y_M - \overline{QM} = \frac{3}{4} a \cdot \sin(t) - \frac{a}{4}\ sin(3t)$





$\sphericalangle(QRM) = \alpha, \qquad \sphericalangle(RMQ) = \beta, \qquad \sphericalangle(RMN) = 4t$

$\pi - \beta = 4t - t - \frac{\pi}{2} = 3t - \frac{\pi}{2}$

$\beta = \frac{3}{2}\pi - 3t, \qquad \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{3}{2}\pi - 3t\right) = 3t - \pi$

$\overline{RQ} = \frac{a}{4} \cdot cos(3t - \pi) = -\frac{a}{4} \cdot \cos(3t)$

$\overline{QM} = \frac{a}{4} \cdot sin(3t - \pi) = -\frac{a}{4} sin(3t)$

$x_R = x_M - \overline{RQ} = \frac{3}{4} a \cdot \cos(t) + \frac{a}{4} \cdot \cos(3t)\,; \qquad y_R = y_M + \overline{QM} = \frac{3}{4} a \cdot \sin(t) - \frac{a}{4}\ sin(3t)$

Aufgrund des symmetrischen Ablaufs genügt es, die Fälle für den ersten Quadranten zu betrachten.
Für das Dreifache eines Winkels gelten für den Sinus und den Kosinus folgende Formeln.
$\sin(3t) = 3\sin(t) - 4\sin^3(t) \quad , \qquad \cos(3t) = 4 \cdot \cos^3(t) - 3\cos(t)$

Also gilt:

$x_R = \frac{3}{4} a \cdot \cos(t) + \frac{a}{4} \cdot (4\cos^3(t) - 3\cos(t)) = \frac{3}{4} a \cdot \cos(t) + a \cdot \cos^3(t) - \frac{3}{4} a \cdot \cos(t)$

$x_R = a \cdot \cos^3(t)$

$y_R = \frac{3}{4} a \cdot \sin(t) - \frac{a}{4} \cdot (3\sin(t) - 4 \cdot \sin^3(t)) = \frac{3}{4} a \cdot \sin(t) - \frac{3}{4} a \cdot \sin(t) + a \cdot \sin^3(t)$

$y_R = a \cdot \sin^3(t)$

$R(a \cdot \cos^3(t) \ | \ a \cdot \sin^3(t))$

Daraus folgt für $R(x \mid y)$:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \cdot \cos^2(t) + a^{\frac{2}{3}} \cdot \sin^2(t) = a^{\frac{2}{3}} \cdot (\cos^2(t) + \sin^2(t))$$

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

$$y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}$$

$$y^2 = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3$$

$$f_1(x) = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad f_2(x) = -f_1(x)$$

Quellen:

1.
Clifford A. Pickover
„Das Mathebuch
Von Pythagoras bis in die 57. Dimension
250 Meilensteine in der Geschichte der Mathematik“,
Librero Verlag

2. Stephanie Katharina Schwab, Johannes-Gutenberg-Universität Mainz
„Ausgewählte höhere Kurven“, (WS 2016/17 im Rahmen des Seminars)
https://download.uni-mainz.de/mathematik/Algebraische%20Geometrie/Lehre/Sem-Ausgewaehlte-hoehere-Kurven-WS2016-17/Schwab%20Stephanie_Die%20Rosette%20die%20Astroide_011216.pdf

3. https://de.wikipedia.org/wiki/Kardioide

4. https://de.wikipedia.org/wiki/Astroide

5. https://de.wikipedia.org/wiki/W%C3%BCrfelverdoppelung#Vorgehensweise_3