Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

CAS-Aufgaben für das Fach Mathematik

CAS-Aufgaben für das Fach Mathematik

Die schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik wird in zwei Teilen durchgeführt.

Im Prüfungsteil A ist eine Verwendung von Hilfsmitteln nicht vorgesehen, im Prüfungsteil B dürfen Hilfsmittel verwendet werden. Beide Prüfungsteile enthalten Aufgaben zu jedem der Sachgebiete Analysis, Analytische Geometrie/Lineare Algebra und Stochastik.

Der Prüfungsteil A besteht aus mehreren kurzen, nicht zusammenhängenden Aufgaben.
Für den Prüfungsteil B sind umfangreichere Aufgaben vorgesehen, für deren Bearbeitung u. a. als digitales Hilfsmittel ein Computeralgebrasystem (CAS) vorgesehen ist.

Grundlegendes Anforderungsniveau

Die insgesamt zu erreichenden 100 Bewertungseinheiten verteilen sich folgendermaßen auf die beiden Prüfungsteile und die drei Sachgebiete:

Sachgebiet	**Prüfungsteil A ohne Hilfsmittel**	**Prüfungsteil B mit Hilfsmitteln**
Analysis	20	40
Stochastik		20
Analytische Geometrie/ Lineare Algebra		20

Für den Prüfungsteil A ist eine Arbeitszeit von insgesamt 45 Minuten, für den Prüfungsteil B von insgesamt 180 Minuten vorgesehen.

Erhöhtes Anforderungsniveau

Die insgesamt zu erreichenden 120 Bewertungseinheiten verteilen sich folgendermaßen auf die beiden Prüfungsteile und die drei Sachgebiete:

Sachgebiet	**Prüfungsteil A ohne Hilfsmittel**	**Prüfungsteil B mit Hilfsmitteln**
Analysis	20	50
Stochastik		25
Analytische Geometrie/ Lineare Algebra		25

Für den Prüfungsteil A ist eine Arbeitszeit von insgesamt 45 Minuten, für den Prüfungsteil B von insgesamt 225 Minuten vorgesehen.

In der Vereinbarung der Länder wird die Funktionalität des zugelassenen CAS beschrieben:

Es wird vorausgesetzt, dass das CAS über Funktionen u. a verfügt eigens zum

- Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen (jeweils algebraisch),
- Differenzieren und Integrieren (jeweils algebraisch),
- Rechnen mit Vektoren und Matrizen (jeweils algebraisch),
- Berechnen von einzelnen und kumulierten Werten der Binomialverteilung sowie von Werten der Normalverteilung,
- Durchführen von Berechnungen in Tabellen,
- Darstellen von Graphen.

Außerdem wird vorausgesetzt, dass das CAS vor seiner Verwendung in einen Zustand versetzt wird, in dem ein Zugriff auf Dateien und Programme, die nicht zum Lieferumfang oder zu einem Systemupdate gehören, unterbunden ist.

Der CAS-Taschenrechner

TI-Nspire CX II-T CAS™

erfüllt alle diese Bedingungen.

In den folgenden Lösungen der Musteraufgaben für den Prüfungsteil B ist angegeben, wie die verschiedenen Funktionalitäten des TI-Nspire CX II-T genutzt werden können.

Analysis - Grundlegendes Anforderungsniveau

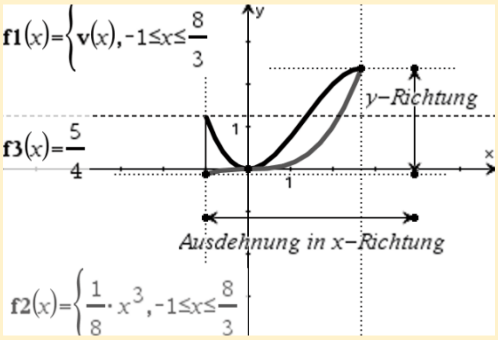
Analysis - Beispiel 1 (grundlegendes Anforderungsniveau)[1]

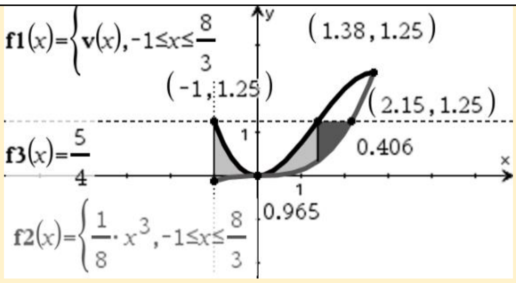
1	
a (3 BE)	
Lösung	Es ist nachzuweisen, dass die Zahlen x = 0 und x = $\frac{8}{3}$ die einzigen Lösungen der Gleichung sind, die man durch Gleichsetzen der beiden Funktionsgleichungen u(x) und v(x) erhält, und dass beide Funktionen an diesen Stellen die gleichen Funktionswerte v(0) = u(0) = 0 bzw. $u\left(\frac{8}{3}\right) = v\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{64}{27}$ haben. Die Rechnungen mit dem CAS bestätigen diese Fakten: $u(x):=\frac{1}{8}\cdot x^3 : v(x):=\frac{1}{4}\cdot x^2\cdot(4-x)$ *Fertig* $\text{solve}(u(x)=v(x),x)$ $x=0 \text{ or } x=\frac{8}{3}$ $u(0)$ 0 $v(0)$ 0 $u\left(\frac{8}{3}\right)$ $\frac{64}{27}$ $v\left(\frac{8}{3}\right)$ $\frac{64}{27}$

b (3 BE)	
Lösung	Die notwendige Bedingung für lokale Extrempunkte ist mit der Existenz von Nullstellen der 1. Ableitungsfunktion v'(x) erfüllt. Es gilt $v'(x) = -\frac{x}{4}\cdot(3x-8)$. Die Nullstellen von v'(x) sind $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{8}{3}$. Damit ist bestätigt, dass $Q\left(\frac{8}{3}; \frac{64}{27}\right)$ ein Extrempunkt von u ist. (Der Funktionswert von Q wurde bereits in Teilaufgabe a berechnet.) Das Vorzeichen der 2. Ableitung von u an der Stelle $x_2 = \frac{8}{3}$ gibt

[1] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2020/abitur/pools2020/mathematik/grundlegend/2020_M_grundlege_15.pdf

	Auskunft über die Art des Extremums. Es ist $v''(x) = 2 - \frac{3}{2}x$ und $v''\left(\frac{8}{3}\right) =-2 < 0$. Es handelt sich bei Q also um ein lokales Maximum der Funktion v. $\frac{d}{dx}(v(x))$ $\frac{-x\cdot(3\cdot x-8)}{4}$ $\text{solve}\left(\frac{-x\cdot(3\cdot x-8)}{4}=0,x\right)$ $x=0 \text{ or } x=\frac{8}{3}$ $\frac{d^2}{dx^2}(v(x))$ $2-\frac{3\cdot x}{2}$ $2-\frac{3\cdot x}{2}\|x=0$ 2 $2-\frac{3\cdot x}{2}\|x=\frac{8}{3}$ -2
c (4 BE)	
Lösung	**Aussage I:** Um die Steigungen der Funktionen u und v im Intervall $0 < x < \frac{8}{3}$ zu vergleichen, müssen die 1. Ableitungsfunktionen von u und v gebildet und miteinander verglichen werden. In Teilaufgabe b wurde $v'(x) =-\frac{x}{4}\cdot(3x-8)$ ermittelt. Die 1. Ableitung von $u(x) = \frac{1}{8}x^3$ kann im Kopf bestimmt werden zu $u'(x) = \frac{3}{8}x^2$. Wir prüfen, ob die Aussage $v'(x) > u'(x)$ für $0 < x < \frac{8}{3}$ richtig ist. $\text{solve}\left(\frac{-x\cdot(3\cdot x-8)}{4}>\frac{3}{8}\cdot x^2,x\right)\|0<x<\frac{8}{3}$ $0<x<\frac{16}{9}$ $\frac{8}{3}>\frac{16}{9}$ true Diese Ungleichung gilt nur für $0 < x < \frac{16}{9}$. Wegen $\frac{16}{9} < \frac{8}{3}$ ist die Aussage falsch. **Aussage 2:** Wenn sich die Graphen von u und v im Punkt P berühren, dann müssen dort, also an der Stelle x = 0, die Funktionswerte und die Anstiege übereinstimmen. Die Übereinstimmung der Funktionswerte wurde in Teilaufgabe a nachgewiesen. Wegen $v'(x) =-\frac{x}{4}\cdot(3x-8)$ und

	$u'(x) = \frac{3}{8}x^2$ gilt $v'(0) = u'(0) = 0$, also stimmen auch die Anstiege überein. Damit ist der Nachweis der Berührung der Graphen von u und v an der Stelle x = 0 erbracht.
d (5 BE)	
Lösung	Zunächst wird die linke Schnittstelle der oberen Funktion v mit der Geraden $y = \frac{5}{4}$ bestimmt. $\text{solve}\left(v(x)=\frac{5}{4},x\right)$ $x=-1.$ or $x=1.38197$ or $x=3.61803$ Von den drei Lösungen kommt nur x = -1 in Frage, weil es die einzige links vom Ursprung liegende Schnittstelle ist.  Die Ausdehnung in y-Richtung ergibt sich aus der Differenz der Funktionswerte an den Grenzen des Intervalls $-1 \le x \le \frac{8}{3}$ zu: $v\left(\frac{8}{3}\right) - u(-1) = \frac{64}{27} - \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{539}{216} \approx 2{,}50\ LE$ Die Ausdehnung in x-Richtung ergibt sich aus der Differenz der Grenzen des Intervalls $-1 \le x \le \frac{8}{3}$ zu: $\frac{8}{3} - (-1) = \frac{11}{3} \approx 3{,}67\ LE.$
e (6 BE)	
Lösung	**Hinweis:** Der Operator „Bestimmen Sie …“ erlaubt auch eine Lösung mithilfe der grafischen Darstellung.



Es ist zu erkennen, dass sich die graue Fläche in zwei Teilflächen zerlegen lässt, von denen die eine von den Graphen von v(x) und u(x) und die andere durch die Graphen von $y = \frac{5}{4}$ und u(x) begrenzt wird.
Mit dem Werkzeug *Geometry – Punkte&Geraden – Schnittpunkt(e)* werden zunächst die Grenzen der Teilflächen bestimmt. Man erhält die Schnittpunkte (-1| 1,25), (1,38| 1,25) und (2,15| 1,25).
Mit dem Werkzeug *Graph analysieren – Begrenzter Bereich* kann die Teilfläche zwischen u(x) und v(x) im Bereich $-1 \leq x \leq 1{,}38$ mit dem Näherungswert $A_1 \approx 0{,}965\ FE$ ermittelt werden. Analog ergibt sich für die Teilfläche zwischen $y = \frac{5}{4}$ und u(x) im Intervall $1{,}38 \leq x \leq 2{,}15$ der Flächeninhalt $A_2 \approx 0{,}406\ FE$. In der Summe sind das $A_1 + A_2 \approx 1{,}371\ FE$.
Auch eine rechnerische Lösung ist möglich, wie die folgenden Screenshots zeigen.
Berechnung der Integrationsgrenzen:

$$\text{solve}\left(v(x)=\frac{5}{4},x\right) \qquad x=-1. \text{ or } x=1.38197 \text{ or } x=3.61803$$

$$\text{solve}\left(\frac{1}{8}\cdot x^3=\frac{5}{4},x\right) \qquad x=2.15443$$

Berechnung der Flächeninhalte:

$$\int_{-1}^{1.382}\left(v(x)-\frac{1}{8}\cdot x^3\right)dx \qquad 0.964939$$

$$\int_{1.382}^{2.154}\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{8}\cdot x^3\right)dx \qquad 0.406276$$

$$0.965+0.406 \qquad 1.371$$

f (2 BE)	
Lösung	Bestimmung des Wendepunktes von $u_k(x)$:

$u(k,x):=\frac{1}{8}\cdot k\cdot x^3$ Fertig

$\frac{d^2}{dx^2}(u(k,x))$ $\frac{3\cdot k\cdot x}{4}$

$\frac{d^3}{dx^3}(u(k,x))$ $\frac{3\cdot k}{4}$

Die notwendige Bedingung $u_k''(x) = 0$ ist für x = 0 erfüllt.
Für k > 0 ist die 3. Ableitung immer positiv, also ungleich null. Somit ist auch die hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt erfüllt.
Die Gleichung der Wendetangente an der Stelle x = 0 an den Graphen von $u_k(x)$ lässt sich ebenfalls mit dem CAS bestimmen. Die Tangente ist eine Gerade und hat eine Gleichung der Form $y = t(x) = m \cdot x + n$ mit der 1. Ableitung $t'(x) = m$. Am Berührpunkt W(0|0) von Tangente und Funktionsgraph stimmen die 1. Ableitungen und die Funktionswerte überein.

Dies führt zu dem Gleichungssystem
(1) $m \cdot 0 + n = 0$ und
(2) $m = \frac{3}{8} \cdot k \cdot 0^2$.
Dessen Lösung ist m = n = 0, also lautet die Tangentengleichung y = 0.
Diese Gleichung beschreibt die x-Achse.

$\text{solve}\left(\begin{cases} m\cdot 0+n=0 \\ m=\frac{3}{8}\cdot a\cdot 0^2 \end{cases},\{m,n\}\right)$ $m=0 \text{ and } n=0$

Hinweise:
(1) Weil auf dem CAS-Rechner die Variable k bereits verwendet wurde und somit belegt ist, wird bei obiger Rechnung die Variable a verwendet.
(2) Der TI-Nspire CX CAS verfügt auch intern über einen Befehl zur Bestimmung der Tangentengleichung. Seine Anwendung wird im folgenden Screenshot veranschaulicht.

$\text{tangentLine}(u(k,x),x,0)$ 0

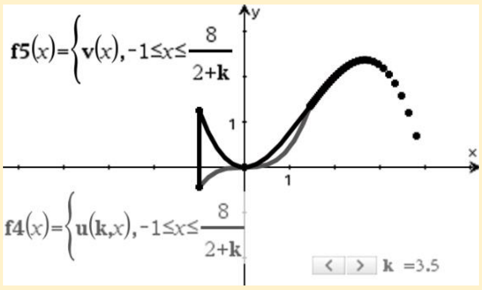
Die Gerade y = 0, also die x-Achse ist Tangente an den Graphen von $u_k(x)$.

g (3 BE)	
Lösung	Der obere Punkt der Schwanzflosse hat weiterhin die Koordinaten (-1| 1,25). Der untere Punkt der Schwanzflosse ist ein Punkt auf dem Graphen von $u_k(x)$ an der Stelle x = -1. Der Abstand der beiden senkrecht übereinander liegenden Punkte soll nun 1,5 LE betragen. Der Wert $\frac{3}{2}$ muss also der Differenz der y-Werte beider Punkte entsprechen. $\text{solve}\left(\frac{5}{4}-u(k,-1)=\frac{3}{2},k\right) \qquad k=2$ Für k = 2 beträgt die Ausdehnung der Schwanzflosse in y–Richtung $\frac{3}{2}$ LE.

h
(2 BE)

Lösung

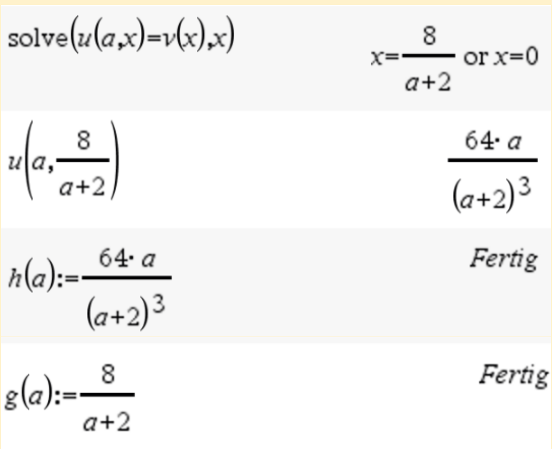
Am sinnvollsten ist es, die Veränderung der Lage der Kopfspitze zunächst in der grafischen Darstellung zu beobachten. Dazu wird ein Schieberegler verwendet.

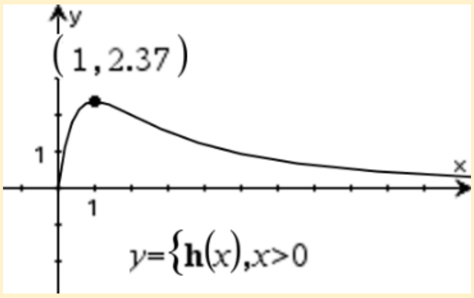
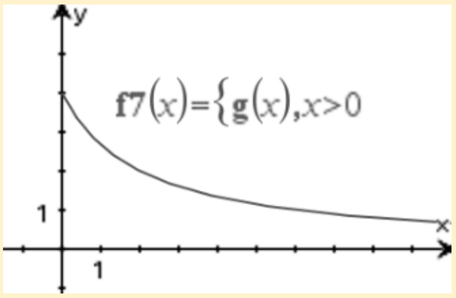


Hinweise:
Wegen k > 0 legt man als Startwert für den Schieberegler eine positive Zahl nahe bei 0 fest. Mit dem Schieberegler wird dann schrittweise k erhöht.

Beobachtungsergebnisse:
Je größer k wird, desto mehr bewegt sich die Spitze nach links in negative x-Richtung. Solange 0 < k <1 gilt, bewegt sich die Spitze dabei nach oben, also in positive y-Richtung. Bei x = 1 erreicht die Spitze ein lokales Maximum. Wenn dann k weiter vergrößert wird, bewegt sich die Spitze wieder abwärts in negative y-Richtung. (Die Spur der Spitze im oberen Screenshot lässt diese Bewegung nachempfinden.)

Untersuchung auf rechnerischer Basis:
Der Schnittpunkt S der beiden Funktionen $u_k(x)$ und v(x) im 1. Quadranten hat die Koordinaten $S\left(\frac{8}{k+2};\ \frac{64k}{(k+2)^3}\right)$.

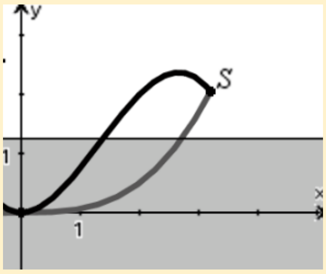


	Hinweis zum Calculator – Screenshot: Da k als Variable beim Schieberegler verwendet wurde, ist bei der Rechnung der Parameter zu „a“ umbenannt worden, weil k ja nun mit dem letzten beim Schieberegler verwendeten Wert belegt ist. Die Funktion h(a) beschreibt die Veränderung der y-Werte von S. Der Maximalwert liegt bei k = 1 und die Werte werden dann nach links und rechts kleiner. Die Funktion g(a) beschreibt die Veränderung der x-Werte von S. Sie werden immer kleiner, je größer a wird. Für a → 0 gilt x → 4.  **Hinweis:** Für die grafische Darstellung muss x als unabhängige Variable verwendet werden.

i
(7 BE)

Lösung

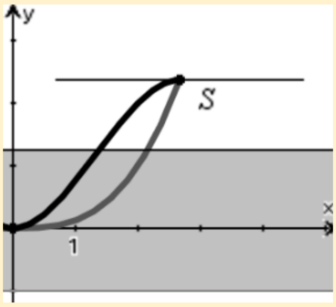
I. Die Kopfspitze ragt aus dem Wasser heraus, wenn der y-Wert der Spitze S größer als $y = \frac{5}{4}$ ist. Mit den in der vorigen Teilaufgabe ermittelten Koordinaten von $S\left(\frac{8}{k+2} \middle| \frac{64k}{(k+2)^3}\right)$ muss gelten $\frac{64k}{(k+2)^3} > \frac{5}{4}$.



$$\text{solve}\left(\frac{64\cdot a}{(a+2)^3} > \frac{5}{4}, a\right) \Big| a>0 \qquad \frac{-2\cdot\left(2\cdot\sqrt{5}-5\right)}{5} < a < \frac{2\cdot\left(2\cdot\sqrt{5}+5\right)}{5}$$

Für $\frac{10-4\cdot\sqrt{5}}{5} < k < \frac{10+4\cdot\sqrt{5}}{5}$ ragt die Kopfspitze aus dem Wasser heraus.

II. Die obere Begrenzungslinie des Fisches verläuft parallel zur Wasseroberfläche, wenn die Tangente an den Graphen von v an der Stelle $x = \frac{8}{2+k}$ parallel zu $y = \frac{5}{4}$ ist, also den Anstieg 0 hat. Dies ist für k = 1 der Fall (siehe auch vorige Teilaufgabe).



$$\frac{d}{dx}\left(v(x)\right) \qquad \frac{-x\cdot(3\cdot x-8)}{4}$$

$$\frac{-x\cdot(3\cdot x-8)}{4}=0 \Big| x=\frac{8}{2+a} \qquad \frac{16\cdot(a-1)}{(a+2)^2}=0$$

$$\text{solve}\left(\frac{16\cdot(a-1)}{(a+2)^2}=0, a\right) \Big| a>0 \qquad a=1$$

Die obere Begrenzungslinie des Fisches verläuft parallel zur Wasseroberfläche, wenn k = 1 ist.

III. Die x-Koordinate des Hochpunktes des Graphen von v ist unabhängig von k. Mit zunehmendem Wert von k bewegt sich der Schnittpunkt der Graphen von u_k und v in negative x-Richtung. Sobald der y-Wert der Kopfspitze das lokale Maximum bei k = 1 erreicht hat und dann in negative x-Richtung verlässt, ist die obere Schwanzspitze der höchste Punkt des Fisches. Mit I und II folgt $1 \leq k < \frac{10+4\cdot\sqrt{5}}{5}$

Analysis - Beispiel 2 (grundlegendes Anforderungsniveau)[2]

<table>
<tr><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>a
(4 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>
Da der Funktionsterm aus einem Produkt von Linearfaktoren besteht, kann man die Nullstellen direkt ablesen: Die Nullstellen sind $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$, der dritte Faktor e^x liefert keine weitere Nullstelle.
Die Rechnungen mit dem CAS bestätigen diese Fakten:

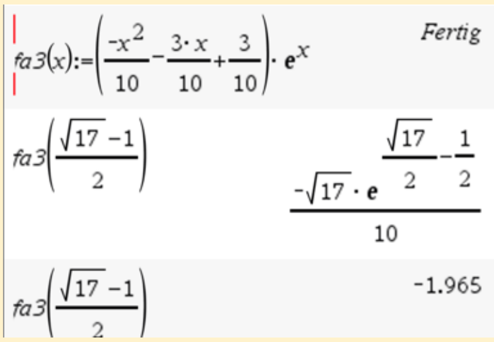
$f(x):=\frac{x}{10}\cdot(3-x)\cdot e^x$ *Fertig*
$\text{solve}(f(x)=0,x)$ $x=0 \text{ or } x=3$

Die notwendige Bedingung für einen Wendepunkt ist mit der Existenz von Nullstellen der 2. Ableitungsfunktion f“(x) im ersten Quadranten erfüllt.
Es gilt $f''(x) = (-\frac{x^2}{10} - \frac{x}{10} - \frac{2}{5}) \cdot e^x$.
Die Nullstellen von f“(x) sind $x_1 = \frac{-(\sqrt{17}+1)}{2}$ und $x_2 = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$, dabei liegt nur x_2 im ersten Quadranten.
Ein hinreichendes Kriterium ist erfüllt, wenn f‘“$(x_2) \neq 0$ gilt.
Dies ist mit f‘“$(x_2) \approx -1{,}965$ erfüllt.

$\frac{d}{dx}(f(x))$ $\left(\frac{-x^2}{10}+\frac{x}{10}+\frac{3}{10}\right)\cdot e^x$
$fa1(x):=\left(\frac{-x^2}{10}+\frac{x}{10}+\frac{3}{10}\right)\cdot e^x$ *Fertig*
$\frac{d}{dx}(fa1(x))$ $\left(\frac{-x^2}{10}-\frac{x}{10}+\frac{2}{5}\right)\cdot e^x$

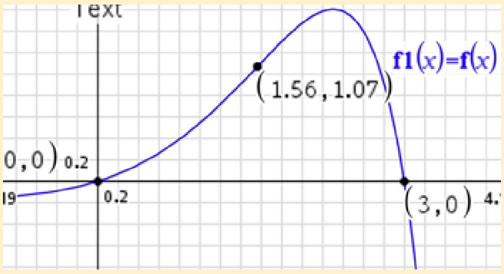
$fa2(x):=\left(\frac{-x^2}{10}-\frac{x}{10}+\frac{2}{5}\right)\cdot e^x$ *Fertig*
$\text{solve}(fa2(x)=0,x)$ $x=\frac{-(\sqrt{17}+1)}{2} \text{ or } x=\frac{\sqrt{17}-1}{2}$
$\frac{d}{dx}(fa2(x))$ $\left(\frac{-x^2}{10}-\frac{3\cdot x}{10}+\frac{3}{10}\right)\cdot e^x$
</td></tr>
</table>

[2] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2020/abitur/pools2020/mathematik/grundlegend/2020_M_grundlege_16.pdf



Hinweis:

Zur Kontrolle der Ergebnisse bietet sich z. B. die Darstellung des Graphen der Funktion f und die Ermittlung des Wendepunktes mit der Anweisung *Graph analysieren* an:



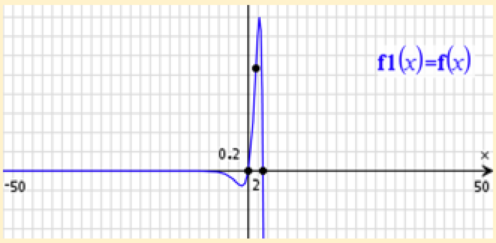
<table>
<tr><td>b
(2 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>
Nutzt man die im CAS existierende Funktion zur Grenzwertbestimmung, so erhält man $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ und $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to \infty} (f(x)) \quad -\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x)) \quad 0$

Für x→ +∞ verläuft der Graph von f gegen – ∞ und für x→– ∞ asymptotisch zur negativen x-Achse.

Hinweis:

Auch hier ist eine Überprüfung in der Grafikdarstellung sinnvoll:



Da der Operator „Beschreiben“ genutzt wird, sind keine Begründungen erforderlich.
</td></tr>
<tr><td>c
(5 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>
Die Stellen, an denen die Steigung dem gesuchten Wert entspricht, wird mittels der 1. Ableitung von f mithilfe von $f'(x) = \frac{3e}{10}$ berechnet.

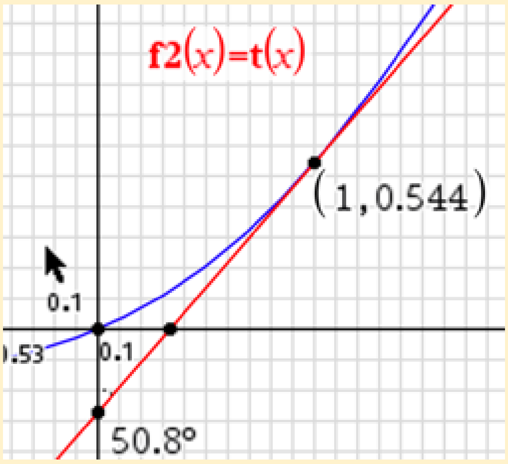
$\text{solve}\left(fa1(x)=\frac{3\cdot e}{10},x\right) \quad x=1. \text{ or } x=1.943$

Von den zwei gefundenen Stellen x = 1 und $x \approx 1{,}943$ wählt man z. B. x = 1 aus.

Die zugehörige Tangentengleichung y = mx + n ergibt sich zu
y = $\frac{3e}{10}x - \frac{e}{10}$.
</td></tr>
</table>

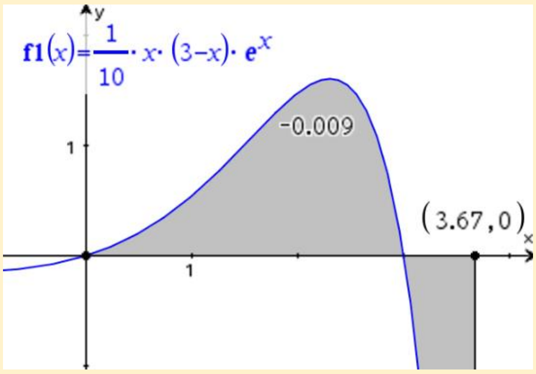
<table>
<tr><td></td><td>
Begründung:
Die Steigung $m = f'(x) = \frac{3e}{10}$ ist gegeben und n lässt sich durch Einsetzen von m, x = 1 und $y = f(1) = \frac{2}{10} \cdot e$ berechnen:
$\frac{2}{10} \cdot e = \frac{3}{10} \cdot e \cdot 1 + n$ ergibt $n = -\frac{1}{10} \cdot e$.
Die gesuchte y-Koordinate ist damit $-\frac{e}{10}$.
Um den Winkel zu berechnen, unter dem diese Tangente die y-Achse schneidet, berechnet man mittels der bekannten Beziehung $\tan(\alpha) = m = \frac{3e}{10}$ den Winkel bzgl. der x-Achse mit $\alpha = 39{,}2°$ und erhält damit denjenigen zur y–Achse mit 90° – 39,2° = 59,8°.

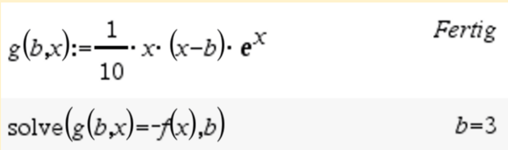
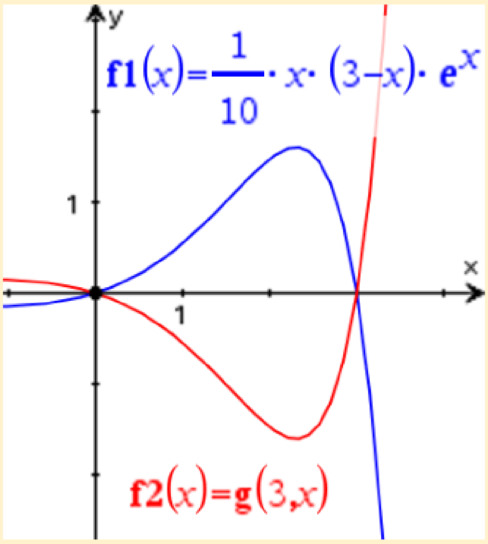
$$\tan^{-1}\left(\frac{3 \cdot e}{10}\right) \qquad 39.2$$

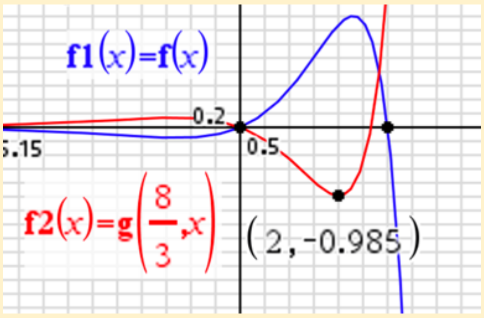
Auch hier bietet sich eine Kontrolle im Grafikfenster an, dort kann man den gesuchten Winkel auch messen.


</td></tr>
<tr><td></td><td>Die Funktion F ist eine Stammfunktion von f.</td></tr>
<tr><td>d
(2 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>
Die Berechnung des Terms F(3) – F(0) = $\frac{e^3+5}{10}$ erfolgt durch Berechnung des bestimmten Integrals $\int_0^3 f(x)dx$.

$$\int_0^3 f(x)\,dx \qquad \frac{e^3+5}{10}$$
</td></tr>
</table>

	Der Wert $\frac{2}{10} \cdot e$ entspricht dem Flächeninhalt der Fläche, die der Graph von f im Intervall [0; 3] mit der x-Achse einschließt.
e (3 BE)	
Lösung	Für x > 3 sind die Funktionswerte von f negativ und es gilt auch, dass $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ ist. Somit existiert mindestens ein x-Wert a, für den der Inhalt des oberhalb der x-Achse liegenden Flächenstücks im Intervall von [0; 3] ebenso groß ist, wie der Inhalt des Flächenstücks im Intervall [3; a]. Da aber das Integral über f im Intervall [0; 3] einen positiven Wert hat, das unter der x-Achse gelegene Integral im Intervall [3; a] mit a > 3 aber einen negativen Wert besitzt, ergänzen sich diese beiden Flächenstücke bei der Berechnung des bestimmten Integrals im Intervall [0; a] zu 0. **Hinweis:** Mithilfe der grafischen Darstellung und der Anweisung *Graph analysieren-Integral* lässt sich das Problem veranschaulichen. Der Wert für a liegt ungefähr bei 3,67. 

f (3 BE)	
Lösung	Alle Stammfunktionen H von f haben die Form H(x) = F(x) + c, da H‘(x) = f(x) ist, sind die Nullstellen von f mögliche Extremstellen für H. Für die Nullstelle x = 0 hat die Ableitungsfunktion f von H einen Vorzeichenwechsel, denn es gilt in einer Umgebung von x = 0, dass f(x) < 0 für x < 0 und f(x) > 0 für x > 0. Damit ist auch das hinreichende Kriterium erfüllt und der Nachweis für einen lokalen Tiefpunkt erbracht.
2	
a (2 BE)	
Lösung	Damit zwei Graphen f und g symmetrisch zur x-Achse verlaufen, muss für alle x gelten: f(x) = -g(x). Die Lösung ergibt sich damit zu b = 3.  **Hinweis:** Kontrolle im Grafikfenster 

b (3 BE)	
Lösung	Ein Tiefpunkt an der Stelle x = 2 liegt vor, wenn g‘(b, 2) = 0 und g‘‘(b, 2) > 0 gelten. Die Berechnung durch Lösen dieser Bedingungen mit dem CAS-Rechner ergibt b = $\frac{8}{3}$. Der Graph wird dann für b = $\frac{8}{3}$ dargestellt. $\frac{d}{dx}(g(b,x))$ $\quad \left(\frac{x^2}{10}+\left(\frac{1}{5}-\frac{b}{10}\right)\cdot x-\frac{b}{10}\right)\cdot e^x$ $ga1(b,x):=\left(\frac{x^2}{10}+\left(\frac{1}{5}-\frac{b}{10}\right)\cdot x-\frac{b}{10}\right)\cdot e^x$ *Fertig* $\frac{d}{dx}(ga1(b,x))$ $\quad \left(\frac{x^2}{10}+\left(\frac{2}{5}-\frac{b}{10}\right)\cdot x-\frac{b}{5}+\frac{1}{5}\right)\cdot e^x$ $ga2(b,x):=\left(\frac{x^2}{10}+\left(\frac{2}{5}-\frac{b}{10}\right)\cdot x-\frac{b}{5}+\frac{1}{5}\right)\cdot e^x$ *Fertig* solve$(ga1(b,2)=0,b)$ $\quad b=\frac{8}{3}$ $ga2\left(\frac{8}{3},2\right)$ $\quad \frac{e^2}{3}$ 
c (3 BE)	
Lösung	Der Lösungsansatz g(b, x) = g‘(b, x) liefert die Lösung x = $\frac{b}{2}$. Für die zugehörige y-Koordinate gilt g(b, $\frac{b}{2}$) $=-\frac{1}{40}b^2e^{\frac{b}{2}}$.

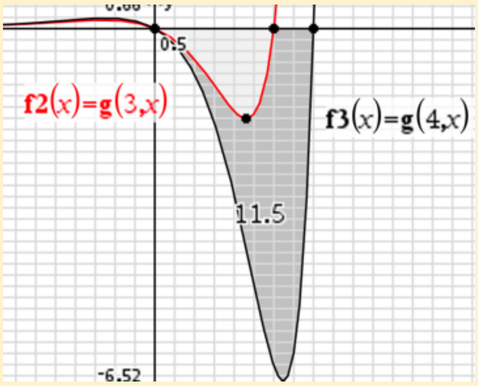
<table>
<tr><td></td><td>

$\text{solve}(g(b,x)=ga1(b,x),x) \quad x=\frac{b}{2}$

$g\left(b,\frac{b}{2}\right) \quad \frac{-b^2\cdot e^{\frac{b}{2}}}{40}$

</td></tr>
<tr><td>d
(5 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>

Zunächst wird die gesuchte Fläche für b = 3 im Diagramm markiert.



Die Berechnung erfolgt dann unter Berücksichtigung, dass die beiden Teilflächen unterhalb der x–Achse liegen und damit bei der Berechnung einen negativen Wert liefern, mittels des Ansatzes:

$-\int_0^{b+1} g_{b+1}(x)dx + \int_0^{b} g_b(x)dx = \frac{1}{10}\cdot(e^3+1).$

$\text{solve}\left(\int_0^b g(b,x)\,dx - \int_0^{b+1} g(b+1,x)\,dx = \frac{1}{10}\cdot\left(\mathbf{e}^3+1\right),b\right) \quad b=2.$

Als Lösung findet man b = 2.

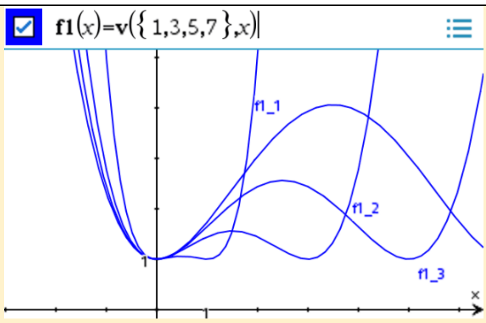
</td></tr>
</table>

Analysis - erhöhtes Anforderungsniveau

Analysis -Beispiel 1 (erhöhtes Anforderungsniveau)[3]

1	
a (3 BE)	
Lösung	Man kann zunächst versuchen, anhand der Funktionsgleichung gemeinsame Eigenschaften zu erkennen. Es ist zweckmäßig, sich einige Exemplare der Kurvenschar grafisch zu veranschaulichen, um eine Vorstellung von ihrem Verlauf zu bekommen. Die Eigenschaften sollen nur genannt werden. Eine Begründung ist deshalb nicht erforderlich. **Gemeinsame Eigenschaften:** Der Funktionsgleichung lässt sich entnehmen: (1) Für x = 0 ist für alle Werte von t der zugehörige Funktionswert y = 1. Also ist P(0 | 1) ein gemeinsamer Punkt aller Graphen. (2) Da die beiden Faktoren im ersten Summanden des Funktionsterms quadratisch sind und jedesmal 1 addiert wird, können nur positive y-Werte vorkommen. (3) Da der Funktionsterm als ganzrationale Funktion 4. Grades geschrieben werden kann, könnten die Graphen maximal drei lokale Extrempunkte enthalten. (4) Jeder Graph ist achsensymmetrisch zu einer Parallelen zur y-Achse. (5) Jeder Graph hat zwei lokale Tiefpunkte und einen lokalen Hochpunkt, der auf der Symmetrieachse liegt. Einige Graphen veranschaulichen: $v(t,x):=\left(\frac{x}{t}\right)^2\cdot(x-t)^2+1$ *Fertig*

[3] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2020/abitur/pools2020/mathematik/erhoeht/2020_M_erhoeht_B_6.pdf



Hinweise:
Auch mit einem Schieberegler für den Parameter t lassen sich verschiedene Exemplare des Funktionsgraphen anzeigen und bezüglich gemeinsamer Eigenschaften miteinander vergleichen.

Es genügt, drei solcher gemeinsamer Eigenschaften zu nennen.

b
(2 BE)

Lösung

Für die rechnerische Ermittlung des Hochpunktes von v_8 können die notwendige und die hinreichende Bedingung für lokale Extrempunkte untersucht werden. Dafür müssen die 1. und die 2. Ableitungsfunktion von v_8 gebildet und unter geeigneten Bezeichnungen gespeichert werden.

Ableitungen bilden und speichern:

$v(8,x)$	$\frac{x^4}{64}-\frac{x^3}{4}+x^2+1$
$\frac{d}{dx}(v(8,x))$	$\frac{x^3}{16}-\frac{3\cdot x^2}{4}+2\cdot x$
$a1v(x):=\frac{x^3}{16}-\frac{3\cdot x^2}{4}+2\cdot x$	*Fertig*
$\frac{d^2}{dx^2}(v(8,x))$	$\frac{3\cdot x^2}{16}-\frac{3\cdot x}{2}+2$
$a2v(x):=\frac{3\cdot x^2}{16}-\frac{3\cdot x}{2}+2$	*Fertig*

$v'(8,x)=\frac{x^3}{16}-\frac{3x^2}{4}+2x$; $v''(8,x)=\frac{3x^2}{16}-\frac{3x}{2}+2$

Notwendige und hinreichende Bedingung:

Nullstellen der 1. Ableitung ermitteln und prüfen, für welche dieser Nullstellen die 2. Ableitungsfunktion kleiner als Null ist.

solve(a1v(x)=0,x)	x=0 or x=4 or x=8
a2v({0,4,8})	{2,-1,2}

Die Nullstellen der 1. Ableitung sind $x \in \{0; 4; 8\}$. Nur $v_8''(4) = -1$ ist kleiner als Null. Deshalb ist $x = 4$ die Abszisse des lokalen Hochpunktes.

Funktionswert des lokalen Hochpunktes:

v(8,4)	5

Der lokale Hochpunkt H hat die Koordinaten $H(4 \mid 5)$.

c
(4 BE)

Lösung

Die Gleichung II $v_8'(x) = m$ bringt zum Ausdruck, dass der Graph von v_8 den Anstieg m an der Stelle x besitzt.
Die Gleichung I $v_8(x) = m \cdot x + 1$ bedeutet, dass die Funktionswerte von v_8 und der Geraden $y = m \cdot x + 1$ an der Stelle x übereinstimmen. Die Gerade $y = m \cdot x + 1$ hat an jeder Stelle den Anstieg m. Die Gerade $y = m \cdot x + 1$ ist deshalb Tangente an den Graphen von v_8.

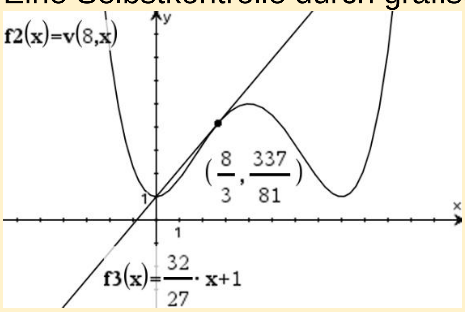
Bedeutung der angegebenen Lösungen:

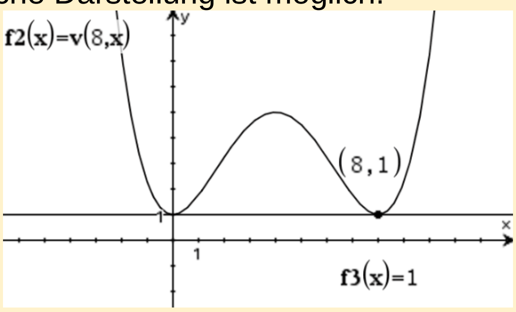
Weil $m_1 = \frac{32}{27}$ ist, berührt die Gerade $y = \frac{32}{27} \cdot x + 1$ den Graphen von v_8 und zwar an der Stelle $x_1 = \frac{8}{3}$.

Weil $m_2 = 0$ ist, berührt die Gerade $y = 0 \cdot x + 1 = 1$ den Graphen von v_8 und zwar an der Stelle $x_1 = 8$.

Hinweis:

Eine Selbstkontrolle durch grafische Darstellung ist möglich:





d
(3 BE)

Lösung

Für die rechnerische Ermittlung des Wendepunktes von v_t können die notwendige und die hinreichende Bedingung für Wendepunkte untersucht werden. Dafür müssen die 2. und die 3. Ableitungsfunktion von v_t gebildet und unter geeigneten Bezeichnungen gespeichert werden.

Ableitungen bilden und speichern:

$v(t,x):=\left(\frac{x}{t}\right)^2\cdot(x-t)^2+1$ — *Fertig*

$\frac{d^2}{dx^2}(v(t,x))$ — $\frac{2\cdot(6\cdot x^2-6\cdot x\cdot t+t^2)}{t^2}$

$a2v(t,x):=\frac{2\cdot(6\cdot x^2-6\cdot x\cdot t+t^2)}{t^2}$ — *Fertig*

$\frac{d^3}{dx^3}(v(t,x))$ — $\frac{12\cdot(2\cdot x-t)}{t^2}$

$a3v(t,x):=\frac{12\cdot(2\cdot x-t)}{t^2}$ — *Fertig*

Notwendige und hinreichende Bedingung:

Nullstellen der 2. Ableitung ermitteln und prüfen, für welche dieser Nullstellen die 3. Ableitungsfunktion ungleich null ist.

solve$(a2v(t,x)=0,x)$

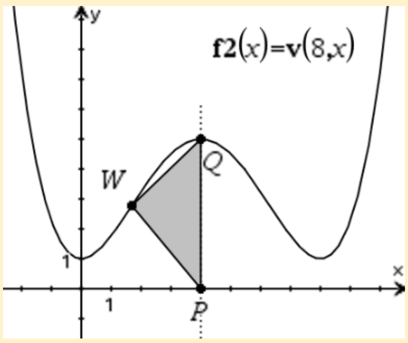
$x=\frac{(\sqrt{3}+3)\cdot t}{6}$ or $x=\frac{-(\sqrt{3}-3)\cdot t}{6}$

$a3v\left(t,\frac{(\sqrt{3}+3)\cdot t}{6}\right)$ — $\frac{4\cdot\sqrt{3}}{t}$

$a3v\left(t,\frac{-(\sqrt{3}-3)\cdot t}{6}\right)$ — $\frac{-4\cdot\sqrt{3}}{t}$

Die Nullstellen der 2. Ableitung sind $x\in\left\{\frac{(\sqrt{3}+3)\cdot t}{6};\ \frac{-(\sqrt{3}-3)\cdot t}{6}\right\}$.

Die 3. Ableitungen an diesen beiden Stellen sind $v_t'''(t,x)=\pm\frac{4\cdot\sqrt{3}}{t}$ und sind wegen t > 0 ungleich null. Damit ist die Existenz von genau zwei Wendepunkten gesichert.

	Funktionswert der Wendepunkte: $v\left(t,\frac{(\sqrt{3}+3)\cdot t}{6}\right) \quad \frac{t^2}{36}+1$ $v\left(t,\frac{-(\sqrt{3}-3)\cdot t}{6}\right) \quad \frac{t^2}{36}+1$ Beide Funktionswerte sind wegen der Achsensymmetrie des Graphen gleich, und es gilt wie behauptet $y=\frac{1}{36}\cdot t^2+1$.
e (4 BE)	
Lösung	Der Wendepunkt mit der kleineren x-Koordinate ist $W\left(\frac{-(3-\sqrt{3})\cdot t}{6} \mid \frac{t^2}{36}+1\right)$. Für z. B. t = 8 zeichnet man eine Skizze und macht sich die Lage der Punkte W, P und Q klar. Die Rechtwinkligkeit eines Dreiecks lässt sich z. B. mit der Umkehrung des Satzes des Pythagoras oder mit einer Winkelberechnung oder mit dem Skalarprodukt geeigneter Vektoren feststellen. Zeichnung für t = 8:  Da P und Q dieselbe x-Koordinate haben und P auf der x-Achse liegt, befindet sich Q senkrecht über P, weil Q vermutlich der lokale Hochpunkt des Graphen von v_t ist. Dies kann durch eine Berechnung des lokalen Hochpunktes von v_t geprüft werden. Die Gerade durch P und Q ist also die Symmetrieachse des Graphen. Da W der kleinere der beiden Wendepunkte ist, liegt W immer links von dieser Symmetrieachse. Der y-Wert von W ist stets kleiner als der von Q und größer als der von P. Wenn es überhaupt einen rechten Winkel im Dreieck PQW gibt, dann kann der nur beim Punkt W liegen. Dann müsste das Skalarprodukt $\overrightarrow{WP}\circ\overrightarrow{WQ}=0$ sein.

Nachweis, dass Q der Hochpunkt von v_t ist:

$$\frac{d}{dx}(v(t,x)) \qquad \frac{2\cdot x\cdot\left(2\cdot x^2-3\cdot x\cdot t+t^2\right)}{t^2}$$

$$a1v(t,x):=\frac{2\cdot x\cdot\left(2\cdot x^2-3\cdot x\cdot t+t^2\right)}{t^2} \qquad \textit{Fertig}$$

$$\text{solve}(a1v(t,x)=0,x) \qquad x=\frac{t}{2} \text{ or } x=t \text{ or } x=0$$

$$a2v\left(t,\frac{t}{2}\right) \qquad -1$$

$$v\left(t,\frac{t}{2}\right) \qquad \frac{t^2}{16}+1$$

Für $x=\frac{t}{2}$ ist die 1. Ableitung null und die 2. Ableitung negativ, also liegt dort wirklich der lokale Hochpunkt des Graphen. Seine Koordinaten sind $Q\left(\frac{t}{2}\mid\frac{t^2}{16}+1\right)$.

Es wird untersucht, ob es einen Wert für t gibt, sodass $\overrightarrow{WP}\circ\overrightarrow{WQ}=0$ gilt:

$$p:=\begin{bmatrix}\frac{t}{2}\\0\end{bmatrix}:q:=\begin{bmatrix}\frac{t}{2}\\\frac{t^2}{16}+1\end{bmatrix}:w:=\begin{bmatrix}\frac{(3-\sqrt{3})\cdot t}{6}\\\frac{t^2}{36}+1\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}\frac{-(\sqrt{3}-3)\cdot t}{6}\\\frac{t^2}{36}+1\end{bmatrix}$$

$$\text{solve}(\text{dotP}(p-w,q-w)=0,t) \qquad t=\frac{-6\cdot\sqrt{35}}{5} \text{ or } t=0 \text{ or } t=\frac{6\cdot\sqrt{35}}{5}$$

$$\text{solve}(\text{dotP}(p-w,q-w)=0,t) \qquad t=-7.0993 \text{ or } t=0. \text{ or } t=7.0993$$

Wegen t > 0 interessiert hier nur der positive Wert.
Für $t=\frac{6}{5}\cdot\sqrt{35}\approx 7{,}1$ ist das Dreieck PQW rechtwinklig.

Alternative Lösung:
Wenn der Satz des Pythagoras für das Dreieck PQW erfüllt ist, dann ist das Dreieck rechtwinklig. Es wird geprüft, für welchen Wert von t die

	Gleichung $\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{WP}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{WQ}\right\|^2$ erfüllt ist. Für $t = \frac{6}{5} \cdot \sqrt{35} \approx 7{,}1$ ist dies der Fall. $\text{solve}\left(\left(\text{norm}(q-p)\right)^2=\left(\text{norm}(p-w)\right)^2+\left(\text{norm}(q-w)\right)^2,t\right)\|t>0 \qquad t=\frac{6\cdot\sqrt{35}}{5}$
f (6 BE)	
Lösung:	**Hinweis:** Der Operator „Beurteilen“ verlangt, das Urteil zu begründen, also durch logisches Schließen oder Rechnung zu bestätigen. Für die erste Aussage müssen die Funktionswerte beider Funktionen miteinander verglichen werden. Für die zweite Aussage können die Vorzeichen der 1. Ableitungsfunktionen verglichen werden. **Beurteilungen:** Die Funktion f wird definiert. Wenn ihre Funktionswerte für keinen Wert von x größer als die von v_8 sind, dann muss die Ungleichung $f(x) \leq v_8(x)$ für alle Werte von x erfüllt sein. Eine Lösung mit dem CAS-Rechner bestätigt diese Annahme durch die Ausgabe von „true“. $f(x):=\sqrt[4]{v(8,x)}$ *Fertig* $\text{solve}\left(f(x)\leq v(8,x),x\right)$ true Die Aussage „Für keinen Wert von x ist der Funktionswert von f größer als der von v_8.“ ist richtig. Die 1. Ableitungen der Funktionen f und v_8 können mit dem CAS berechnet und abgespeichert werden. **Hinweis:** Die 1. Ableitung von v_8 wurde ggf. schon bei einer der vorigen Teilaufgaben gespeichert und braucht hier nur aufgerufen zu werden.

$$\frac{d}{dx}(f(x)) \qquad \frac{\sqrt{2}\cdot x\cdot\left(x^2-12\cdot x+32\right)}{4\cdot\left(x^4-16\cdot x^3+64\cdot x^2+64\right)^{\frac{3}{4}}}$$

$$a1f(x):=\frac{\sqrt{2}\cdot x\cdot\left(x^2-12\cdot x+32\right)}{4\cdot\left(x^4-16\cdot x^3+64\cdot x^2+64\right)^{\frac{3}{4}}}$$

Es wird nun geprüft, in welchen Intervallen die 1. Ableitungen von f bzw. v_8 negativ, positiv oder gleich null sind. Wenn diese Intervalle übereinstimmen, dann stimmt auch das Monotonieverhalten der Funktionen überein.

solve$(a1f(x)<0,x)$	$4<x<8$ or $x<0$
solve$(a1v(8,x)<0,x)$	$4<x<8$ or $x<0$
solve$(a1f(x)>0,x)$	$0<x<4$ or $x>8$
solve$(a1v(8,x)>0,x)$	$0<x<4$ or $x>8$
solve$(a1f(x)=0,x)$	$x=0$ or $x=4$ or $x=8$
solve$(a1v(8,x)=0,x)$	$x=0$ or $x=4$ or $x=8$

Beide Funktionen sind für 4 < x < 8 und x < 0 streng monoton fallend, für die Intervalle 0 < x < 4 und x > 8 sind sie streng monoton steigend. An den Stellen x = 0, x = 4 und x = 8 sind die Anstiege beider Funktionen null.

Damit ist gezeigt, dass die Funktionen f und v_8 in ihrem Monotonieverhalten übereinstimmen. Die Aussage ist richtig.

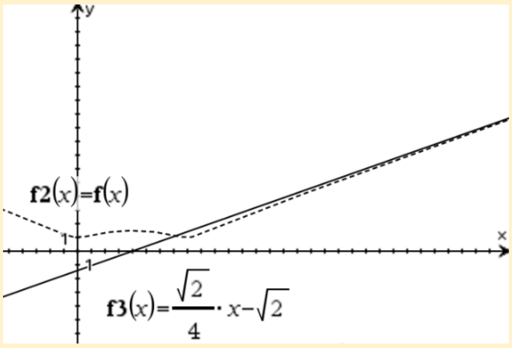
Alternative Lösung:

In Teilaufgabe 1a wurde genannt, dass der Wertebereich von v_8 größer oder gleich 1 ist. Zieht man die vierte Wurzel aus einer Zahl, die größer oder gleich 1 ist, dann ist das Ergebnis immer kleiner oder höchstens gleich der Zahl, aus der die vierte Wurzel gezogen wurde. Deshalb sind die Funktionswerte von f für keinen Wert von x größer als die von v_8.

Nach der Kettenregel gilt für die 1. Ableitung von $f(x) = \sqrt[4]{v_8(x)} = (v_8(x))^{\frac{1}{4}}$:

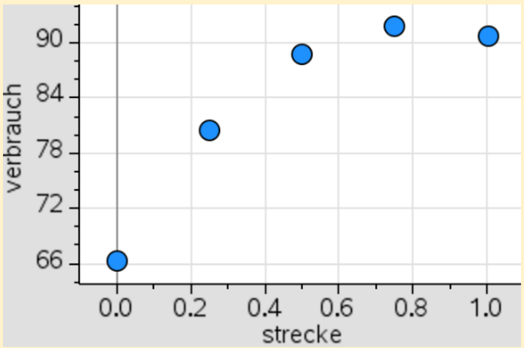
$$f'(x) = \frac{1}{4}\cdot\left(v_8(x)\right)^{\frac{-3}{4}}\cdot v_8'(x) = \frac{1}{4\cdot\left(\sqrt[4]{v_8(x)}\right)^3}\cdot v_8'(x)$$

Es ist $\frac{1}{4\cdot\left(\sqrt[4]{v_8(x)}\right)^3} > 0$, weil $v_8 > 0$ ist. Deshalb haben f‘ und $v_8{}'$ dasselbe Vorzeichen und stimmen aus diesem Grunde in ihrem Monotonieverhalten überein. Die Aussage ist richtig.

g (2 BE)	
Lösung	Der Term $\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot x-\sqrt{2}$ beschreibt eine Gerade mit der Gleichung $y=g(x)=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot x-\sqrt{2}$. Der angegebene Grenzwert beschreibt den Sachverhalt, dass sich die Funktionswerte von g und f für $x\to+\infty$ immer weniger unterscheiden, da ihre Differenz gegen null geht, wenn x immer größer wird. Die Gerade $y=g(x)=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot x-\sqrt{2}$ ist für $x\to+\infty$ Asymptote des Graphen von f. **Hinweis:** Zur Selbstkontrolle und Veranschaulichung kann man die Graphen beider Funktionen mit dem Grafikmodul des CAS-Rechners zeichnen lassen. 
2	
a (3 BE)	
Lösung	Man kann zunächst die gegebenen Werte grafisch darstellen. Aus dem Verlauf des Graphen lässt sich eine Vermutung ableiten, welchen Grad die ganzrationale Modellfunktion mindestens haben könnte. Mithilfe eines Gleichungssystems, das anhand der Messwertpaare aufgestellt werden kann, oder durch Regression, kann dann eine Gleichung der Modellfunktion bestimmt werden.

Grafische Darstellung, Ableitung einer Vermutung:

	A strecke	B verbrauch
=		
1	0	66.3
2	0.25	80.5
3	0.5	88.7
4	0.75	91.8
5	1	90.7

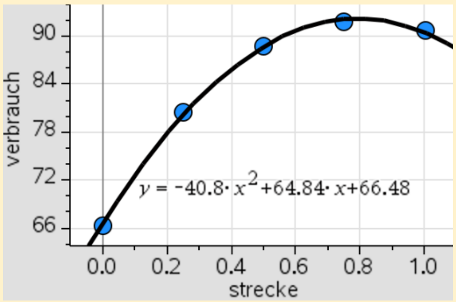


Die Messpunkte könnten auf ganzrationalen Funktion mindestens 2. Grades liegen. Da fünf Messwertpaare vorhanden sind, erlauben

diese die Bestimmung der Gleichung einer ganzrationalen Funktion bis 4. Grades.

Ermittlung einer Funktionsgleichung:

Quadratische Regression: $y = -40{,}8x^2 + 64{,}84x + 66{,}48$.

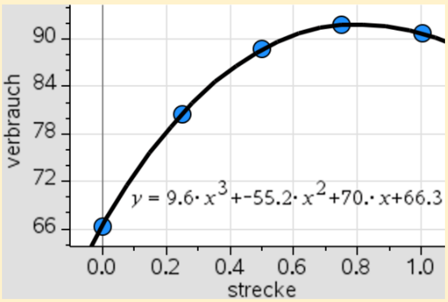


stat.results

"Titel"	"Quadratische Regression"
"RegEqn"	"a·x^2+b·x+c"
"a"	-40.8
"b"	64.84
"c"	66.48
"R²"	0.999284
"Resid"	"{...}"

Da R^2 nahe bei 1 liegt, könnte diese quadratische Funktion gut als Modell verwendet werden.

Kubische Regression: $y = 9{,}6x^3 - 55{,}2x^2 + 70x + 66{,}3$

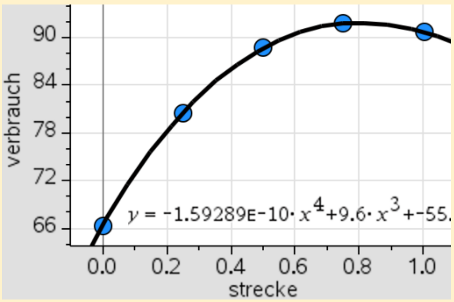


stat.results

"Titel"	"Kubische Regression"
"RegEqn"	"a·x^3+b·x^2+c·x+d"
"a"	9.6
"b"	-55.2
"c"	70.
"d"	66.3
"R²"	1.
"Resid"	"{...}"

Da $R^2 = 1$ ist, könnte diese kubische Funktion noch besser als die quadratische Funktion als Modell verwendet werden.

Regression mit einer ganzrationalen Funktion 4. Grades:
$y \approx -1{,}6 \cdot 10^{-6}x^4 + 9{,}6x^3 - 55{,}2x^2 + 70x + 66{,}3.$



stat.results

"Titel"	"Regression vierter Ordnung"
"RegEqn"	"a· x^4+b· x^3+c· x^2+d· x+e"
"a"	-1.59289E-10
"b"	9.6
"c"	-55.2
"d"	70.
"e"	66.3
"R²"	1.
"Resid"	"{...}"

Der Koeffizient vor x^4 ist nahezu null, die anderen Koeffizienten stimmen mit denen bei der kubischen Regressionsfunktion ermittelten Koeffizienten überein, sodass die kubische Funktion als Modell am geeignetsten erscheint.

$$\boldsymbol{y = 9,6x^3 - 55,2x^2 + 70x + 66,3}$$

Alternativer Lösungsweg:

Da fünf Wertepaare gegeben sind, lassen sich die fünf Koeffizienten einer ganzrationalen Funktion 4. Grades

$$y = m(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$$

aus einem Gleichungssystem mit fünf Gleichungen ermitteln.

$m(x):=a\cdot x^4+b\cdot x^3+c\cdot x^2+d\cdot x+e$ *Fertig*

$$\text{solve}\left(\begin{cases} m(0)=66.3 \\ m(0.25)=80.5 \\ m(0.5)=88.7 \\ m(0.75)=91.8 \\ m(1)=90.7 \end{cases},\{a,b,c,d,e\}\right)$$

$a=0.$ and $b=9.6$ and $c=-55.2$ and $d=70.$ and e▸

$m(x)|a=0.$ and $b=9.6$ and $c=-55.2$ and $d=70.$ ▸

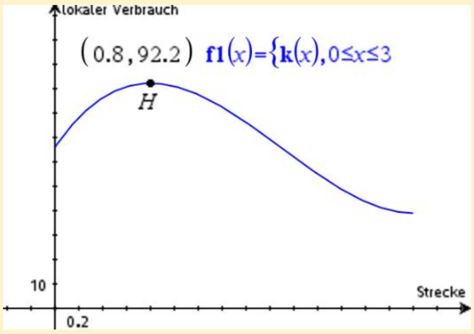
$9.6\cdot x^3-55.2\cdot x^2+70.\cdot x+66.3$

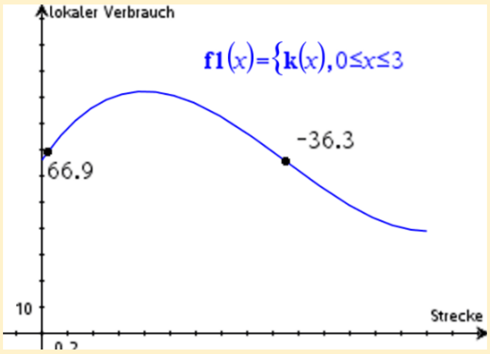
Man erhält ebenfalls $y = m(x) = 9{,}6x^3 - 55{,}2x^2 + 70x + 66{,}3$.

b
(2 BE)

Lösung

Man bildet die Differenz aus Messwert und Funktionswert und dann jeweils den Quotienten aus dieser Differenz und dem zugehörigen Funktionswert.

	$k(x):=10\cdot x^3-57\cdot x^2+72\cdot x+66$ *Fertig* $\frac{k(0)-66.3}{66.3}$ -0.004525 $\frac{k(1)-90.7}{90.7}$ 0.003308 Im Startpunkt weicht der Funktionswert vom Messwert um ca. 0,45% nach unten ab, also um weniger als 0,5%. Nach 1 km Fahrstrecke weicht der Funktionswert vom Messwert um ca. 0,33% nach oben ab, also ebenfalls um weniger als 0,5%.
c (5 BE)	
Lösung	Es ist zu bedenken, dass die gesamte Fahrstrecke 3 km beträgt, also weit über die größte tabellierte Messstelle hinaus geht. Um den größten lokalen Verbrauch für die gesamte Strecke zu bestimmen, muss die Funktion k(x) auf <u>globale</u> Maxima untersucht werden. Die Stelle, an der sich der lokale Verbrauch am stärksten ändert, ist die Stelle von k, an der die Steigung/ das Gefälle von k dem Betrage nach am größten ist. Der Operator „Ermitteln Sie …“ lässt freie Wahl bei der Lösungsmethode. **Ermittlung der Lösung über den Graphen von k:** Die Funktion k wird im Intervall $0 \leq x \leq 3$ grafisch dargestellt. Der lokale Hochpunkt H wird mit der Anweisung *Graph analysieren* ermittelt.  Der größte lokale Verbrauch beträgt 92,2 ml/km und wird 0,8 km nach dem Start erreicht. Die Betrachtung des Graphen lässt vermuten, dass die Steigung am Start am größten ist, oder das Gefälle beim Wendepunkt am kleinsten ist. Beide Stellen könnten augenscheinlich für die Stelle mit der größten Änderung des lokalen Verbrauchs in Frage kommen. Unter *Graph analysieren* findet man die Anweisung „dy/dx“, die es erlaubt, den Anstieg (den Wert der 1. Ableitung) an einer Stelle des Graphen zu ermitteln.



Fährt man den Graphen entlang, ist zu erkennen, dass die Steigung dem Betrage nach am Start am größten ist. Der lokale Verbrauch ändert sich am stärksten am Start.

Ermittlung der Lösung mit fMax:

Die Funktion fMax ermittelt das globale Maximum einer Funktion in einem vorgegebenen Intervall.

$\text{fMax}(k(x),x)\vert 0\leq x\leq 3$	$x=\frac{4}{5}$
$k\left(\frac{4}{5}\right)$	$\frac{2306}{25}$
$k\left(\frac{4}{5}\right)$	92.24

Der lokale Verbrauch ist am größten bei $\frac{4}{5}\ km$. Er beträgt ca. 92,24 ml/km.

$\frac{d}{dx}(k(x))$	$30\cdot x^2-114\cdot x+72$
$\text{fMax}(30\cdot x^2-114\cdot x+72,x)\vert 0\leq x\leq 3$	$x=0$
$30\cdot x^2-114\cdot x+72\vert x=0$	72

Die größte Änderung des lokalen Verbrauchs gibt es für x = 0, also am Start. Sie beträgt 72 ml/km.

Ermittlung der Lösung mit der notwendigen und hinreichenden Bedingung

Die 1. Ableitungsfunktion von k hat im Intervall $0 \leq x \leq 3$ die Nullstellen $x = \frac{4}{5}$ und x = 3.

Es ist $k''\left(\frac{4}{5}\right) = -66 < 0$ und $k''(3) = 66 > 0$. An der Stelle $x = \frac{4}{5}$ liegt das lokale Maximum des lokalen Verbrauchs.
Es beträgt $k\left(\frac{4}{5}\right) = 92{,}24$ ml/km.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

$\frac{d}{dx}(k(x))$ $\quad 30\cdot x^2-114\cdot x+72$

$\text{solve}(30\cdot x^2-114\cdot x+72=0,x)|0\le x\le 3$ $\quad x=\frac{4}{5} \text{ or } x=3$

$\frac{d^2}{dx^2}(k(x))$ $\quad 60\cdot x-114$

$60\cdot x-114|x=\frac{4}{5}$ $\quad -66$

$60\cdot x-114|x=3$ $\quad 66$

$k\left(\frac{4}{5}\right)$ $\quad 92.24$

Für die Ermittlung der größten Änderung des lokalen Verbrauchs während der ganzen Fahrt wird zunächst das lokale Maximum von k‘ ermittelt. Es wird als Nullstelle der 2. Ableitung für die Stelle $x=\frac{12}{5}$ berechnet und die Änderung beträgt -28,8 ml/km. Neben dem lokalen Maximum der Änderung kann das globale Maximum aber auch an den Grenzen des Intervalls liegen.
Die Änderung des lokalen Verbrauchs an der unteren Grenze x = 0 beträgt 72 ml/km, die an der oberen Grenze x = 3 ist null. Das globale Maximum liegt also bei x = 0 und beträgt 72 ml/km.

$\text{solve}(60\cdot x-114=0,x)$ $\quad x=\frac{19}{10}$

$\frac{d}{dx}(k(x))$ $\quad 30\cdot x^2-114\cdot x+72$

$30\cdot x^2-114\cdot x+72|x=\frac{19}{10}$ $\quad -36.3$

$30\cdot x^2-114\cdot x+72|x=0$ $\quad 72$

$30\cdot x^2-114\cdot x+72|x=3$ $\quad 0$

</td>
</tr>
<tr>
<td>d
(2 BE)</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Lösung</td>
<td>Der Tankinhalt zum Startpunkt beträgt 1000 ml. Das Integral gibt die seit dem Start verbrauchte Kraftstoffmenge in ml an. Die Differenz beschreibt demzufolge die Restmenge des im Tank befindlichen Kraftstoffs in ml.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>e
(4 BE)</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Lösung</td>
<td>

Es ist die im Aufgabentext gegebene Erläuterung für den „Integralmittelwert“ auf die Funktion k anzuwenden. Das Integral gibt den Flächeninhalt an, teilt man diesen Wert durch die Länge des Intervalls, so erhält man die durchschnittliche Höhe des Rechtecks.

Bestimmung des Mittelwertes:

Der durchschnittliche Funktionswert im Intervall [a; b] = [0; 3] ist

$$\frac{1}{3-0} \cdot \int_0^3 k(x)dx.$$

$$\frac{1}{3-0} \cdot \int_0^3 k(x)\,dx \qquad \frac{141}{2}$$

$$\frac{1}{3-0} \cdot \int_0^3 k(x)\,dx \qquad 70.5$$

Der durchschnittliche Kraftstoffverbrauch im Intervall [0; 3] beträgt 70,5 ml/km.

Durchschnittlicher Kraftstoffverbrauch im Intervall [0; x] mit $0 \leq x \leq 3$:

Analog zu oben wird ermittelt:

$$\frac{1}{x-0} \cdot \int_0^x k(z)dz = \frac{5}{2}x^3 - 19x^2 + 36x + 66$$

$$\frac{1}{x-0} \cdot \int_0^x k(z)\,dz \qquad \frac{5 \cdot x^3 - 38 \cdot x^2 + 72 \cdot x + 132}{2}$$

</td>
</tr>
</table>

Analysis -Beispiel 2 (erhöhtes Anforderungsniveau)[4]

1	
a (4 BE)	
Lösung	Die Funktion w beschreibt die Wachstumsrate. Damit ist nachzuweisen, dass für 2040 ein lokaler Hochpunkt von w vorliegt. Die notwendige Bedingung für einen Extrempunkt ist mit der Existenz von Nullstellen der 1. Ableitungsfunktion f'(x) erfüllt. Es gilt w'(t) = 0 für t = 40. Ein hinreichendes Kriterium ist erfüllt, wenn w''(40) $\neq 0$ gilt. Dies ist mit w''(40) $=-\frac{1}{25}$ erfüllt. ©Definition der benötigten Funktionen $w(t):=60\cdot e^{\frac{-1}{3000}\cdot(t-40)^2}$ *Fertig* $\frac{d}{dt}(w(t))$ $\quad \frac{-(t-40)\cdot e^{\frac{-(t-40)^2}{3000}}}{25}$ $wa1(t):=\frac{-(t-40)\cdot e^{\frac{-(t-40)^2}{3000}}}{25}$ *Fertig* $\frac{d}{dt}(wa1(t))$ $\left(\frac{t^2}{37500}-\frac{4\cdot t}{1875}+\frac{1}{375}\right)\cdot e^{\frac{-(t-40)^2}{3000}}$

[4] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2020/abitur/pools2020/mathematik/erhoeht/2020_M_erhoeht_B_7.pdf

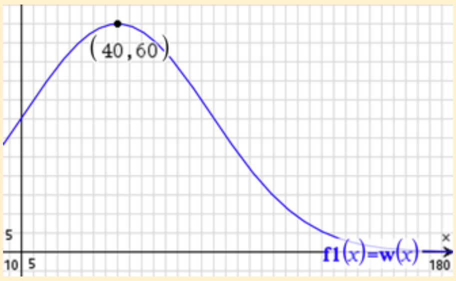
$$wa2(t):=\left(\frac{t^2}{37500}-\frac{4\cdot t}{1875}+\frac{1}{375}\right)\cdot e^{\frac{-(t-40)^2}{3000}}$$

Fertig

$\text{solve}(wa1(t)=0,t)$	$t=40$
$wa2(40)$	$\frac{-1}{25}$

Hinweis:

Zur Kontrolle der Ergebnisse bietet sich z. B. die Darstellung des Graphen der Funktion f an.
Der lokale Hochpunkt kann mit der Anweisung *Graph analysieren – Maximum* bestimmt werden.



Mit dem Ansatz $w(t) > 50$ lässt sich der gesuchte Zeitraum bestimmen, in dem die Fichten mehr als 50 cm pro Jahr wachsen.

$\text{solve}(w(t)>50,t)$	$16.61<t<63.39$

Man erhält näherungsweise $16{,}6 < t < 63{,}4$, d.h. den Zeitraum von 2017 bis einschließlich 2064.

<table>
<tr><td>b
(2 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>Dem Text entnimmt man, dass die Beziehung w(40 – t) = w(40 + t) auf Richtigkeit überprüft werden muss.

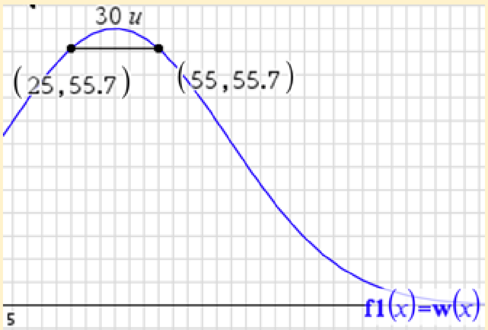
$w(40-t)=w(40+t)$ true

Die Überprüfung mit dem CAS-Rechner bestätigt dies.

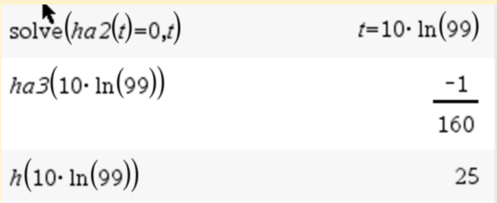
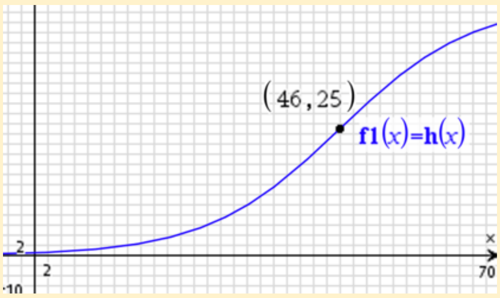
Hinweis:

Auch ohne Rechner ist der Nachweis einfach, da die unabhängige Variable im Funktionsterm nur im Exponenten vorkommt:
Für t= (40 – a) steht im Exponenten (40 – a – 40)^2 = a^2 und
Für t = (40 + a) steht im Exponenten (40 + a – 40)^2 = a^2.</td></tr>
<tr><td>c
(4 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>Mit dem Ansatz w(t) = w(t + 30) findet man t = 25, d. h. der gesuchte Zeitraum ist Oktober 2025 bis Oktober 2055. Die Wachstumsrate beträgt zu beiden Zeitpunkten $\approx 56\frac{cm}{a}$ und liegt dazwischen immer über diesem Wert, dies wird auch durch die Grafik bestätigt.

$\text{solve}(w(t)=w(t+30),t)$ $t=25$
$w(25)$ 55.66


</td></tr>
</table>

d (5 BE)	
Lösung	Der Term gibt die Höhe der Fichten in Metern im Oktober 2060 an. Begründung: 50 ist die Anfangshöhe in Zentimetern, es wird der Wert des bestimmten Integrals für den Zeitraum von 2000 bis 2060 addiert. Da die Funktion w(t) die Wachstumsrate pro Jahr angibt, der Graph von w auch durchgängig im positiven Bereich liegt, beschreibt das bestimmte Integral die Änderung der Höhe in diesem Zeitraum. Der Faktor $\frac{1}{100}$ führt zur Umrechnung von Zentimeter in Meter.  **Hinweis:** Es ist günstig, für die Zeichnung die Funktion h zu definieren. $h(t):=\frac{1}{100}\cdot\left(50+\int_0^t w(x)\,\mathrm{d}x\right)$ *Fertig*

2	
a (2 BE)	
Lösung	Die notwendige Bedingung für einen Wendepunkt ist mit der Existenz von Nullstellen der 2. Ableitungsfunktion w‘‘(t) erfüllt. Es gilt w‘‘(t) = 0 für t = 10·ln(99). Ein hinreichendes Kriterium ist erfüllt, wenn w‘‘‘(10·ln(99)$\neq 0$ gilt. Dies ist mit w‘‘‘(10·ln(99))=$-\frac{1}{160}$ erfüllt. Der Wendepunkt ist W(10·ln(99) | 25)  **Hinweis:** Der Operator „Bestimmen Sie“ erlaubt zwar auch eine grafische Lösung, diese liefert allerdings nur eine Näherungslösung. 

<table>
<tr><td>b
(3 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>Die maximale Wachstumsgeschwindigkeit liegt am Wendepunkt vor, diese beträgt hier h‘(10·ln·(99)) =1,25, d. h. 125cm/Jahr. Der im Text erwähnte Fall sollte also als Ausnahmefall betrachtet werden.</td></tr>
<tr><td>c
(4 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>Die Tangente ist diejenige Gerade y = g(x) = mx + n, die an ihrer Berührstelle mit dem Graphen der Funktion h in den Funktionswerten und den Anstiegen, also den Werten der 1. Ableitung, übereinstimmt.
Die Berührstelle ist hier die x-Koordinate des Wendepunktes
$x_w = 10 \cdot \ln(99)$.
Das Gleichungssystem aus den Gleichungen $h(x_w) = g(x_w)$ und $h'(x_w) = g'(x_w)$ ist zu lösen. Wegen $g'(x_w) = m$ ist dann
$h(x_w) = h'(x_w) \cdot x_w + n$.

$h(10\cdot\ln(99))=ha1(10\cdot\ln(99))\cdot 10\cdot\ln(99)+n$ $25=n+\frac{25\cdot\ln(99)}{2}$
$g(t):=ha1(10\cdot\ln(99))\cdot t+25-\frac{25\cdot\ln(99)}{2}$ Fertig
$g(t)$ $\frac{5\cdot t}{4}-\frac{25\cdot\ln(99)}{2}+25$

Man bestimmt die Tangentengleichung zu g(t) = $\frac{5}{4}t + 25 - \frac{25}{2} \cdot \ln(99)$.
Die maximale Abweichung d kann entweder mit der Funktion d(t) = h(t) – g(t) bestimmt werden, allerdings müsste man dann berücksichtigen, dass diese Abweichung auch negativ sein kann. Daher ist es günstiger d(t) = $\lvert h(t) - g(t) \rvert$ zu definieren, um die betragsmäßig größte Abweichung zu erhalten.

Man erhält an der Stelle t = 40 die maximale Abweichung und als maximale prozentuale Abweichung etwa 1,2%.

$d(t):=\lvert h(t)-g(t)\rvert \mid 40\le t\le 50$ Fertig
$\mathrm{fMax}(d(t),t)$ $t=40$
$\frac{d(40)}{h(40)}$ 0.0119</td></tr>
</table>

d
(6 BE)

Lösung

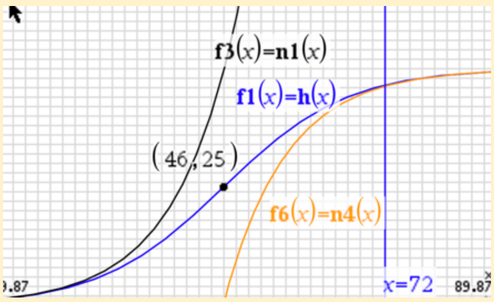
Die drei Graphen n_2, n_3 und n_4 sind Graphen, die durch Transformationen (Verschiebungen und Spiegelungen) aus dem Graphen von n_1 hervorgehen.

Der Graph von n_2 ist gegenüber dem Graphen von n_1 in den Wendepunkt W verschoben worden (entlang des Vektors $\overrightarrow{WO}$). Der Graph von n_3 liegt zum Graphen von n_2 punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung. Der Graph von n_4 ist gegenüber dem Graphen von n_3 um den Vektor $\overrightarrow{OW}$ verschoben. Somit ist der Graph n_4 punktsymmetrisch zu n_1 bezüglich des Wendepunktes W.

Da n_1 für die ersten 20 Jahre gilt, beschreibt n_4 aufgrund der Symmetrie von h bezüglich W ebenfalls 20 Jahre, wobei sich der „Startpunkt“ dieser 20 Jahre durch $10\cdot\ln(99) + (10\cdot\ln(99)) - 20 \approx 72$ berechnen lässt.
Damit beschreibt n_4 im Modell näherungsweise die zeitliche Entwicklung der Höhe der Fichten für den Zeitraum von etwa 72 bis etwa 92 Jahre nach der Pflanzung.

Hinweis1:

Eine grafische Veranschaulichung hilft hier, den Sachverhalt zu erfassen.



Hinweis 2:

Die Punktspiegelung eines Graphen f an einem beliebigen Punkt $Z(x_z \mid y_z)$ ergibt sich aus $s(x) = 2y_z - f(2x_z - x)$ (vgl. TNS-Datei)

$n4(x)=2\cdot 25-n1(2\cdot 10\cdot \ln(99)-x)$ true

3	
a (6 BE)	
Lösung	Der Baumstamm kann modellhaft durch einen Rotationskörper beschrieben werden, der durch Rotation einer linearen Funktion im Intervall [0; 1,3] um die x – Achse entsteht. Es wird zunächst diese lineare Funktion f mit $y = m \cdot x + n$ gesucht, die den Baum „umrandet". Bekannt ist, dass an der Stelle x = 1,3 der Funktionswert f(x) = 0,2 ist. (Radius des Rotationskörpers an dieser Stelle.) Außerdem muss m < 0 sein, weil sich der Baum nach oben hin verjüngt. Einsetzen von x = 1,3 und f(1,3) = 0,2 in $y = m \cdot x + n$ ergibt $0{,}2 = m \cdot 1{,}3 + n$. Damit ist $n = 0{,}2 - 1{,}3 \cdot m$. Mit diesem Ansatz findet man den Term) $f(x) = m \cdot x + 0{,}2 - 1{,}3 \cdot m = m \cdot (x - 1{,}3) + 0{,}2$ in Abhängigkeit vom unbekannten Anstieg m der linearen Funktion. Für das Volumen des Rotationskörpers gilt damit $\pi \cdot \int_0^{1,3} (m \cdot (x - 1{,}3) + 0{,}2)^2 \, dx = 0{,}17$. Wird diese Gleichung nach m aufgelöst, so ergeben sich zwei Lösungen. $\operatorname{solve}\left(\pi \cdot \int_0^{1.3} (m \cdot (x-1.3)+0.2)^2 \, dx = 0.17, m\right)$ $m=-0.006168 \text{ or } m=0.467707$ Von den beiden möglichen Werten für m muss man m = -0,0062 wählen, da der Anstieg negativ sein muss. Damit wird $f(x) = -0{,}0062 \cdot (x - 1{,}3) + 0{,}2$ die Gleichung, die den Stammradius in der Höhe x beschreibt. Den Durchmesser in einer Höhe von 15 m ergibt sich dann mit 2·f(15) $\approx 23\ cm$. $f(x):=-0.0062 \cdot (x-1.3)+0.2$ *Fertig* $2 \cdot f(15)$ 0.23012

b (4 BE)	
Lösung	Die quadratische Funktion findet man mit dem Ansatz $p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ mit Hilfe der gegebenen drei Bedingungen $p(10) = 0$, $p(40)=100$ und $p(60) = 250$. Das dadurch gegebene lineare Gleichungssystem hat die Lösungen $a = \frac{1}{12}, b = -\frac{5}{6}, c = 0$. $p(x):=a \cdot x^2+b \cdot x+c$ *Fertig* $\text{solve}\left(\begin{cases} p(10)=0 \\ p(40)=100 \\ p(60)=250 \end{cases}, \{a,b,c\}\right)$ $a=\frac{1}{12} \text{ and } b=\frac{-5}{6} \text{ and } c=0$ $p(80)\mid a=\frac{1}{12} \text{ and } b=\frac{-5}{6} \text{ and } c=0$ $\quad 466.667$ Damit ergibt sich $p(80) = \frac{1400}{3} \approx 467$. Der Preis für einen Fichtenstamm mit einem BHD von 80 cm beträgt etwa 467 €

Analytische Geometrie - grundlegendes Anforderungsniveau

Analytische Geometrie - Beispiel 1 (grundlegendes Anforderungsniveau)[5]

<table>
<tr><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>a
(3 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>
Die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ können als Richtungsvektoren der Ebene E aufgefasst werden. Ein Normalenvektor $\vec{n}$ von E steht senkrecht auf diesen beiden Vektoren. Die Skalarprodukte von $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ mit $\vec{n}$ müssen null sein. Die Koordinaten von $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ können aus dem Gleichungssystem ermittelt werden, dass aus den Gleichungen $\overrightarrow{AB}\circ\vec{n} = 0$ und $\overrightarrow{AC}\circ\vec{n} = 0$ gebildet wird.

©Definition der gegebenen Objekte
$a:=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}:b:=\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}:c:=\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$
$n:=\begin{bmatrix} n1 \\ n2 \\ n3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} n1 \\ n2 \\ n3 \end{bmatrix}$
$\text{solve}\left(\begin{cases} \text{dotP}(b-a,n)=0 \\ \text{dotP}(c-a,n)=0 \end{cases},\{n1,n2,n3\}\right)$ $n1=\frac{\boldsymbol{c1}}{3}$ and $n2=0$ and $n3=\boldsymbol{c1}$

Da das Gleichungssystem aus zwei Gleichungen mit drei Unbekannten besteht, ist es unterbestimmt. Es gibt unendlich viele Normalenvektoren zur Ebene E. Die Zählvariable $\boldsymbol{c1} \neq \mathbf{0}$ kann z. B. durch $\boldsymbol{c1} = 3$ festgelegt werden.

Die Normalengleichung ergibt sich aus $\overrightarrow{n_0}\circ(\vec{x} - \overrightarrow{OA}) = 0$ mit $\overrightarrow{n_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Die Koordinatengleichung von E ist x – 3z = 5 (siehe Kontrollergebnis).
</td></tr>
</table>

[5] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2020/abitur/pools2020/mathematik/grundlegend/2020_M_grundlege_12.pdf

	Hinweis: Alternative 1: Der Normalenvektor $\overrightarrow{n_0} = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ von E kann auch mit dem Vektorprodukt ermittelt werden: $\text{crossP}(b-a,c-a) \quad \begin{bmatrix}4\\0\\12\end{bmatrix}$ $\frac{1}{4}\cdot\begin{bmatrix}4\\0\\12\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}$ Alternative 2: Eine weitere Lösungsvariante bietet sich an, wenn man zunächst die Parametergleichung der Ebene E bestimmt und dann mit dem Gleichsetzen der Ebene E mit einer allgemeinen Ebene $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ das Gleichungssystem lösen lässt. Als Lösungsvariable nutzt man eine der freien Variablen x, y, z. $e(s,t):=a+s\cdot(b-a)+t\cdot(c-a) \quad \textit{Fertig}$ $\text{solve}\left(e(r,t)=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix},x\right) \quad x=-(3\cdot z-5) \text{ and } 2\cdot r+z=\frac{y+3}{2} \text{ and } t=z-2$ $\text{solve}\left(e(r,t)=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix},z\right) \quad z=\frac{-(x-5)}{3} \text{ and } r=\frac{2\cdot x+3\cdot y-1}{12} \text{ and } t=\frac{-(x+1)}{3}$ Aus der angezeigten z-Koordinate $z = \frac{-(x-5)}{3}$ ergibt sich x + 3z = 5.
b (3 BE)	
Lösung	Um den Winkel zu überprüfen, benötigt man den Winkel, den die Ebene E mit der xy-Ebene einschließt. Der Normalenvektor der xy-Ebene ist $\vec{m} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Der Winkel zwischen zwei Vektoren kann bestimmt werden durch

<table>
<tr><td></td><td>

$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Das ergibt hier $\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$. Hieraus folgt $\alpha \approx 18{,}4°$.

Die Umrechnung in Prozent ergibt ca. 33,3%.

$m:=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$
$\cos^{-1}\left(\frac{\mathrm{dotP}(n,m)}{\mathrm{norm}(n)\cdot \mathrm{norm}(m)}\right)$	18.43
$\tan(18.43)$	0.3332

Damit ist die geforderte Bedingung erfüllt.

</td></tr>
<tr><td>

c
(3 BE)

</td><td></td></tr>
<tr><td>

Lösung

</td><td>

Die Seite $\overline{AB}$ ist die Seite des Dreiecks ABC, welche parallel zum Untergrund verläuft, da die z-Koordinate der beiden Punkte gleich ist. Die aktuelle Länge der Seite $\overline{AB}$ entspricht dem Betrag der Strecke zwischen A und B und beträgt $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 5\,m - 1\,m = 4\,m$. Da dieser Wert 4% größer als der Ausgangswert x ist, gilt $4 = x \cdot 1{,}04$. Daraus ergibt sich ein Wert von $x \approx$ 3,85 m für die Länge der Seite vor dem ersten Aufspannen.

$\mathrm{norm}(b-a)$	4
$\frac{4}{1.04}$	3.846

</td></tr>
<tr><td>

d
(4 BE)

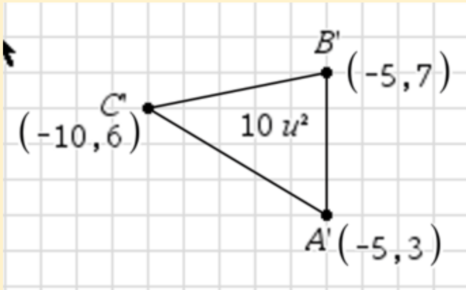
</td><td></td></tr>
<tr><td>

Lösung

</td><td>

Der obere der drei Punkte A, B und C ist der Punkt C, weil er die größte z-Koordinate hat. Davon ausgehend, dass das Sonnenlicht als parallel zum Vektor $\overrightarrow{AA'}$ verlaufend angesehen werden kann, lässt sich der ermittelte Punkt berechnen, indem man eine Geradengleichung aufstellt, welche durch den Punkt C in Richtung des Vektors $\overrightarrow{AA'}$ verläuft. Der Punkt auf der Geraden, welcher die z-Koordinate 0 hat, ist der gesuchte Punkt. Man erkennt, dass für die Gerade h mit t = $\frac{3}{2}$ die z-Koordinate 0 entsteht. Setzt man diesen Wert in die Geradengleichung ein, so erhält man die Koordinaten des Schattenpunktes.

</td></tr>
</table>

	$h(t):=c+t\cdot(a1-a)$ Fertig $h(t)$ $\begin{bmatrix}-4\cdot t-4\\2\cdot t+3\\3-2\cdot t\end{bmatrix}$ $h\left(\frac{3}{2}\right)$ $\begin{bmatrix}-10\\6\\0\end{bmatrix}$ Der Punkt hat die Koordinaten C‘(-10 | 6 | 0).
e (3 BE)	
Lösung	Da in der Aufgabenstellung der Operator „Bestimmen Sie …“ verwendet wird, kann die Lösung vollständig im Grafikfenster erfolgen.  Die Messung der Fläche des Dreiecks mit dem Geometriewerkzeug liefert als Flächeninhalt A = 10 m^2. **Hinweis:** Eine Berechnung des Flächeninhaltes ist mit der Formel A =$\frac{1}{2}g\cdot h$ möglich, man wählt als Grundseite $\overline{A'B'}=4\ m$, die zugehörige Höhe ist 5 m (Differenz der x-Werte von A‘ und C‘) und auch so erhält man A = 10 m^2.

2
(4 BE)

Lösung

Wegen der Bedingung, dass R und S immer den gleichen Abstand zu einem bestimmten Punkt auf der Geraden t haben, ist das Dreieck RST_λ gleichschenklig mit $|\overline{RT_\lambda}| = |\overline{ST_\lambda}|$.

Der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{RS}$ ist $M\left(\frac{(-1)+(-1)}{2} \,|\, \frac{2+4}{2} \,|\, \frac{3+3}{2}\right)$, also M(-1| 3| 3).

Der Vektor $\overrightarrow{MT_\lambda} = \overrightarrow{OT_\lambda} - \overrightarrow{OM}$ hat die Koordinaten

$$\overrightarrow{MT_\lambda} = \begin{pmatrix} -2-\lambda \\ 3 \\ -1+3\lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-\lambda \\ 0 \\ -4+3\lambda \end{pmatrix}.$$

Dann gilt für den Flächeninhalt des Dreiecks RST_λ: A = $\frac{1}{2} \cdot |\overline{RS}| \cdot |\overline{MT_\lambda}|$.

Dieser ist dann am kleinsten, wenn $|\overline{MT_\lambda}|$ am kleinsten ist. Dies trifft zu, wenn $|\overline{MT_\lambda}|$ senkrecht zum Richtungsvektor der Geraden t steht. Diese Beziehung wird mit dem angegebenen Skalarprodukt

$$\begin{pmatrix} -1-\lambda \\ 0 \\ -4+3\lambda \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$ dargestellt.

Hinweis:

Alternative Lösung:

Die Berechnung des Flächeninhalts eines beliebigen Dreiecks RST_λ kann z. B. mit Hilfe des Kreuzproduktes erfolgen:

A= $\frac{1}{2} \cdot \left(\left|\overrightarrow{RT_\lambda}\right| \times \left|\overrightarrow{RS}\right|\right) = \sqrt{10t^2 - 22t + 17}$

Für das Dreieck mit minimalem Flächeninhalt erhält man mit der Anweisung fMin den Wert t = $\frac{11}{10}$.

$\frac{1}{2} \cdot \text{norm}(\text{crossP}(g(t)-r, s-r))$ $\quad \sqrt{10 \cdot t^2 - 22 \cdot t + 17}$

$\text{fMin}\left(\sqrt{10 \cdot t^2 - 22 \cdot t + 17}, t\right)$ $\quad t=\frac{11}{10}$

Diesen Wert erhält man auch bei der Lösung der Gleichung

$$\begin{pmatrix} -1-\lambda \\ 0 \\ -4+3\lambda \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

$\text{solve}\left(\text{dotP}\left(\begin{bmatrix} -1-l \\ 0 \\ -4+3 \cdot l \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}\right)=0, l\right)$ $\quad l=\frac{11}{10}$

Analytische Geometrie -Beispiel 2 (grundlegendes Anforderungsniveau)[6]

<table>
<tr><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>a
(2 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>

Das Volumen eines Würfels mit der Kantenlänge a ist $V = a^3$. Die Kantenlänge dieses Würfels kann z. B. als Betrag des Vektors $\overrightarrow{AB}$ berechnet werden. Zunächst werden die Ortsvektoren der gegebenen Punkte auf dem CAS-Rechner definiert und gespeichert.

$a:=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}:b:=\begin{bmatrix}3\\-3\\3\end{bmatrix}:g:=\begin{bmatrix}0\\0\\9\end{bmatrix}:h:=\begin{bmatrix}-3\\3\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-3\\3\\6\end{bmatrix}$
$\text{norm}(b-a)$	$3\cdot\sqrt{3}$
$\text{norm}(b-a)$	5.19615
$(3\cdot\sqrt{3})^3$	$81\cdot\sqrt{3}$
$(3\cdot\sqrt{3})^3$	140.296

Die Kantenlänge des Würfels ist $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 3\cdot\sqrt{3} \approx 5{,}2\ LE$.
Sein Volumen ist $V = \left(3\cdot\sqrt{3}\,LE\right)^3 = 81\cdot\sqrt{3}\,VE \approx 140{,}3\ VE$.

</td></tr>
</table>

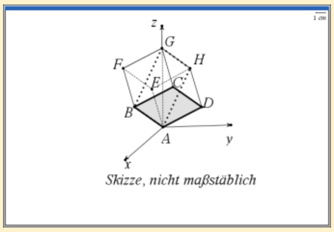
[6] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2020/abitur/pools2020/mathematik/grundlegend/2020_M_grundlege_13.pdf

<table>
<tr><td>b
(4 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>
Die Begründung kann z. B. rechnerisch erfolgen. Es wird gezeigt, dass die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{HG}$ gleich sind und dass die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AH}$ senkrecht zueinander verlaufen.

$b-a \quad \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$
$g-h \quad \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$
$\mathrm{dotP}(b-a,h-a) \quad 0$

Wegen $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{HG} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ sind diese Vektoren parallel und gleich lang. Das Skalarprodukt $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AH}$ ist null, also sind diese Seiten orthogonal zueinander. Daraus folgt, dass das Viereck ABGH ein Rechteck ist.
Der Schnittpunkt S der Diagonalen eines Rechtecks ist gleichzeitig auch der Mittelpunkt der Diagonalen. Man erhält ihn hier z. B. als Mittelpunkt $S\left(0 \,|0\, |\, \frac{9}{2}\right)$ der Diagonalen $\overline{AG}$.

Zeichnung:

$s:=\frac{a+g}{2} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{9}{2} \end{bmatrix}$


</td></tr>
</table>

c
(3 BE)

Lösung

Die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AH}$ können als Richtungsvektoren der Ebene L aufgefasst werden. Ein Normalenvektor $\vec{n}$ von L steht senkrecht auf diesen beiden Vektoren. Die Skalarprodukte von $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AH}$ mit $\vec{n}$ müssen null sein. Die Koordinaten von $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ können aus dem Gleichungssystem ermittelt werden, das aus den Gleichungen $\overrightarrow{AB} \circ \vec{n} = 0$ und $\overrightarrow{AH} \circ \vec{n} = 0$ gebildet wird.

$$n:=\begin{bmatrix} n1 \\ n2 \\ n3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} n1 \\ n2 \\ n3 \end{bmatrix}$$

$$\text{solve}\left(\begin{cases} \text{dotP}(b-a,n)=0 \\ \text{dotP}(h-a,n)=0 \end{cases},\{n1,n2,n3\}\right)$$

$$n1=\boldsymbol{c1} \text{ and } n2=\boldsymbol{c1} \text{ and } n3=0$$

Da das Gleichungssystem aus zwei Gleichungen mit drei Unbekannten besteht, ist es unterbestimmt. Es gibt unendlich viele Normalenvektoren zur Ebene L. Die Zählvariable ***c1***$\neq$ **0** kann z. B. durch ***c1*** = 1 festgelegt werden.

Die Normalengleichung ergibt sich aus $\overrightarrow{n_0} \circ \left(\vec{x} - \overrightarrow{OA}\right) = 0$ mit $\overrightarrow{n_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$n1=\boldsymbol{c1} \text{ and } n2=\boldsymbol{c1} \text{ and } n3=0$$

$$n0:=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{dotP}\left(n0,\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}-a\right)=0 \qquad x+y=0$$

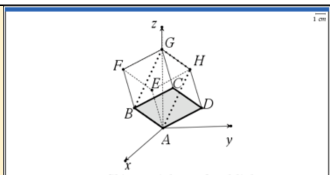
Die Koordinatengleichung von L ist x + y = 0 (siehe Kontrollergebnis).

Alternativ kann der Normalenvektor $\overrightarrow{n_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ von L auch mit dem Vektorprodukt ermittelt werden:

	crossP$(b-a,h-a)$ $\begin{bmatrix}-27\\-27\\0\end{bmatrix}$ $-27\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-27\\-27\\0\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}\text{true}\\\text{true}\\\text{true}\end{bmatrix}$
d (2 BE)	
Lösung	Der Winkel, den zwei Ebenen einschließen, entspricht dem Winkel, den ihre Normalenvektoren miteinander bilden. Der Normalenvektor der Ebene L wurde in der vorigen Teilaufgabe bestimmt zu $\overrightarrow{n_0} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. Die xz-Ebene hat den Normalenvektor $\overrightarrow{n_{xz}} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. Der Winkel zwischen zwei Vektoren kann bestimmt werden durch $\cos(\alpha) = \frac{\vec{a}\circ\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert}$. Das ergibt hier $\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}{\left\lvert\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\rvert\cdot\left\lvert\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rvert} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1}} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$. Daraus ergibt sich $\alpha = 45°$. $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right)$ 45

e
(4 BE)

Lösung



Skizze, nicht maßstäblich

Der Term $\frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{BG}\right|$ gibt die halbe Länge einer Diagonalen der Seitenflächen dieses Würfels an.

Der Vektor $\overrightarrow{n_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor der Ebene L.

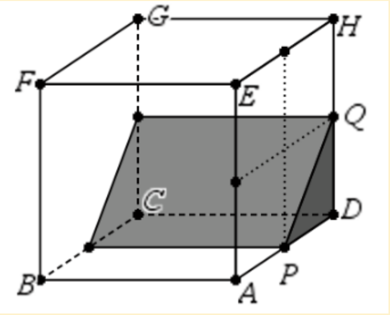
Der Vektor $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist der normierte Normalenvektor von L, d. h. er hat den Betrag $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = 1$. Damit gibt der Vektor $\overrightarrow{OM} + \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{BG}\right| \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ einen Vektor an, der in Richtung einer Seitenflächendiagonale von M aus die halbe Länge dieser Diagonalen durchläuft. Dieser Vektor verläuft also entweder von M nach F oder von M nach C.

Wegen $\overrightarrow{n_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ muss man von M aus in positive x-Richtung und in positive y-Richtung „laufen“ und gelangt deshalb zum Eckpunkt C des Würfels.

Der Term $\overrightarrow{AM} + \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{BG}\right| \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ gibt einen Vektor an, der von A nach C verläuft. Der gegebene Term entspricht also dem Vektor $\overrightarrow{AC}$, dem Ortsvektor des Punktes C.

$$m-a+\frac{1}{2}\cdot \mathrm{norm}(g-b)\cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2} \\ \frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2} \\ 6 \end{bmatrix}$$

Hinweis: Die Angabe der Koordinaten von $\overrightarrow{AC}$ ist in der Aufgabenstellung nicht verlangt.

f (5 BE)	
Lösung	Die Ebene durch die Mittelpunkte der angegebenen Kanten schneidet vom Würfel ein Prisma ab. Bezeichnet man z. B. den Mittelpunkt von $\overline{AD}$ mit P und den von $\overline{DH}$ mit Q, so kann das Dreieck DQP als Grundfläche des Prismas und die Würfelkante $\overline{CD}$ als Höhe des Prismas gewählt werden. Der Flächeninhalt des Dreiecks DQP macht ein Achtel des Flächeninhaltes der Würfelseite ADHE aus. Somit kann man mit acht solchen Prismen den Würfel vollständig füllen. Ein Prisma hat ein Volumen, das einem Achtel des Würfelvolumens entspricht. 

Analytische Geometrie - erhöhtes Anforderungsniveau

Analytische Geometrie -Beispiel 1 (erhöhtes Anforderungsniveau)[7]

1	
a (2 BE)	
Lösung	Der Richtungsvektor von g ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Er beschreibt den Einheitsvektor der x_1-Achse und ist parallel zu dieser Achse oder liegt sogar auf ihr. Der Ortsvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 9 \end{pmatrix}$ von g liegt nicht auf der x_1-Achse, deshalb ist g echt parallel zur x_1-Achse. Um zu prüfen, ob L auf g liegt, wird eine Punktprobe durchgeführt. Dazu wird die Gleichung $\begin{pmatrix} -\frac{25}{4} \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 9 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf eindeutige Lösbarkeit bezüglich des Parameters a untersucht. $l:=\begin{bmatrix} \frac{-25}{4} \\ -8 \\ 6 \end{bmatrix}$ $\quad\quad$ $\begin{bmatrix} \frac{-25}{4} \\ -8 \\ 6 \end{bmatrix}$ $xg(a):=\begin{bmatrix} 0 \\ -12 \\ 9 \end{bmatrix}+a\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad\quad$ *Fertig* $\text{solve}(l=xg(a),a)$ $\quad\quad$ false Das Ergebnis „false“ zeigt an, dass keine Lösung existiert. **Hinweis:** Man erkennt auch ohne Nutzung des CAS-Rechners, z. B. schon an der zweiten Zeile $-8 = -12 + a \cdot 0$, die eine falsche Aussage liefert, dass dieses Gleichungssystem keine Lösung besitzt.

[7] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2020/abitur/pools2020/mathematik/erhoeht/2020_M_erhoeht_B_2.pdf

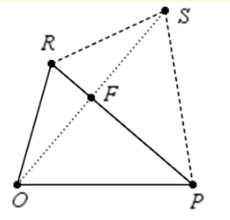
b (3 BE)	
Lösung	Ein Richtungsvektor der Ebene E ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Einen zweiten Richtungsvektor $\vec{u}$ erhält man durch den Vektor, der vom Aufpunkt K(0| -12| 9) von g zum Punkt $L\left(-\frac{25}{4}\middle\|-8\middle\|\,6\right)$ verläuft, also $\vec{u} = \overrightarrow{KL}$. Der Punkt K (oder der Punkt L) kann außerdem als fester Punkt der Ebene E gewählt werden. Aus den beiden Richtungsvektoren lässt sich mithilfe des Vektorprodukts ein Normalenvektor $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{u}$ der Ebene E erzeugen. Eine Koordinatengleichung von E erhält man dann z. B. über den Ansatz $\vec{n}^\circ\left(\vec{x} - \overrightarrow{OK}\right) = 0$. $k{:=}\begin{bmatrix} 0 \\ -12 \\ 9 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ -12 \\ 9 \end{bmatrix}$ $n{:=}\mathrm{crossP}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, l-k\right) \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ $\mathrm{dotP}\left(n, \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} - k\right) = 0 \qquad 3\cdot x2 + 4\cdot x3 = 0$ Als Koordinatengleichung von E ergibt sich $3x_2 + 4x_3 = 0$. Dies stimmt mit dem Kontrollergebnis überein.

c (4 BE)	
Lösung	Um zu zeigen, dass OPQR ein achsensymmetrisches Trapez ist, wird zunächst gezeigt, dass die Vektoren $\overrightarrow{RQ}$ und $\overrightarrow{OP}$ parallel zueinander sind. Außerdem sind im achsensymmetrischen Trapez die Schenkel gleich lang, also müsste gelten $\left\|\overrightarrow{OR}\right\| = \left\|\overrightarrow{PQ}\right\|$. Die notwendigen Rechnungen werden mit dem CAS durchgeführt: $p:=\begin{bmatrix} \frac{-25}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}:q:=\begin{bmatrix} \frac{-21}{2} \\ -12 \\ 9 \end{bmatrix}:r:=\begin{bmatrix} -2 \\ -12 \\ 9 \end{bmatrix}:o:=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $q-r \quad \begin{bmatrix} \frac{-17}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $p-o \quad \begin{bmatrix} \frac{-25}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\text{norm}(p-q) \quad \sqrt{229}$ $\text{norm}(o-r) \quad \sqrt{229}$ Die Vektoren $\overrightarrow{RQ}$ und $\overrightarrow{OP}$ sind Vielfache von $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und deshalb parallel zueinander. Außerdem gilt $\left\|\overrightarrow{OR}\right\| = \left\|\overrightarrow{PQ}\right\| = \sqrt{229}$. Damit ist der verlangte Nachweis erbracht.

d (5 BE)	

Lösung

Der Punkt S wird als Spiegelpunkt des Punktes O am Lotfußpunkt F betrachtet. Den Punkt F ermittelt man als kürzesten Abstand des Punktes O von der Geraden durch P und R.



$g(t):=p+t\cdot(r-p)$	*Fertig*
$\text{fMin}(\text{norm}(g(t)-o),t)$	$t=\frac{175}{447}$
$o+2\cdot\left(g\left(\frac{175}{447}\right)-o\right)$	$\begin{bmatrix}\frac{-2500}{149}\\ \frac{-1400}{149}\\ \frac{1050}{149}\end{bmatrix}$

Der Punkt S hat die Koordinaten $S\left(-\frac{2500}{149}\,\middle|\,-\frac{1400}{149}\,\middle|\,\frac{1050}{149}\right)$

Alternative Lösung:

Es sei G die Ebene, die senkrecht zur Ebene E liegt und die darüber hinaus die Punkte P und R enthält.
Der Punkt S kann dann als Spiegelpunkt von O bei der Spiegelung an der Ebene G ermittelt werden. Dazu wiederum wird die Lotgerade ℓ zu G benötigt, die durch O verläuft. Mithilfe von ℓ kann der Lotfußpunkt F als Schnittpunkt von ℓ mit G bestimmt werden.
Damit kann dann S berechnet werden durch die Beziehung
$\overrightarrow{OS} = 2\cdot\overrightarrow{OF}$.

Gleichung der Ebene G:
Der Normalenvektor $\vec{m}$ von G muss senkrecht zum Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}$ von E sein. Da das Skalarprodukt von $\vec{m}$ und $\vec{n}$ deshalb den Wert null haben muss, ist der Ansatz $\vec{m} = \begin{pmatrix}x\\-4\\3\end{pmatrix}$ sinnvoll:

$$\vec{m}\circ\vec{n} = \begin{pmatrix}x\\-4\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix} = 0$$

Die Punkte $P\left(-\frac{25}{2}\,\middle|\,0\,\middle|\,0\right)$ und $R(-2\,|\,-12\,|\,9)$ müssen die Ebenengleichung für G erfüllen. Sie kann in Normalenform sowohl durch $\vec{m}\circ\left(\vec{x}-\overrightarrow{OP}\right) = 0$ als auch durch $\vec{m}\circ\left(\vec{x}-\overrightarrow{OR}\right) = 0$ beschrieben werden. Das Absolutglied in der zugehörigen Koordinatengleichung muss für beide Gleichungen übereinstimmen.

$$m:=\begin{bmatrix} x \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}:n:=\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}:p:=\begin{bmatrix} \frac{-25}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}:r:=\begin{bmatrix} -2 \\ -12 \\ 9 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -2 \\ -12 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{dotP}\left(m,\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix}-p\right)=0 \qquad \left(x1+\frac{25}{2}\right)\cdot x-4\cdot x2+3\cdot x3=0$$

$$\mathrm{dotP}\left(m,\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix}-r\right)=0 \qquad (x1+2)\cdot x-4\cdot x2+3\cdot x3-75=0$$

Die Absolutglieder lauten $d=\frac{25}{2}x$ und $d=2x-75$. Es wird nun berechnet, für welchen Wert von x die beiden Absolutglieder gleich sind.

$$\mathrm{solve}\left(\frac{25}{2}\cdot x=2\cdot x-75,x\right) \qquad x=\frac{-50}{7}$$

Der Normalenvektor der Ebene G ist $\vec{m}=\begin{pmatrix} -\frac{50}{7} \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Die Gleichung der Ebene G ist $-\frac{50}{7}x_1-4x_2+3x_3-\frac{625}{7}=0$.

$$(x1+2)\cdot x-4\cdot x2+3\cdot x3-75=0|x=\frac{-50}{7} \qquad \frac{-50\cdot x1}{7}-4\cdot x2+3\cdot x3-\frac{625}{7}=0$$

Lotfußpunkt F berechnen:

Der Normalenvektor von G ist auch der Richtungsvektor der Lotgeraden ℓ, die außerdem den Ursprung O als festen Punkt enthalten muss.

$\ell(t)=t\cdot\begin{pmatrix} -\frac{50}{7} \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Einsetzen der Koordinaten von $\ell(t)$ in die Gleichung der Ebene G und den zugehörigen Wert für t ausrechnen:

$$\mathrm{solve}\left(\frac{\frac{-50\cdot -50}{7}\cdot t}{7}-4\cdot -4\cdot t+3\cdot 3\cdot t-\frac{625}{7}=0,t\right) \qquad t=\frac{175}{149}$$

Mit $t=\frac{175}{149}$ und $\ell(t)=t\cdot\begin{pmatrix}-\frac{50}{7}\\-4\\3\end{pmatrix}$ werden die Koordinaten des Lotfußpunktes $F\left(-\frac{1250}{149}\,\middle|\,-\frac{700}{149}\,\middle|\,\frac{525}{149}\right)$ berechnet.

$$l(t):=t\cdot\begin{bmatrix}\frac{-50}{7}\\-4\\3\end{bmatrix} \qquad \textit{Fertig}$$

$$f:=\left(l\left(\frac{175}{149}\right)\right)^{T} \qquad \begin{bmatrix}\frac{-1250}{149} & \frac{-700}{149} & \frac{525}{149}\end{bmatrix}$$

$$s:=2\cdot f \qquad \begin{bmatrix}\frac{-2500}{149} & \frac{-1400}{149} & \frac{1050}{149}\end{bmatrix}$$

Der Punkt $S\left(-\frac{2500}{149}\,\middle|\,-\frac{1400}{149}\,\middle|\,\frac{1050}{149}\right)$ ergibt sich aus $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OO}+2\cdot\overrightarrow{OF}$.

Weitere alternative Lösung:

Der Punkt S liegt auf einer Geraden h, die vom Ursprung O über den Lotfußpunkt F verläuft. Dabei ist weiter zu berücksichtigen, dass S genau so weit von F entfernt ist wie O.
Wir betrachten die Ebene H, die senkrecht zur Geraden durch P und R ist, also den Richtungsvektor von h als Normalenvektor besitzt und in der der Punkt O liegt.
Die Gerade durch P und R hat den Richtungsvektor $\overrightarrow{PR}$.

Der Vektor $\overrightarrow{PR}$ ist der Normalenvektor $\overrightarrow{n_H}=\begin{pmatrix}\frac{21}{2}\\-12\\9\end{pmatrix}$ von H.

So kann eine Normalengleichung von H angegeben werden durch $\overrightarrow{n_H}\circ(\vec{x}-\vec{o})=0$.

$$nh:=r-p \qquad \begin{bmatrix}\frac{21}{2}\\-12\\9\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{dotP}\left(nh,\begin{bmatrix}x1\\x2\\x3\end{bmatrix}\right)=0 \qquad \frac{21\cdot x1}{2}-12\cdot x2+9\cdot x3=0$$

Als Koordinatengleichung von H ergibt sich $\frac{21}{2}x_1-12x_2+9x_3=0$.
Der Lotfußpunkt F ist der Durchstoßpunkt der Geraden durch P und R durch die Ebene H. Diese Gerade hat die Gleichung $\vec{x}=\overrightarrow{OP}+c\cdot\overrightarrow{PR}$.

	$xpr(c):=p+c\cdot(r-p)$ *Fertig* $xpr(c)$ $\begin{bmatrix}\frac{21\cdot c}{2}-\frac{25}{2}\\ -12\cdot c\\ 9\cdot c\end{bmatrix}$ Es wird der Durchstoßpunkt F dieser Geraden $\overrightarrow{x_{PR}}(c)$ durch die Ebene H bestimmt durch Einsetzen der Koordinaten der Geradengleichung in die Ebenengleichung und der Ermittlung der Lösungsmenge. $\text{solve}\left(\frac{21}{2}\cdot\left(\frac{21\cdot c}{2}-\frac{25}{2}\right)-12\cdot -12\cdot c+9\cdot 9\cdot c=0,\right.$ ▸ $c=\frac{175}{447}$ Dieser Wert von c wird in die Gleichung $\overrightarrow{x_{PR}}(c)$ eingesetzt, um F zu erhalten: $f:=xpr\left(\frac{175}{447}\right)$ $\begin{bmatrix}\frac{-1250}{149}\\ \frac{-700}{149}\\ \frac{525}{149}\end{bmatrix}$ Der Punkt F hat die Koordinaten $F\left(-\frac{1250}{149}\mid -\frac{700}{149}\mid \frac{525}{149}\right)$. Der Punkt S ergibt sich aus $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OO}+2\cdot\overrightarrow{OF}$. $s:=2\cdot(f-o)$ $\begin{bmatrix}\frac{-2500}{149}\\ \frac{-1400}{149}\\ \frac{1050}{149}\end{bmatrix}$ Der Punkt S hat die Koordinaten $S\left(-\frac{2500}{149}\mid -\frac{1400}{149}\mid \frac{1050}{149}\right)$.
e (2 BE)	
Lösung	Der Winkel zwischen zwei Ebenen entspricht dem Winkel zwischen ihren Normalenvektoren. Die x_1x_2–Ebene hat den Normalenvektor $\overrightarrow{n_{12}}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, die Ebene E hat den Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}=\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}$.

Die Größe des von ihnen eingeschlossenen Winkels α wird berechnet durch $\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{n_{12}} \circ \overrightarrow{n_E}}{|\overrightarrow{n_{12}}| \cdot |\overrightarrow{n_E}|}$.

$$\cos^{-1}\left(\frac{\operatorname{dotP}\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\3\\4\end{bmatrix}\right)}{\operatorname{norm}\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)\cdot \operatorname{norm}\left(\begin{bmatrix}0\\3\\4\end{bmatrix}\right)}\right) \qquad 36.8699$$

Der geneigte Teil der Bahn und der Untergrund schließen einen Winkel von ca. 36,9° ein.

f (2 BE)	
Lösung	Es ist nachzuweisen, dass alle in der Aufgabenstellung gegebenen Punkte die Gleichung der Ebene E erfüllen. Dazu werden die Koordinaten der Punkte B_k in die Gleichung der Ebenen E: $3x_2 + 4x_3 = 0$ eingesetzt und es wird geprüft, ob sich eine wahre Aussage ergibt. Die Rechnung mit dem CAS ergibt „true“, also ist die Bedingung erfüllt. Der Ball hat Kontakt zur Minigolfbahn auf dem betrachteten Teil des Weges. DelVar k *Fertig* $\text{solve}\left(3\cdot\left(-8\cdot k+\frac{8}{3}\cdot k^2\right)+4\cdot\left(6\cdot k-2\cdot k^2\right)=0,k\right)$ true **Hinweis:** Da weiter vorn (in Teilaufgabe b) die Variable k mit den Koordinaten eines Punktes gespeichert wurde, muss sie, wenn sie hier in anderem Zusammenhang verwendet werden soll, mit der Anweisung DelVar gelöscht werden.

g (4 BE)	

Lösung

Es muss geprüft werden, ob die Bahnkurve die Gerade g(PQ) berührt.

Die Gerade g(PQ) hat die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{25}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -12 \\ 9 \end{pmatrix}$.

$q-p \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -12 \\ 9 \end{bmatrix}$

$xpq(d):=p+d\cdot(q-p) \quad \textit{Fertig}$

Die Vektorgleichung der Bahnkurve wird gleichgesetzt mit dieser Geradengleichung, und die Lösungsmenge wird unter Beachtung des Sachzusammenhanges interpretiert.

$kurve(k):=\begin{bmatrix} -5-3\cdot k \\ -8\cdot k+\frac{8}{3}\cdot k^2 \\ 6\cdot k-2\cdot k^2 \end{bmatrix} \quad \textit{Fertig}$

$\text{solve}(kurve(k)=xpq(d),k,d)$

$k=\frac{9}{4} \text{ and } d=\frac{3}{8} \text{ or } k=\frac{15}{2} \text{ and } d=\frac{-15}{2}$

Das Lösungspaar $k = \frac{15}{2}$ und $d = -\frac{15}{2}$ entfällt, da d < 0 einen Punkt liefert, der außerhalb der Minigolfbahn liegt. Für $d = \frac{3}{8}$ erhält man jedoch einen Punkt, der zwischen P und Q auf E liegt und somit einen Berührpunkt mit der Bahn.

$\left(kurve\left(\frac{9}{4}\right)\right)^{T} \quad \begin{bmatrix} \frac{-47}{4} & \frac{-9}{2} & \frac{27}{8} \end{bmatrix}$

$\left(xpq\left(\frac{3}{8}\right)\right)^{T} \quad \begin{bmatrix} \frac{-47}{4} & \frac{-9}{2} & \frac{27}{8} \end{bmatrix}$

Der gemeinsame Punkt G der Seitenbegrenzung und der Bahnkurve ist
$G\left(-\frac{47}{4} \,|\, -\frac{9}{2} \,|\, \frac{27}{8}\right)$.

h
(3 BE)

Lösung

Der kleinste Abstand der Bahnpunkte vom Punkt L kann durch das Minimum von $\left|\overrightarrow{LB_k}\right|$ bestimmt werden.

$abst(k):=\text{norm}(kurve(k)-l)$	*Fertig*
$\text{fMin}(abst(k),k)$	$k=1.15552$
$abst(k)\|k=1.15552$	3.64656

Das Minimum von $\left|\overrightarrow{LB_k}\right|$ wird für $k \approx 1{,}156$ angenommen.
Es beträgt ca. 3,6 LE, dies entspricht bei dem gegebenen Maßstab einer Entfernung von etwa 36 cm.

Analytische Geometrie -Beispiel 2 (erhöhtes Anforderungsniveau)[8]

1	
a (2 BE)	
Lösung	Das Volumen eines Würfels mit der Kantenlänge a ist $V = a^3$. Die Kantenlänge dieses Würfels kann z. B. als Betrag des Vektors $\overrightarrow{AB}$ berechnet werden. Zunächst werden die Ortsvektoren der gegebenen Punkte im CAS-Rechner definiert und gespeichert.

$a:=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}:b:=\begin{bmatrix}3\\-3\\3\end{bmatrix}:g:=\begin{bmatrix}0\\0\\9\end{bmatrix}:h:=\begin{bmatrix}-3\\3\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-3\\3\\6\end{bmatrix}$
$\text{norm}(b-a)$	$3\cdot\sqrt{3}$
$\text{norm}(b-a)$	5.19615
$(3\cdot\sqrt{3})^3$	$81\cdot\sqrt{3}$
$(3\cdot\sqrt{3})^3$	140.296

Die Kantenlänge des Würfels ist $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 3\cdot\sqrt{3} \approx 5{,}2\;LE$.
Sein Volumen ist $V = \left(3\cdot\sqrt{3}\;LE\right)^3 = 81\cdot\sqrt{3}\;VE \approx 140{,}3\;VE$.

b (3 BE)	
Lösung	Die Begründung kann z. B. rechnerisch erfolgen. Es wird gezeigt, dass die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{HG}$ gleich sind und dass die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AH}$ senkrecht zueinander verlaufen.

[8] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2020/abitur/pools2020/mathematik/erhoeht/2020_M_erhoeht_B_3.pdf

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

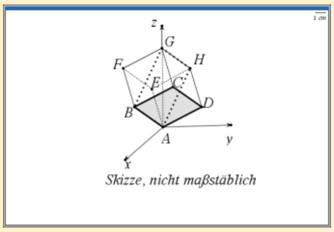
$b-a \quad \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$

$g-h \quad \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\mathrm{dotP}(b-a,h-a) \quad 0$

Wegen $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{HG} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ sind diese Vektoren parallel und gleich lang. Das Skalarprodukt $\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AH}$ ist null, also sind diese Seiten orthogonal zueinander. Daraus folgt, dass das Viereck ABGH ein Rechteck ist.

Zeichnung:



</td>
</tr>
<tr>
<td>c
(3 BE)</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Lösung</td>
<td>

Die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AH}$ können als Richtungsvektoren der Ebene L aufgefasst werden. Ein Normalenvektor $\vec{n}$ von L steht senkrecht auf diesen beiden Vektoren. Die Skalarprodukte von $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AH}$ mit $\vec{n}$

müssen null sein. Die Koordinaten von $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ können aus dem Gleichungssystem ermittelt werden, dass aus den Gleichungen $\overrightarrow{AB}\circ\vec{n} = 0$ und $\overrightarrow{AH}\circ\vec{n} = 0$ gebildet wird.

$n{:=}\begin{bmatrix} n1 \\ n2 \\ n3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} n1 \\ n2 \\ n3 \end{bmatrix}$

$\mathrm{solve}\left(\begin{cases} \mathrm{dotP}(b-a,n)=0 \\ \mathrm{dotP}(h-a,n)=0 \end{cases},\{n1,n2,n3\}\right)$

$n1=\boldsymbol{c1}$ and $n2=\boldsymbol{c1}$ and $n3=0$

Da das Gleichungssystem aus zwei Gleichungen mit drei Unbekannten besteht, ist es unterbestimmt. Es gibt unendlich viele Normalenvektoren zur Ebene L. Die Zählvariable ***c1***$\neq$ **0** kann z. B. durch ***c1*** = 1 festgelegt werden.

</td>
</tr>
</table>

Die Normalengleichung ergibt sich aus $\overrightarrow{n_L} \circ (\vec{x} - \overrightarrow{OA}) = 0$ mit $\overrightarrow{n_L} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$n1 = c1 \text{ and } n2 = c1 \text{ and } n3 = 0$$

$$n0 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{dotP}\left(n0, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - a\right) = 0 \qquad x + y = 0$$

Die Koordinatengleichung von L ist x + y = 0 (siehe Kontrollergebnis).

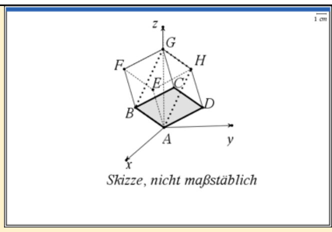
Alternativ kann der Normalenvektor $\overrightarrow{n_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ von L auch mit dem Vektorprodukt $\overrightarrow{n_0} = \overrightarrow{AH} \times \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 27 \\ 27 \\ 0 \end{pmatrix} = 27 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ermittelt werden:

$$\mathrm{crossP}(h-a, b-a) \qquad \begin{bmatrix} 27 \\ 27 \\ 0 \end{bmatrix}$$

d (2 BE)	
Lösung	Der Winkel, den zwei Ebenen einschließen, entspricht dem Winkel, den ihre Normalenvektoren miteinander bilden. Der Normalenvektor der Ebene L wurde in der vorigen Teilaufgabe bestimmt zu $\overrightarrow{n_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die xz-Ebene hat den Normalenvektor $\overrightarrow{n_{xz}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Der Winkel zwischen zwei Vektoren kann bestimmt werden durch $\cos(\alpha) = \frac{\vec{a}\circ\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert}$. Das ergibt hier $\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\lvert\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\rvert\cdot\left\lvert\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\rvert} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1}} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$. Daraus ergibt sich $\alpha = 45°$. $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right)$ 45

e (5 BE)	

Lösung



Es sei M der Mittelpunkt der Seitendiagonale $\overline{BG}$. Man gelangt vom Ursprung A zum Punkt F z. B. entlang des Vektorzuges von A über B nach M und dann nach F. Die Punkte A, B und G sind gegeben, sodass auch die Koordinaten von M leicht ermittelt werden können. Das letzte Stück macht der Vektor $\overrightarrow{MF}$ aus. Sein Betrag entspricht der halben Länge einer Seitendiagonalen, also gilt z. B. $|\overrightarrow{BM}| = |\overrightarrow{MF}|$. Außerdem steht $\overrightarrow{MF}$ senkrecht zu $\overrightarrow{BM}$, d. h. $\overrightarrow{MF}$ ist parallel zum Normalenvektor der Ebene L. Es ist jedoch zu beachten, ob $\overrightarrow{MF}$ zum Normalenvektor der Ebene L gleich- oder entgegengesetzt gerichtet ist.
Mithin ist $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MF}$, oder kürzer $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MF}$

Koordinaten von M:

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BG}$, also $M\left(\frac{3}{2} | -\frac{3}{2} | 6\right)$

$$a:=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}:b:=\begin{bmatrix}3\\-3\\3\end{bmatrix}:g:=\begin{bmatrix}0\\0\\9\end{bmatrix}:h:=\begin{bmatrix}-3\\3\\6\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}-3\\3\\6\end{bmatrix}$$

$$m:=b-a+\frac{1}{2}\cdot(g-b) \qquad \begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\ \frac{-3}{2}\\ 6\end{bmatrix}$$

Betrag von $\overrightarrow{MF}$:

$$|\overrightarrow{MF}| = |\overrightarrow{BM}| = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{6}$$

$$\mathrm{norm}(m-b) \qquad \frac{3\cdot\sqrt{6}}{2}$$

Richtung von $\overrightarrow{MF}$:

Der Vektor $\overrightarrow{MF}$ ist entgegengesetzt gerichtet zum Normalenvektor $\overrightarrow{n_L} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ der Ebene L, denn $\overrightarrow{n_L}$ zeigt in einen anderen Halbraum bezüglich der Ebene L wie der Vektor $\overrightarrow{MF}$**.** Das kann man sich klar machen, wenn man mit der „Rechte-Hand-Regel" die Richtung von $\overrightarrow{n_0} = \overrightarrow{AH} \times \overrightarrow{AB}$ bestimmt und mit der Richtung von $\overrightarrow{MF}$ vergleicht.

Der Vektor $\overrightarrow{n_L}$ wird normiert, also auf die Länge 1 gebracht, indem man seine Koordinaten durch seinen Betrag dividiert. Der Betrag dieses Vektors ist $|\overrightarrow{n_L}| = \sqrt{2}$. Man erhält den Vektor $\overrightarrow{n_{Lo}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, der die Richtung von $\overrightarrow{MF}$ angibt, und der die Länge 1 hat.

Hinweis:

Die Normierung eines Vektors kann auch mit der Anweisung *unitv(Vektor)* erfolgen.

$$nl := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{unitV}(nl) \qquad \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Konstruktion des Vektors $\overrightarrow{MF}$:

Wird der zu $\overrightarrow{n_L}$ entgegengesetzt gerichtete Vektor $-\overrightarrow{n_{Lo}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $|\overrightarrow{MF}| = |\overrightarrow{BM}| = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{6}$ multipliziert, so haben wir den gewünschten Vektor $\overrightarrow{MF} = -\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} \\ \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ erhalten.

$$mf := \frac{-3 \cdot \sqrt{6}}{2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \frac{-3 \cdot \sqrt{3}}{2} \\ \frac{-3 \cdot \sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Koordinaten von F:

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MF} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} \\ \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} \\ -\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} \\ 6 \end{pmatrix}$$

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

$m-a+mf$ $\quad \begin{bmatrix} \frac{3}{2}-\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-3\cdot\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2} \\ 6 \end{bmatrix}$

Die Koordinaten von F sind $F\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\cdot\sqrt{3}\,\middle|\,-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\cdot\sqrt{3}\,\middle|\,6\right)$.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

f
(2 BE)

</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>

Lösung

</td>
<td>

Man bestimmt zunächst eine Gleichung der Geraden durch B und G und bringt dann diese Geradengleichung mit der xy–Ebene zum Schnitt, um den Punkt S zu erhalten. Dann bestimmt man die Längen der Strecken $\overline{SB}$ und $\overline{BG}$ und bildet den Quotienten dieser Zahlen.

Gleichung der Geraden durch B und G:

g(BG): $\vec{x}=\overrightarrow{AB}+t\cdot\overrightarrow{BG}=\begin{pmatrix}3\\-3\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-3\\3\\6\end{pmatrix}$

$xbg(t):=b+t\cdot(g-b)$ $\quad$ *Fertig*

$xbg(t)$ $\quad \begin{bmatrix} 3-3\cdot t \\ 3\cdot t-3 \\ 6\cdot t+3 \end{bmatrix}$

Gleichung der xy-Ebene: $z=0$

Schnittpunkt S:

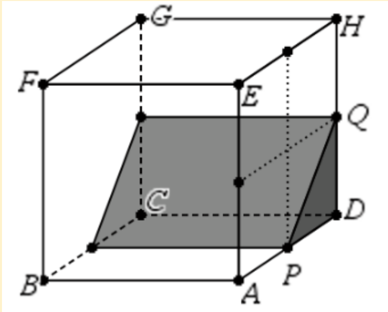
Die z-Koordinate der Geradengleichung null setzen und daraus t berechnen: $3+6t=0,\ t=-\frac{1}{2}$

Den Wert von t in die Geradengleichung einsetzen ergibt $S\left(\frac{9}{2}\,\middle|\,-\frac{9}{2}\,\middle|\,0\right)$.

$s:=xbg\left(\frac{-1}{2}\right)$ $\quad \begin{bmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{-9}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$

Quotienten bilden:

</td>
</tr>
</table>

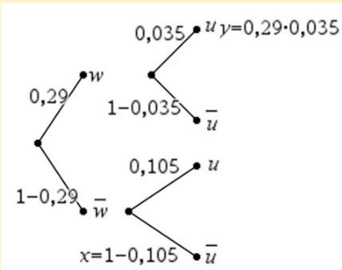
	$\frac{\lvert\overline{SB}\rvert}{\lvert\overline{BG}\rvert} = \frac{1}{2}$. Der Punkt B teilt die Strecke $\overline{SG}$ im Verhältnis 1 : 2 (von S aus gesehen). $\frac{\text{norm}(b-s)}{\text{norm}(g-b)} \quad \frac{1}{2}$
g (5 BE)	
Lösung	 Die Ebene durch die Mittelpunkte der angegebenen Kanten schneidet vom Würfel ein Prisma ab (siehe Zeichnung). Bezeichnet man z. B. den Mittelpunkt von $\overline{AD}$ mit P und den von $\overline{DH}$ mit Q, so kann das Dreieck DQP als Grundfläche des Prismas und die Würfelkante $\overline{CD}$ als Höhe des Prismas gewählt werden. Der Flächeninhalt des Dreiecks DQP macht ein Achtel des Flächeninhaltes der Würfelseite ADHE aus und somit kann man mit acht solchen gleichartigen Prismen den Würfel vollständig füllen. Das beschriebene Prisma hat ein Volumen, das einem Achtel des Würfelvolumens entspricht.
h (3 BE)	
Lösung	Die Ebenen z = k mit 0 < k < 9 sind Ebenen, die parallel zur xy-Ebene sind und in der Höhe k über dieser Ebene liegen. Da die Raumdiagonale $\overline{AG}$ des Würfels auf der z-Achse und A im Ursprung liegt, befinden sich die Eckpunkte B, E und D in gleicher Höhe 3 LE über der xy-Ebene. Ebenso liegen die Eckpunkte C, F und H alle in einer Höhe von 6 LE über der xy-Ebene. Deshalb gilt: Für 0 < k ≤ 3 sowie für 6 ≤ k < 9 ist die Schnittfigur ein Dreieck. Für 3 < k < 6 ist die Schnittfigur ein Sechseck.

Stochastik - grundlegendes Anforderungsniveau

Stochastik -Beispiel 1 (grundlegendes Anforderungsniveau)[9]

1	
a (2 BE)	
Lösung	Es gilt $X \sim B_{40;0.29}$ und gesucht ist $P(X \geq 12)$. binomCdf(40,0.29,12,40) 0.504011 Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 12 der 40 Beschäftigten weiblich sind, beträgt ca. 0,504.
b (3 BE)	
Lösung	Der Term beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass von 40 Beschäftigten höchstens zehn weiblich sind. Die Wahrscheinlichkeit beträgt etwa 0,36.
c (2 BE)	
Lösung	Die Anzahl der nicht weiblichen Beschäftigten muss 30 betragen, die Anzahl der weiblichen Beschäftigten demzufolge 40 – 30 = 10. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(X = 10)$ für $X \sim B_{40;0.29}$ oder $P(Y = 30)$ für $Y \sim B_{40;0.71}$. binomPdf(40,0.29,10) 0.123013 binomPdf(40,0.71,30) 0.123013 Die gesuchte Wahrscheinlichkeit p hat einen Wert von rund p = 0,123.

9 https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2020/abitur/pools2020/mathematik/grundlegend/2020_M_grundlege_19.pdf

d (3 BE)	
Lösung	Man berechnet den Erwartungswert E(X) der Zufallsgröße X, denn in seiner Umgebung werden die Wahrscheinlichkeiten P(X) am größten sein. $$E(X) = n \cdot p = 40 \cdot 0{,}29 = 11{,}6$$ 40· 0.29 11.6 Die beiden natürlichen Zahlen, die am dichtesten bei 11,6 liegen, sind 11 und 12, also müssen die Wahrscheinlichkeiten P(X=11) und P(X=12) den größten Wert haben.
2	
a (3 BE)	
Lösung	Das Baumdiagramm wird durch die gegebenen Wahrscheinlichkeiten vervollständigt. Dann lassen sich die gesuchten Wahrscheinlichkeiten mithilfe der Pfadregeln ermitteln.  Es ist nach den Pfadregeln $x = 1 - 0{,}105 = 0{,}895$ und $y = 0{,}29 \cdot 0{,}035 \approx 0{,}01$.

b (3 BE)	
Lösung	Es ist der Anteil der nicht weiblichen Unzufriedenen unter allen unzufriedenen Personen zu ermitteln. Mithilfe des Baumdiagramms und der Pfadregeln lässt sich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es sich um eine unzufriedene Person aus der Gesamtheit handelt, ermitteln durch $p_1 = 0{,}29 \cdot 0{,}035 + (1 - 0{,}29) \cdot 0{,}105 = 0{,}0847$ Die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um eine nicht weibliche unzufriedene Person handelt, ist $p_2 = (1 - 0{,}29) \cdot 0{,}105 = 0{,}07455$. Damit ist die Wahrscheinlichkeit p dafür, dass es sich um eine nicht

weibliche Person unter allen Unzufriedenen handelt, gleich
$p = \frac{p_2}{p_1} = \frac{0{,}71 \cdot 0{,}105}{0{,}29 \cdot 0{,}035 + 0{,}71 \cdot 0{,}105} = \frac{0{,}07455}{0{,}0847} \approx 0{,}88.$

$\frac{0.71 \cdot 0.105}{0.29 \cdot 0.035 + 0.71 \cdot 0.105} \quad 0.880165$

Hinweis:
Auch der Satz von Bayes kann zur Lösung verwendet werden:
$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.
Eine weitere Möglichkeit besteht in der Verwendung einer Vierfeldertafel:

	u	$\bar{u}$	
w	$0{,}035 \cdot 0{,}29$		$0{,}29$
$\bar{w}$	$0{,}105 \cdot 0{,}71$		$0{,}71$
	$0{,}847$		1

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit kann als Quotient $\frac{0{,}105 \cdot 0{,}71}{0{,}847}$ aus der Vierfeldertafel berechnet werden.

c
(4 BE)

Lösung

Hier ist eine Vierfeldertafel das Mittel der Wahl.

	u	$\bar{u}$	
w	$0{,}04 \cdot x$		x
$\bar{w}$	$0{,}1 \cdot (1-x)$		$1-x$
			1

Die Unbekannte x gibt den Anteil der weiblichen Personen an. Von denen sind 4%, also $0{,}04 \cdot x$ unzufrieden. Es gibt dann $1 - x$ nicht weibliche Personen, von denen 10%, also $0{,}1 \cdot (1 - x)$ unzufrieden sind. Da der Anteil der zuletzt genannten Personengruppe fünfmal so groß wie der der zuerst beschriebenen Gruppe ist, führt das auf die Gleichung $0{,}1 \cdot (1 - x) = 5 \cdot 0{,}04 \cdot x$. Deren Lösung ist $x = \frac{1}{3}$.
Der Anteil der weiblichen Beschäftigten in der Abteilung beträgt rund

	33,3%. $\text{solve}(0.1\cdot(1-x)=5\cdot 0.04\cdot x,x)$ $\quad x=0.333333$ $x=0.33333333333333$ ▸approxFraction(5.E-1▸ $\quad x=\frac{1}{3}$ **Hinweis**: Eine Lösung mittels Baumdiagramm ist ebenfalls möglich.

Stochastik -Beispiel 2 (grundlegendes Anforderungsniveau)[10]

<table>
<tr><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>a
(2 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>Mit den angegebenen Daten und Ereignisbezeichnungen ergibt sich folgende Vierfeldertafel.

<table>
<tr><th></th><th>E_2</th><th>$\overline{E_2}$</th><th></th></tr>
<tr><td>E_1</td><td>58 %</td><td>10 %</td><td>68 %</td></tr>
<tr><td>$\overline{E_1}$</td><td>13 %</td><td>19 %</td><td>32 %</td></tr>
<tr><td></td><td>71 %</td><td>29 %</td><td>100 %</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>b
(2 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>Für die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit gilt:
$P_{E_1}(E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)}$.
Es ergibt sich damit $P_{E_1}(E_2) = \frac{0{,}58}{0{,}68} \approx 85\%$.</td></tr>
<tr><td>c
(3 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>Der Term beschreibt das genannte Ereignis.

Begründung: Der Term beschreibt das Ereignis, dass E_1 oder nur E_2 eintritt.
Dies ist genau dann der Fall, wenn mindestens eines der Ereignisse E_1 oder E_2 eintritt.

Die Lösung findet man auch gut durch eine Betrachtung der Vierfeldertafel. Nicht zum Ereignis gehört nur das Feld $\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2$ und damit der Fall, dass weder E_1 noch E_2 eintreten. Das entsprechende Gegenereignis dazu ist „Mindestens eines der Ereignisse E_1 oder E_2 tritt ein.“</td></tr>
</table>

[10] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2020/abitur/pools2020/mathematik/grundlegend/2020_M_grundlege_20.pdf

d (2 BE)	
Lösung	Das gesuchte Ereignis ist das Gegenereignis zu „beide Ereignisse treten ein“. Damit ergibt sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit P(D) = 1-P($\overline{D}$)= 1 - 0,58 = 0,42 = 42%.
e (2 BE)	
Lösung	Die Zufallsgröße X: „Anzahl der Unternehmen, die Präsenzfortbildungen aber keine Onlinefortbildung anbieten“, ist binomialverteilt, es gilt $X \sim B_{25;0.13}$ und gesucht ist $P(X \geq 5)$. binomCdf(25,0.13,5,25) 0.2183 Die Wahrscheinlichkeit, dass mindesten fünf Präsenzfortbildungen angeboten werden, beträgt ca. 22%.

<table>
<tr><td>f
(4 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>

Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit muss die folgende Gleichung, die die Summenwahrscheinlichkeit berechnet, nach p gelöst werden.

$\sum_{k=2}^{30}\binom{30}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{30-k}$=0,98

$$\text{solve}\left(\sum_{k=2}^{30}\left(\text{nCr}(30,k)\cdot p^k\cdot(1-p)^{30-k}\right)=0.98,p\right)$$
$$p=^-0.0342 \text{ or } p=0.1795$$

Ebenfalls denkbar wäre der Ansatz über das Gegenereignis:

$$\text{solve}\left(\sum_{k=0}^{1}\left(\text{nCr}(30,k)\cdot p^k\cdot(1-p)^{30-k}\right)=0.02,p\right)$$
$$p=^-0.0342 \text{ or } p=0.1795$$

In beiden Fällen erhält man p ≈ 18%.

Hinweise:

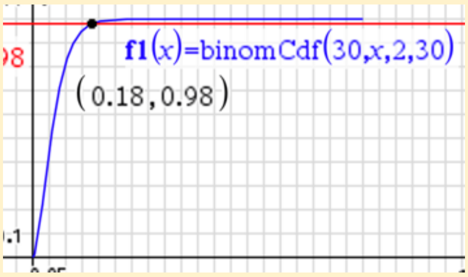
Alternative Lösung 1

Nutzung des nsolve-Befehls in Verbindung mit binomcdf()

$\text{nSolve}(\text{binomCdf}(30,p,2,30)=0.98,p,0)$ 0.1795

Alternative Lösung 2

Grafische Lösung: Es wird die Funktion binomcdf(30,x,2,30) dargestellt und deren Schnittpunkt mit dem y-Wert von 0,98 gesucht.



Alternative Lösung 3
Systematisches Probieren

</td></tr>
</table>

	binomCdf(30,0.1,2,30) 0.8163 binomCdf(30,0.3,2,30) 0.9997 binomCdf(30,0.2,2,30) 0.9895 binomCdf(30,0.17,2,30) 0.9733 binomCdf(30,0.18,2,30) 0.9803
2	
a (2 BE)	
Lösung	Das Modell kann nicht angewendet werden, weil es sich nicht um ein „Ziehen mit Zurücklegen“ handelt, sondern um „Ziehen ohne Zurücklegen“, denn eine schon einmal befragte Person wird nicht noch einmal befragt. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine ausgewählte Person mit dem Angebot zufrieden ist, verändert sich bei jedem Zug. Beim „Ziehen ohne Zurücklegen“ lässt sich das Modell der Binomialverteilung nur näherungsweise anwenden, wenn der Umfang N der Gesamtheit sehr viel größer ist als der Umfang n der Stichprobe (Faustformel N > 20n). Das ist hier aber nicht der Fall, denn $120 = 1{,}6 \cdot 75$.
b **(3 BE)**	
Lösung	Zur Lösung der Aufgabe kann die sogenannte „Lottoformel“ genutzt werden, die zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten beim Ziehen ohne Zurücklegen genutzt werden kann: P(B) = $\frac{\binom{80}{50}\cdot\binom{40}{25}}{\binom{120}{75}} \approx 15{,}8\%$ $\frac{\text{nCr}(80,50)\cdot \text{nCr}(40,25)}{\text{nCr}(120,75)}$ 0.1583 **Hinweis:** Hier zum Vergleich die Lösung mit dem Modell der Binomialverteilung: binomPdf$\left(75,\frac{2}{3},50\right)$ 0.0973

Stochastik - erhöhtes Anforderungsniveau

Stochastik-Beispiel 1 (erhöhtes Anforderungsniveau)[11]

1	
a (2 BE)	
Lösung	Es gibt zehn unterschiedliche Musikstücke auf der CD. Bei der Auswahl des ersten Stücks braucht man noch nicht berücksichtigen, ob es schon gespielt wurde. Bei der Auswahl des zweiten Stücks darf das erste nicht wieder genommen werden, es bleiben also noch neun von zehn Stücken zur Auswahl. Bei der Auswahl des dritten Stücks dürfen die zwei zuerst gespielten nicht noch einmal vorkommen, es bleiben noch acht von zehn zur Auswahl. **Berechnung der Wahrscheinlichkeit:** $p = \frac{10}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{10} = \frac{72}{100} = \frac{18}{25} = 0{,}72$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die ersten drei Musikstücke verschieden voneinander sind, beträgt 72%.
b (4 BE)	
Lösung	Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der gespielten langen Stücke. Man kann für X das Modell der Binomialverteilung zugrunde legen, denn es gibt genau zwei Möglichkeiten für die Dauer eines Musikstücks, es ist entweder kurz oder lang. Wenn man weiterhin voraussetzt, dass die Auswahl eines langen oder kurzen Stücks unabhängig voneinander erfolgt, ist das Modell einer Binomialverteilung mit den Parametern n = 12 und $p = \frac{6}{10} = 0{,}6$ für die Zufallsgröße X gerechtfertigt. Es gilt also hier $X \sim B_{12;0,6}$. **Berechnung der Wahrscheinlichkeiten:** (1) genau fünf lange Stücke: $P(X = 5) \approx 0{,}10$

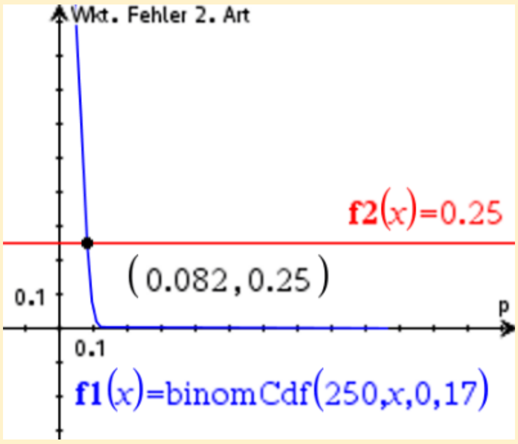
[11] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2020/abitur/pools2020/mathematik/erhoeht/2020_M_erhoeht_B_11.pdf

	(2) mehr lange als kurze Stücke: $P(X > 6) \approx 0{,}67$ binomPdf(12,0.6,5) 0.100902 binomCdf(12,0.6,7,12) 0.665209 Die Wahrscheinlichkeit, dass bei 12 Stücken genau fünf lange Stücke dabei sind, beträgt ca. 10%, mehr lange als kurze Stücke dabei sind, beträgt ca. 67%.
2	
a (3 BE)	
Lösung	Es soll vermieden werden, dass ein Preisnachlass verlangt wird, obwohl der Anteil der fehlerhaften Hüllen kleiner als 5% ist. Begründung: Durch diese Wahl der Nullhypothese wird das Risiko für den Fehler, der vermieden werden soll, begrenzt.
b (5 BE)	
Lösung	Die Nullhypothese wird irrtümlich abgelehnt, wenn in der Stichprobe zufällig ziemlich viele fehlerhafte Hüllen vorhanden sind, obwohl in Wirklichkeit weniger als 5% fehlerhafte Hüllen vorhanden sind. Der Verwerfungsbereich für die angegebene Nullhypothese liegt also rechts. Es handelt sich um einen einseitigen, rechtsseitigen Hypothesentest. Für die Zufallsgröße Y: „Anzahl der fehlerhaften Hüllen“ kann eine Binomialverteilung mit n = 150 und p = 0,05 zugrunde gelegt werden. Wegen des 10%-igen Signifikanzniveaus muss diejenige ganze Zahl k bestimmt werden, für die erstmals gilt $P(Y \geq k) \leq 0{,}1$. **Berechnung des Verwerfungsbereichs:** Einfach und übersichtlich ist das Verfahren durch systematisches Probieren. Dabei wird die untere Grenze g_u des Verwerfungsbereiches $[g_u; 150]$ solange verändert, bis die zugehörige Wahrscheinlichkeit erstmals unter 10% liegt.

	binomCdf(150,0.05,gu,150)|gu=10 0.219116 binomCdf(150,0.05,gu,150)|gu=11 0.132215 binomCdf(150,0.05,gu,150)|gu=12 0.074004 Ergebnis: Wenn mindestens zwölf fehlerhafte Hüllen unter den 150 Hüllen entdeckt werden, wird die Nullhypothese abgelehnt. **Variante:** Man verwendet die inverse Binomialverteilung, muss dann aber k über das Gegenereignis bestimmen: $P(Y \leq k-1) \geq 0{,}9$ invBinom(0.9,150,0.05,1) $\begin{bmatrix} 10 & 0.867785 \\ 11 & 0.925996 \end{bmatrix}$ Auf diesem Wege ergibt sich k – 1 = 11, also ebenfalls k = 12.
c (4 BE)	
Lösung	Ein Fehler 2. Art liegt hier vor, wenn die Anzahl fehlerhafter Hüllen zufällig im Annahmebereich/Nichtverwerfungsbereich der Nullhypothese liegt, obwohl in Wirklichkeit der Anteil fehlerhafter Hüllen größer als 5% ist. Der Annahmebereich wird hier für n = 250 und p = 0,05 angegeben durch das Intervall [0, 17]. Es muss geprüft werden, für welche Zahl $p > 0{,}05$, die Wahrscheinlichkeit $P(Y \leq 17)$ die Wahrscheinlichkeit erstmals kleiner als 0,25 ist, wobei Y als binomialverteilt mit n = 250 und p vorausgesetzt wird. **Ermittlung von p:** Einfach und übersichtlich ist wieder das Verfahren durch systematisches Probieren. Dabei wird die Wahrscheinlichkeit p solange verändert, bis die zugehörige Wahrscheinlichkeit erstmals unter 25% liegt. binomCdf(250,p,0,17)|p=0.08 0.287468 binomCdf(250,p,0,17)|p=0.081 0.268319 binomCdf(250,p,0,17)|p=0.082 0.249968 binomCdf(250,p,0,17)|p=0.083 0.232431

Variante:

Auch eine grafische Lösung ist denkbar. Man zeichnet den Graphen für die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art in Abhängigkeit von der Einzelwahrscheinlichkeit p sowie den Graphen von y = 0,25. Der Schnittpunkt beider Graphen (mit dem Befehl *Graph analysieren* ermittelt) bringt dann einen Näherungswert für den gesuchten Wert der Wahrscheinlichkeit p. Sinnvoll wäre es, dieses grafisch ermittelte Ergebnis noch rechnerisch zu prüfen und zu verfeinern, etwa so, wie oben dargestellt wurde.



Man könnte auch beide Verfahren kombinieren, indem man erst grafisch und dann rechnerisch untersucht.

3	
a (3 BE)	
Lösung	Man überlegt sich zunächst, wie viele Ereignisse es gibt, dass bei drei Drehungen zweimal der graue Sektor getroffen wird. Dann wäre noch zu bestimmen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, bei einer Umdrehung den grauen Sektor zu treffen, wenn man seinen Öffnungswinkel b kennt. Werden beide Erkenntnisse miteinander verknüpft, kann man auf den Term schließen. **Anzahl der Ereignisse:** Bei jeder Umdrehung können zwei Ergebnisse eintreten, nämlich „grau“ oder „weiß“. Bei drei Umdrehungen sind das dann $2^3 = 8$ mögliche Ereignisse. Die Anzahl der günstigen Ereignisse, also zweimal „grau“, beträgt drei: {(grau, grau, weiß), (grau, weiß, grau), (weiß, grau, grau)}. Man kann diese Anzahl auch durch den Binomialkoeffizienten $\binom{3}{2}$ angeben, denn er gibt an, auf wie viele verschiedene Arten man zwei Objekte aus einer Menge von drei verschiedenen Objekten auswählen kann. **Wahrscheinlichkeit für das Treffen des grauen Sektors:** Entscheidend für die Anzeige des grauen Sektors ist, dass der Pfeil auf das Kreisbogenstück zeigt, das den grauen Sektor begrenzt. Der Anteil dieses grauen Kreisbogenstücks am Kreisumfang ist $\frac{b}{2\pi}$, dann hat der der weiße Kreisbogen einen Anteil von $1-\frac{b}{2\pi}$. Die Wahrscheinlichkeit für das Anzeigen zweier grauer und eines weißen Sektors ist $\left(\frac{b}{2\pi}\right)^2 \cdot \left(1-\frac{b}{2\pi}\right)$. Da es dafür drei Möglichkeiten gibt, hat die gesuchte Wahrscheinlichkeit den Wert $\binom{3}{2} \cdot \left(\frac{b}{2\pi}\right)^2 \cdot \left(1-\frac{b}{2\pi}\right) = \frac{-3\cdot b^2\cdot(b-2\pi)}{8\cdot\pi^3}$ Dieser Term lässt sich mithilfe der Anweisung *expand* umformen zu $\frac{3\cdot b^2}{4\cdot\pi^2} - \frac{3\cdot b^3}{8\cdot\pi^3}$, was dem in der Aufgabenstellung angegebenem Term entspricht.

$$\text{nCr}(3,2)\cdot\left(\frac{b}{2\cdot\pi}\right)^2\cdot\left(1-\frac{b}{2\cdot\pi}\right) \quad \frac{-3\cdot b^2\cdot(b-2\cdot\pi)}{8\cdot\pi^3}$$

$$\text{expand}\left(\frac{-3\cdot b^2\cdot(b-2\cdot\pi)}{8\cdot\pi^3}\right) \quad \frac{3\cdot b^2}{4\cdot\pi^2}-\frac{3\cdot b^3}{8\cdot\pi^3}$$

b
(4 BE)

Lösung

Der Erwartungswert für den Gewinn der Band beim Spiel müsste null sein, wenn man als Werte der Zufallsgröße „Gewinn der Band bei vielfacher Durchführung des Spiels“ die Höhe des Gewinns der Band bei „Treffer“ (- 8 €) sowie „Niete“ (1 €) beim Gewinnspiel betrachtet.

Rechnung:

Für die Zufallsgröße „X: Gewinn der Band“ kann man zunächst folgende Tabelle aufstellen:

x_k	- 8	1
$P(X = x_k)$	p	1 - p

Erwartungswert 0: $(-8)\cdot p + 1\cdot(1-p) = 0$
Daraus erhält man $p = \frac{1}{9}$.
Das kann nun gleichgesetzt werden mit der Berechnung aus Teilaufgabe 3a:

$$\frac{3\cdot b^2}{4\cdot\pi^2}-\frac{3\cdot b^3}{8\cdot\pi^3}=\frac{1}{9}$$

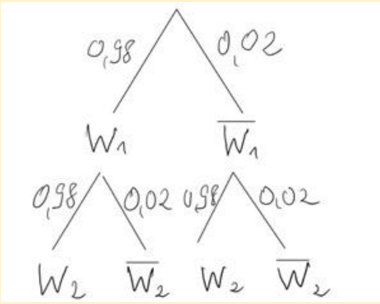
Daraus erhält man $b_1 \approx 1{,}37$ und $b_2 \approx 6{,}03$. Die negative Lösung entfällt.

$$\text{solve}\left(\frac{3\cdot b^2}{4\cdot\pi^2}-\frac{3\cdot b^3}{8\cdot\pi^3}=\frac{1}{9},b\right)$$
$$b=-1.1144 \text{ or } b=1.36702 \text{ or } b=6.03057$$

Für die Öffnungswinkel $b_1 \approx 1{,}37$ und $b_2 \approx 6{,}03$ (in Bogenmaß) des grauen Sektors kann die Band bei vielfacher Durchführung des Spiels und dem Verkauf der CD gleiche Einnahmen erwarten.

Stochastik -Beispiel 2 (erhöhtes Anforderungsniveau)[12]

<table>
<tr><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>a
(2 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>
Mit den angegebenen Daten ergibt sich folgendes Baumdiagramm:
W_1: der eine der beiden Widerstände ist funktionstüchtig
W_2: der andere der beiden Widerstände ist funktionstüchtig



Für das Ereignis E_1 ist zu berücksichtigen, dass es sich auf Kategorie A bezieht. Das Bauteil ist funktionstüchtig, wenn beide Widerstände funktionieren. Es gilt $E_1 = W_1 \cap W_2$.
Ereignis E_2 bezieht sich auf Kategorie B. Das Bauteil ist funktionstüchtig, wenn mindestens einer der beiden Widerstände funktioniert.
Es gilt $E_2 = (W_1 \cap W_2) \cup (W_1 \cap \overline{W_2}) \cup (\overline{W_1} \cap W_2)$. Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit von E_2 ist es sinnvoll, über die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses zu gehen. Das Gegenereignis zu „mindestens ein Bauteil funktioniert“ ist „kein Bauteil funktioniert“. Für die gesuchten Wahrscheinlichkeiten gilt:
$P(E_1) = P(W_1 \cap W_2) = 0{,}98 \cdot 0{,}98 = 0{,}9604$

$P(E_2) = 1 - P(\overline{W_1} \cap \overline{W_1}) = 1 - (0{,}02 \cdot 0{,}02) = 0{,}9996$

Eine Vierfeldertafel kann ebenso zur Lösung genutzt werden.
</td></tr>
</table>

[12] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2020/abitur/pools2020/mathematik/erhoeht/2020_M_erhoeht_B_12.pdf

	W_1	$\overline{W_1}$	
W_2	0,9604	0,0196	0,98
$\overline{W_2}$	0,0196	0,0004	0,02
	0,98		

$P(E_1) = 0{,}9604$
$P(E_2) = 1 - 0{,}0004 = 0{,}9996$

b
(2 BE)

Lösung

Die Aussage ist richtig.
Begründung:
Es sei Ereignis E_n: „Ein Bauteil der Kategorie A mit n Widerständen $W_1, W_2, \ldots, W_n$“. Damit es funktioniert, müssen alle n Widerstände funktionieren. Deshalb ist $P(E_n) = P(W_1 \cap W_2 \cap \ldots \cap W_n)$.
Nach der Pfadregel folgt daraus $P(E_n) = P(W_1) \cdot P(W_2) \cdot \ldots \cdot P(W_n)$. Für die Wahrscheinlichkeit der Funktionstüchtigkeit eines Bauteils der Kategorie A mit n-Widerständen gilt: $P(E_n) = 0{,}98^n$. Der Wert von $0{,}98^n$ nimmt wegen $0 < 0{,}98 < 1$ mit zunehmendem Wert von n ab und nähert sich für große n der Zahl 0.

c
(2 BE)

Lösung

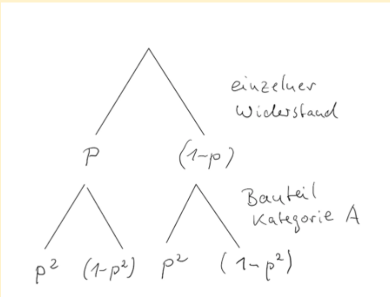
Für die Funktionstüchtigkeit eines Bauteils der Kategorie B gilt:
$P(E_2) = 1 - P(\overline{W_1} \cap \overline{W_1}) = 1 - ((1-p) \cdot (1-p)) = 2p - p^2$

d
(3 BE)

Lösung

Die Zufallsgröße X: „Anzahl der funktionsfähigen Bauteile der Kategorie B ist binomialverteilt, es gilt $X \sim B_{10;p}$ und gesucht ist $P(X = 10) = 0{,}95$.
Damit gilt $P(X = 10) = (2p - p^2)^{10} = 0{,}95$
Der CAS-Rechner gibt mehrere Lösungen an, von denen nur $p \approx 0{,}928$ zutreffen kann, da $0 \leq p \leq 1$ gilt.

<table>
<tr><td></td><td>$\text{solve}\left(\left(2\cdot p-p^2\right)^{10}=0.95,p\right)$
$p=-0.4124 \text{ or } p=0.9285 \text{ or } p=1.072 \text{ or } p=2.412$</td></tr>
<tr><td>e
(3 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>
Die Termstruktur lässt vermuten, dass die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses über das zugehörige Gegenereignis ermittelt werden soll, es gilt P(E) =1 – P($\bar{E}$) also hier P(E) =1 – (1 – p)·(1 – p^2).
(1 – p) ist die Wahrscheinlichkeit, dass der einzelne Widerstand nicht funktionstüchtig ist, (1 – p^2) ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Bauteil der Kategorie A nicht funktionstüchtig ist.
Damit ist (1 – p)·(1 – p^2) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Bestandteile nicht funktionstüchtig sind.
Somit beschreibt der Term 1 – (1 – p)·(1 – p^2) das Gegenereignis zu: „Beide Bestandteile sind nicht funktionstüchtig“.
P(E) beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass diese Kombination funktionstüchtig ist.



</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>a
(4 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>
Mit der Betragsungleichung $|h-p| \leq 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}$ lässt sich das Konfidenzintervall zu einer gegebenen Stichprobengröße n und einer ermittelten relativen Häufigkeit h zur Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95% angeben. Mit n = 200 und h = $\frac{176}{200}$ ergibt sich das Intervall näherungsweise zu [0,828; 0,918].
$\text{solve}\left(\left|\frac{176}{200}-p\right| \leq 1.96\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{200}},p\right)$ $0.8277 \leq p \leq 0.918$
</td></tr>
</table>

Hinweis:

Folgende Näherungslösungen sind denkbar:

1. Nutzung des Statistikmoduls des CAS-Rechners (Menü – Statistik- Konfidenzintervalle) liefert [0,835; 0,925].

zInterval_1Prop 176,200,0.95: *stat.results*

"Titel"	"1−Prop z−Intervall"
"CLower"	0.834963
"CUpper"	0.925037
"p̂"	0.88
"ME"	0.045037
"n"	200.

2. Nutzung der $\frac{1}{\sqrt{n}}$ -Beziehung liefert [0,8093; 0,9507].

$$\frac{176}{200}+\sqrt{\frac{1}{200}} \qquad 0.950711$$

$$\frac{176}{200}-\sqrt{\frac{1}{200}} \qquad 0.809289$$

Das berechnete Konfidenzintervall ist die Menge aller Werte von p, für die gilt: Unter der Annahme, dass p der tatsächliche Anteil

funktionstüchtiger Widerstände ist, liegt h = $\frac{176}{200}$ in dem bezüglich p symmetrischen Intervall von Anteilen funktionstüchtiger Widerstände, die in einer Stichprobe von 200 Widerständen insgesamt mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% auftreten.

b
(4 BE)

Lösung

Mit der gegebenen Ungleichung bestimmt man den Mindestumfang einer Stichprobe, der benötigt wird, damit die Länge des Konfidenzintervalls zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95% für jeden Anteil funktionstüchtiger Widerstände in der Stichprobe höchstens 0,05 beträgt.
1. Zeile: Es wird eine Näherungsformel verwendet, in der die unbekannte Wahrscheinlichkeit p durch die relative Häufigkeit ersetzt wird.

2. Zeile: Der Term $\sqrt{\frac{h\cdot(1-h)}{n}}$ nimmt für h = 0,5 sein Maximum an.

Deshalb kann man, ohne h zu kennen, den Wert für n mit der Ungleichung in der dritten Zeile abschätzen.

Lineare Algebra - grundlegendes Anforderungsniveau

Beispiel 1 (grundlegendes Anforderungsniveau)[13]

1	
a (2 BE)	
Lösung	Die Übergangsmatrix L ist so angelegt, dass man in der k-ten Spalte ablesen kann, wie viele weibliche Tiere im Durchschnitt aus jedem der Zustände „unreif", „jung" oder „alt" in einen der drei möglichen Zustände „unreif", „jung" oder „alt" übergehen können. <table><tr><td></td><td>unreif</td><td>jung</td><td>alt</td></tr><tr><td>unreif</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>jung</td><td>0,75</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>alt</td><td>0</td><td>0,8</td><td>0,7</td></tr></table> **Interpretation:** Eintrag 2: Jährlich bringen die alten Tiere im Mittel zwei weibliche Nachkommen zur Welt. Eintrag 0,8: 80% der jungen Tiere überleben das zweite Lebensjahr.
b (3 BE)	
Lösung	Um den Zustand vor einem Jahr zu beschreiben, muss der Vektor $\vec{v_o}$, der die Zusammensetzung zu Beobachtungsbeginn beschreibt, mit der Inversen L^{-1} der Übergangsmatrix L multipliziert werden. **Rechnung und Interpretation:**

[13] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2020/abitur/pools2020/mathematik/grundlegend/2020_M_grundlege_10.pdf

$$v:=\begin{bmatrix}24\\46\\6\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}24\\46\\6\end{bmatrix}$$

$$l:=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\0.75 & 0 & 0\\0 & 0.8 & 0.7\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\0.75 & 0 & 0\\0 & 0.8 & 0.7\end{bmatrix}$$

$$l^{-1}\cdot v \qquad \begin{bmatrix}61.3333\\-5.33333\\14.6667\end{bmatrix}$$

Die negative Zahl für Jungtiere in Zeile zwei zeigt, dass das Modell nicht sinnvoll ist, um Zustände in der Vergangenheit zu beschreiben, denn die Anzahl der Tiere muss eine nicht negative Zahl sein.

c
(3 BE)

Lösung

Für den gesuchten Faktor b muss die Beziehung L$\cdot\, \vec{v}_1 = b\cdot\vec{v}_1$ mit b > 0 und $b \in \mathcal{R}$ gelten. Die Koordinaten des Vektors $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}u\\j\\a\end{pmatrix}$ sind ebenfalls unter diesem Ansatz neu zu bestimmen.

Rechnung und Interpretation:

$$v1:=\begin{bmatrix}u\\j\\a\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}u\\j\\a\end{bmatrix}$$

$$\text{solve}(l\cdot v1=b\cdot v1,b)$$
$$b=1.5 \text{ and } u=2.\cdot j \text{ and } a=j$$

Die Lösung ergibt b = 1,5 und unter Berücksichtigung des Sachzusammenhanges ein Verhältnis von u : j : a = 2 : 1 : 1.
Wenn es also doppelt so viele unreife wie junge oder alte Tiere gibt, dann wächst die Population von Jahr zu Jahr auf das Anderthalbfache.

d
(3 BE)

Lösung

Das Produkt N· M liefert eine Matrix, welche den Übergang von einem Frühjahr zum nächsten beschreibt. Es wird, wie schon in Teilaufgabe a berücksichtigt, dass die Übergangsmatrix L so angelegt ist, dass man in der k-ten Spalte ablesen kann, wie viele weibliche Tiere aus jedem der Zustände „unreif", „jung" oder „alt" im Durchschnitt in einen der drei möglichen Zustände „unreif", „jung" oder „alt" übergehen können.

Rechnung und Interpretation:

$$m:=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{10} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{10} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \qquad n:=\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

$$n\cdot m \qquad \begin{bmatrix} 0 & k & 2\cdot k \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Der Eintrag 2k (erste Zeile, dritte Spalte) besagt, dass es pro altem Tier im folgenden Frühjahr zusätzliche 2k unreife Tiere gibt.

Begründung: Von Frühjahr bis Herbst bringen die alten Tiere im Mittel zwei weibliche Nachkommen zur Welt (1. Zeile, dritte Spalte Matrix M) , von denen der Anteil k (1. Zeile, dritte Spalte Matrix N) bis zum folgenden Frühjahr überlebt.
Hinweis: Dies sieht man gut, wenn man zunächst den Übergang vom

Frühjahr zum Herbst und dann den Übergang zum nächsten Frühjahr einzeln betrachtet.
Im Herbst gibt es insgesamt 2a-mal Nachwuchs von den alten Tieren. Zusammen mit den schon vorhandenen jungen Tieren j sind das dann insgesamt 2a + j Jungtiere im Herbst. Im darauffolgenden Frühjahr hat sich die Anzahl der Jungtiere mit dem Faktor k erhöht auf $(2a + j) \cdot k$ Jungtiere.

$$m\cdot v1 \qquad \begin{bmatrix} 2\cdot a+j \\ \frac{4\cdot u}{5} \\ \frac{4\cdot a}{5}+\frac{9\cdot j}{10} \end{bmatrix}$$

	$n\cdot\begin{bmatrix}2\cdot a+j\\ \frac{4\cdot u}{5}\\ \frac{4\cdot a}{5}+\frac{9\cdot j}{10}\end{bmatrix}$ $\quad$ $\begin{bmatrix}(2\cdot a+j)\cdot k\\ \frac{2\cdot u}{3}\\ \frac{8\cdot a+9\cdot j}{12}\end{bmatrix}$
e (2 BE)	
Lösung	Der Startvektor hat hier die Koordinaten $\vec{v}_2=\begin{pmatrix}225\\225\\225\end{pmatrix}$. Für k = $\frac{4}{5}$ betrachtet man die Beziehung$(N\cdot M)^2\cdot\vec{v}_2$. Weil es um die Entwicklung über zwei Jahre geht, muss die Übergangsmatrix $M\cdot N$ quadriert werden. **Rechnung und Interpretation:** $v2:=\begin{bmatrix}225\\225\\225\end{bmatrix}$ $\quad$ $\begin{bmatrix}225\\225\\225\end{bmatrix}$ $(n\cdot m)^2\cdot v2\vert k=\frac{4}{5}$ $\quad$ $\begin{bmatrix}630\\360\\325\end{bmatrix}$ Zwei Jahre nach Beobachtungsbeginn sind dann 630 unreife, 360 junge und 325 alte Tiere vorhanden.
f (3 BE)	
Lösung	Für den gesuchten Wert von k muss die Beziehung N$\cdot M\cdot\vec{v}_1=\vec{v}_1$ mit $\vec{v}_1=\begin{pmatrix}u\\j\\a\end{pmatrix}$ und $k\in\mathcal{R}$ gelten. **Rechnung und Interpretation:** Die Lösung des Gleichungssystems liefert: $\text{solve}(n\cdot m\cdot v1=v1,k)$ $k=\frac{3\cdot j}{2\cdot(2\cdot a+j)}$ and $u=\frac{3\cdot j}{2}$ and $8\cdot a+9\cdot j=12\cdot a$

Es gibt unendlich viele Lösungen. Alle Koordinaten des Startvektors lassen sich in Abhängigkeit von j angeben. Der gesuchte Wert für k ist der feste Wert k = $\frac{3}{11}$. Der Startvektor hat die Gestalt $\vec{v_j} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}j \\ j \\ \frac{9}{4}j \end{pmatrix}$ mit

$j \in N; j > 0.$

$$\text{solve}(8\cdot a+9\cdot j=12\cdot a,a) \qquad a=\frac{9\cdot j}{4}$$

$$k=\frac{3\cdot j}{2\cdot(2\cdot a+j)}|a=\frac{9\cdot j}{4} \qquad k=\frac{3}{11}$$

Eine mögliche Zusammensetzung wäre 150 unreife, 100 junge und 225 alte Tiere.

$$k=\frac{3\cdot j}{2\cdot(2\cdot a+j)} \text{ and } u=\frac{3\cdot j}{2} \text{ and } 8\cdot a+9\cdot j=12\cdot a|j=100$$

$$u=150 \text{ and } a=225 \text{ and } k=\frac{3}{11}$$

g (5 BE)	

Lösung

Der Beobachtungsbeginn war im Frühjahr. Um den Bestand anderthalb Jahre vor Beobachtungsbeginn in Beziehung zur jetzigen Verteilung zu bringen, muss man davon ausgehen, dass der Start im Herbst vor anderthalb Jahren war. Nach dem Start wurde die Populationsentwicklung also zunächst durch die Matrix N, dann durch M und nochmals durch N bestimmt. Man weiß nur, dass zu Beobachtungsbeginn 1053 Tiere vorhanden waren.
Die Zusammensetzung der Population beim Start vor anderthalb Jahren kann z. B. durch den Vektor $\overrightarrow{v_{-1,5}} = \begin{pmatrix} 1035 - j - a \\ j \\ a \end{pmatrix}$ beschrieben werden.
Die Zusammensetzung der Population anderthalb Jahre später wird durch den Vektor $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 225 \\ 225 \\ 225 \end{pmatrix}$ angegeben.

Rechnung und Interpretation:

Obige Überlegungen führen zu folgender Gleichung:

$$N \cdot M \cdot N \cdot \begin{pmatrix} 1053 - j - a \\ j \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 225 \\ 225 \\ 225 \end{pmatrix}$$

Die Lösung wird mit dem CAS ermittelt:

$$\text{solve}\left(n \cdot m \cdot n \cdot \begin{bmatrix} 1053-j-a \\ j \\ a \end{bmatrix} = v2, k\right)$$
$$k=\frac{1}{2} \text{ and } a=162 \text{ and } j=216$$

Die Lösung des Gleichungssystems führt zu k = $\frac{1}{2}$, a = 162, j = 216 und u = 675.
Damit ergibt sich, dass es vor anderthalb Jahren 162 Alttiere gab.

Hinweis: Man hätte z. B. auch den Vektor $\begin{pmatrix} u \\ j \\ 1053 - u - j \end{pmatrix}$ als Startvektor nutzen können, da nur bekannt ist, dass u + j +a = 1053 gelten muss.

Lineare Algebra - erhöhtes Anforderungsniveau

Analytische Geometrie/lineare Algebra -Beispiel 1 (erhöhtes Anforderungsniveau)[14]

1

a
(3 BE)

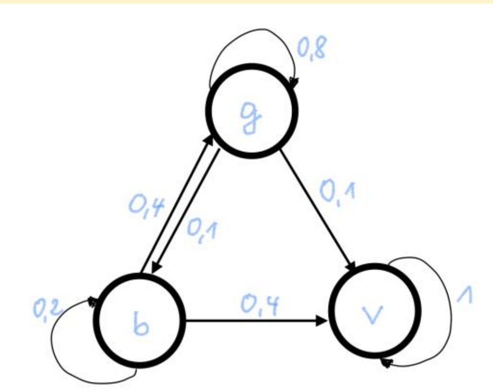
Lösung

Als Zwischenschritt ist die Anlage einer Tabelle sinnvoll, der man die Übergänge von einem der Zustände g (gesund), b (Milbenbefall) oder v (verendet) zu einem anderen oder demselben Zustand entnehmen kann. Die Zahlen in der Tabelle werden direkt aus der Übergangsmatrix M entnommen.

		von		
		g	**b**	**v**
nach	**g**	0,8	0,4	0
	b	0,1	0,2	0
	v	0,1	0,4	1

Man erkennt z. B., dass nach einer Periode 80% der vorher gesunden Völker noch gesund sind, 10% von Milben befallen wurden und 10% verendet sind. Dies wird im Übergangsdiagramm durch entsprechende Pfeile und Beschriftungen veranschaulicht.

Übergangsdiagramm:



[14] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2020/abitur/pools2020/mathematik/erhoeht/2020_M_erhoeht_B.pdf

<table>
<tr><td>b
(3 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>

Die Einträge in der zweiten Spalte sind die Anteile der befallenen Völker, die von einem Jahr zum nächsten gesund werden (1. Zeile, also 40%), befallen bleiben (2. Zeile, 20%) bzw. verenden (3. Zeile, 40%). Da im Modell sowohl gesunde als auch befallene Völker verenden, aber natürlich keine verendeten wieder gesund oder befallen werden können, würde die Population so aussterben.

Hinweis:
Eine Simulation für den Bestand nach 100 Jahren durch $M^{100} \cdot \overrightarrow{vv_1}$ mit der für die nächsten Aufgaben gegebenen Anfangsverteilung $\overrightarrow{vv_1} = \begin{pmatrix} 8760 \\ 1320 \\ 4920 \end{pmatrix}$ zeigt dies:

$$vv1:=\begin{bmatrix} 8760 \\ 1320 \\ 4920 \end{bmatrix}:m:=\begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0.4 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0.4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$m^{100} \cdot vv1 \qquad \begin{bmatrix} 0.002632 \\ 0.000398 \\ 15000. \end{bmatrix}$$

Es gäbe nach dieser Simulation keine gesunden oder von Milben befallene Völker mehr, sondern nur noch 15 000 verendete Völker.

</td></tr>
</table>

c
(3 BE)

Lösung

Durch systematisches Probieren mit Hilfe der Matrix M^z mit
z = -1, -2, ... lässt sich durch die Interpretation der Ergebnisse von $M^z \cdot \overrightarrow{vv_1}$ feststellen, wann zum ersten Male ein Milbenbefall festgestellt wurde.

$m^0 \cdot vv1 \quad \begin{bmatrix} 8760 \\ 1320 \\ 4920 \end{bmatrix}$

$m^{-1} \cdot vv1 \quad \begin{bmatrix} 10200. \\ 1500. \\ 3300. \end{bmatrix}$

$m^{-2} \cdot vv1 \quad \begin{bmatrix} 12000. \\ 1500. \\ 1500. \end{bmatrix}$

$m^{-3} \cdot vv1 \quad \begin{bmatrix} 15000. \\ 2.E-8 \\ 1.E-8 \end{bmatrix}$

Interpretation der Ergebnisse:

Jahr	Anzahl Milbenbefall
2005	1320
2004	1500
2003	1500
2002	0

Vor 2 Jahren, also im Jahr 2003, wurde zum ersten Mal ein Milbenbefall festgestellt. Ein Jahr zuvor gab es nur gesunde Völker (15000).

d
(7 BE)

Lösung

Im Jahr 2004 (M^{-1}) verendeten 4920 – 3300 = 1620 Völker.

$vv1 \quad \begin{bmatrix} 8760 \\ 1320 \\ 4920 \end{bmatrix}$

$m^{-1} \cdot vv1 \quad \begin{bmatrix} 10200. \\ 1500. \\ 3300. \end{bmatrix}$

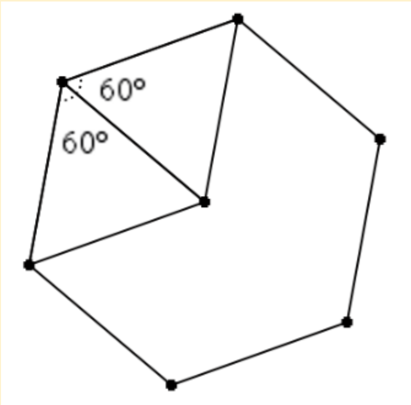
Daher wurden im Jahr 2005 die Hälfte von 1620 Völkern, also 810 Völker ergänzt. Damit ergibt sich die neue Bestandsmatrix zu

$$\overrightarrow{vv_2} = \begin{pmatrix} 8760 + 810 \\ 1320 \\ 4920 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9570 \\ 1320 \\ 4920 \end{pmatrix}.$$

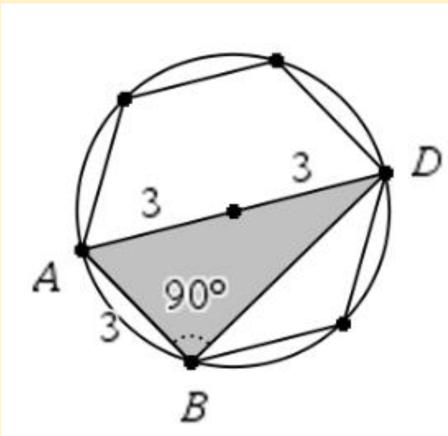
	$vv2:=\begin{bmatrix} 8760+810 \\ 1320 \\ 4920 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 9570 \\ 1320 \\ 4920 \end{bmatrix}$ Für das Jahr 2006 ergibt dies durch $M \cdot \overrightarrow{vv_2}$ einen Bestand von $\begin{pmatrix} 8184 \\ 1221 \\ 6405 \end{pmatrix}$. Darunter sind 6405 verendete Völker, das sind 6405 – 4920 = 1485 mehr als im Jahr davor. Die Hälfte davon, also 742 oder 743 müssen nach der Vereinbarung ergänzt werden, so dass es nun 742 + 810 = 1552 bzw. 743 + 810 = 1553 Ergänzungen in den Jahren 2005 und 2006 waren. $m \cdot vv2$ $\begin{bmatrix} 8184. \\ 1221. \\ 6405. \end{bmatrix}$ 6405−4920 1485 $\frac{1485}{2}$ 742.5 743+810 1553
2	
a (5 BE)	

Lösung

Ein regelmäßiges Sechseck lässt sich in sechs gleichseitige Dreiecke zerlegen, deren Innenwinkel 60° groß sind. Die Größe der Innenwinkel ergibt sich jeweils aus der Summe der Größe zweier nebeneinander liegender Innenwinkel benachbarter Dreiecke, beträgt also 120°.



Die x-Koordinate des Punktes D ist x = 3, weil $\overline{BD}$ und $\overline{AE}$ parallel zur y-Achse und gleich lang sind und weil A und B beide auf der x-Achse liegen.
Das Dreieck ABD ist rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei B. Das folgt aus der Umkehrung des Satzes von Thales, denn B liegt auf dem Umkreis des Sechsecks mit dem Durchmesser $\overline{AD}$.
Zur Bestimmung der y-Koordinate wendet man den Satz von Pythagoras auf das rechtwinklige Dreieck ABD an, es gilt $\overline{AB} = 3\ LE$, $\overline{AD} = 2 \cdot 3\ LE = 6\ LE$. Letzteres ergibt sich, weil die Seite $\overline{AD}$ aus zwei Dreiecksseiten eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge 3 LE besteht.

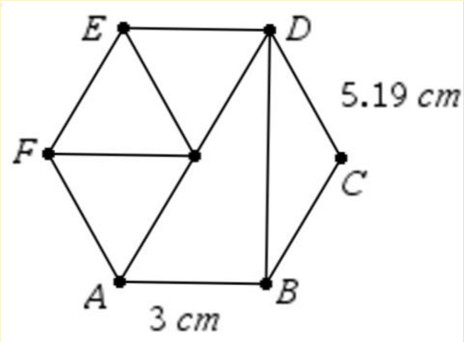


$|\overline{BD}| = \sqrt{|\overline{AD}|^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{6^2 - 3^3} = 3\sqrt{3} \approx 5{,}19$

Der Punkt D hat die Koordinaten x = 3 und y = $3\sqrt{3}$

Hinweis:

Da in der Aufgabenstellung der Operator „Bestimmen Sie“ verwendet wird, ist auch eine grafische Lösung denkbar, so wie dargestellt.

	
b (4 BE)	
Lösung	Der gesuchte Flächeninhalt kann z. B. mit dem Kreuzprodukt berechnet werden: A= $\left\lvert\overrightarrow{HG} \times \overrightarrow{HI}\right\rvert = 27 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 9{,}5mm^2$ $g:=\begin{bmatrix}0\\0\\8\end{bmatrix}:h:=\begin{bmatrix}3\\0\\8-\frac{3\cdot\sqrt{2}}{4}\end{bmatrix}:i:=\begin{bmatrix}\frac{9}{2}\\\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}\\8\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}\frac{9}{2}\\\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}\\8\end{bmatrix}$ $\text{norm}(\text{crossP}(i-h,g-h)) \quad \frac{27\cdot\sqrt{2}}{4}$ $\frac{27\cdot\sqrt{2}}{4} \quad 9.54594$ **Hinweis:** Man kann auch die Formel für den Flächeninhalt einer Raute nutzen (A = $\frac{1}{2}e \cdot f$), wobei $e = \lvert\overline{GI}\rvert$ und $f = \lvert\overline{JH}\rvert$ die Längen der Diagonalen beschreiben. Dazu muss man vorher noch die Koordinaten des Punktes J berechnen. Sie ergeben sich mit $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{HI}$ zu J ($\frac{3}{2}$| $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ |$8 + \frac{3\sqrt{3}}{4}$).

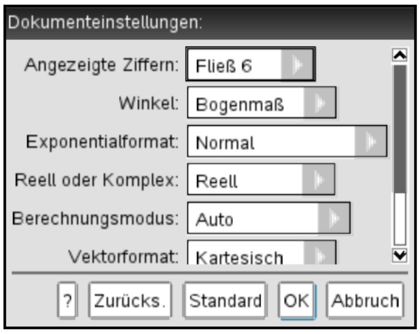
	$i:=g+i-h$ $\quad \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3\cdot\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3\cdot\sqrt{2}}{4}+8 \end{bmatrix}$ $\frac{1}{2}\cdot \mathrm{norm}(i-g)\cdot \mathrm{norm}(j-h) \quad \frac{27\cdot\sqrt{2}}{4}$

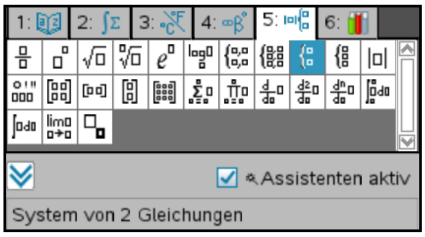
Kompetenzen im Umgang mit dem TI-Nspire CX CAS

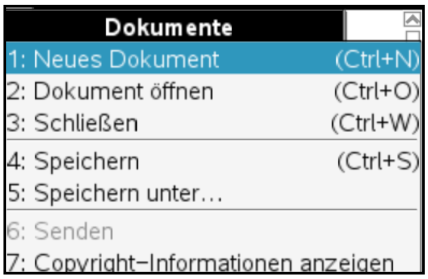
Nachstehend werden zusammenfassend einige grundlegende Kompetenzen im Umgang mit dem CAS-Rechner TI-Nspire dargestellt. Sie erheben keinen Anspruch auf Vollständigkeit.

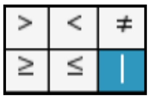
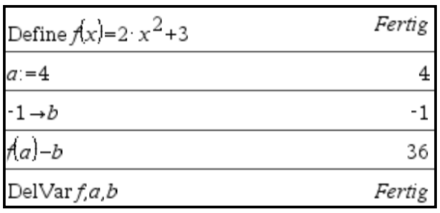
<table>
<tr><th>Der Schüler kann</th><th></th></tr>
<tr><td>– Einstellungen vornehmen, u. a.:
• Winkelmaß (Grad- und Bogenmaß),
• angezeigte Ziffern,
• Helligkeit des Displays,
– das Betriebssystem aktualisieren,
– den Prüfungsmodus herstellen,
– den Ladezustand überprüfen.

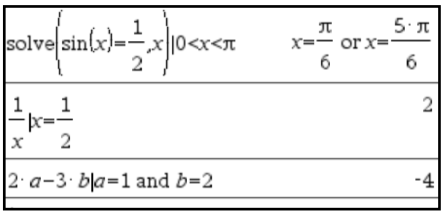
– den Katalog und die Vorlagen nutzen.

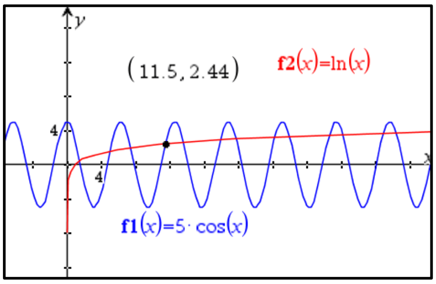
– Dokumente
• anlegen,
• speichern,
• aufrufen,
• löschen,
• in Probleme und Seiten gliedern.</td><td>

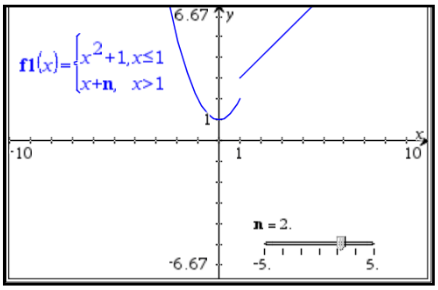
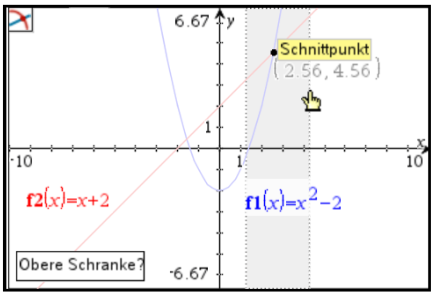
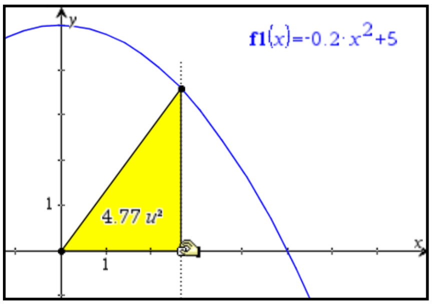



</td></tr>
<tr><td>– Variable und Funktionen definieren und löschen.

– den Bedingungsoperator (WITH-Operator) zur Einschränkung von Definitionsbereichen, zum Ersetzen von Variablen u. ä. verwenden. (Zweitbelegung von ⊟) </td><td>


</td></tr>
</table>

– Terme • berechnen, • umformen, • ausmultiplizieren, • faktorisieren, • in unechte Brüche zerlegen.	$\sqrt[3]{0.001}$ → 0.1 $10^{-99} \cdot 1.E99$ → $1.$ $\frac{a^3-b^3}{a-b}$ → $a^2+a \cdot b+b^2$ $\text{expand}\left((a+b)^3\right)$ → $a^3+3 \cdot a^2 \cdot b+3 \cdot a \cdot b^2+b^3$ $\text{factor}\left(a^3+3 \cdot a^2 \cdot b+3 \cdot a \cdot b^2+b^3\right)$ → $(a+b)^3$ $\text{expand}\left(\frac{4 \cdot x^2+1}{x+1}\right)$ → $\frac{5}{x+1}+4 \cdot x-4$
– das Summenzeichen verwenden.	$\sum_{k=1}^{n} \left(k^2\right)$ → $\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2 \cdot n+1)}{6}$
– Gleichungen/Ungleichungen/ Gleichungssysteme mit dem solve-Befehl lösen und dabei	$\text{solve}\left(2 \cdot x^2-2 \cdot x=4,x\right)$ → $x=-1$ or $x=2$ $\text{solve}\left(x^2-4<0,x\right)$ → $-2<x<2$ $\text{solve}\left(\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=2 \end{cases},x,y\right)$ → $x=\frac{3}{2}$ and $y=\frac{1}{2}$
– die Anzeigen des Rechners richtig interpretieren.	$\text{solve}\left(\begin{cases} x-y=1 \\ x-y=2 \end{cases},x,y\right)$ → false $\text{solve}\left(\begin{cases} x-y=1 \\ x-y=1 \end{cases},x,y\right)$ → $x=\boldsymbol{c1}+1$ and $y=\boldsymbol{c1}$ $\text{solve}(\sin(x)=0,x)$ → $x=\boldsymbol{n2} \cdot \pi$
– Gleichungen und Ungleichungen mit nsolve näherungsweise lösen. (sinnvollen Startwert verwenden)	$\text{nSolve}\left(\sin(x)=\mathbf{e}^{-x},x,3\right)$ → 3.09636 $\text{nSolve}\left(\sin(x)=\mathbf{e}^{-x},x,7\right)$ → 9.4247
– Gleichungen mit grafischen Verfahren lösen.	
– Ableitungen von Funktionen ermitteln.	$\frac{d}{dx}\left(x^2 \cdot \sin(x)\right)$ → $x^2 \cdot \cos(x)+2 \cdot x \cdot \sin(x)$ $\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{x}\right)$ → $\frac{2}{x^3}$ $\frac{d}{da}\left(b \cdot \mathbf{e}^{-2 \cdot a}\right)$ → $-2 \cdot \mathbf{e}^{-2 \cdot a} \cdot b$
– bestimmte und unbestimmte Integrale von Funktionen bestimmen.	$\int (x \cdot \ln(x))dx$ → $\frac{x^2 \cdot \ln(x)}{2}-\frac{x^2}{4}$ $\int_{-1}^{2} \left(-x^2+4\right)dx$ → 9

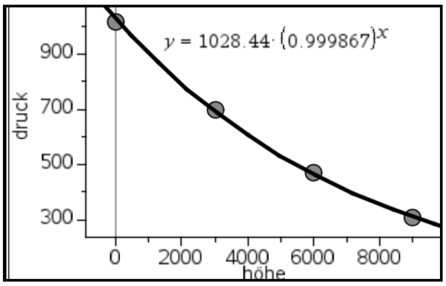
– Grenzwerte von Funktionen ermitteln. – den Definitionsbereich von Termen/Funktionen ermitteln. – Volumen von Rotationskörpern ermitteln.	$\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{1}{x}\right)$ undef $\lim\limits_{x \to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)$ ∞ $\lim\limits_{x \to 0^-}\left(\frac{1}{x}\right)$ $-\infty$ $\operatorname{domain}\left(\frac{x-4}{x^2-1},x\right)$ $x \neq -1$ and $x \neq 1$ $\pi \cdot \int_0^r x^2\,dx$ $\frac{\pi \cdot r^3}{3}$
– Graphen zeichnen und dabei ggf. • geeignete Fenstereinstellungen vornehmen, • Wertetabellen anzeigen, • stückweise definierte Funktionen darstellen, • Funktionenscharen darstellen, • das Menü „Graphen analysieren“ nutzen, • Schieberegler verwenden.	 
– einfache geometrische Objekte konstruieren. – den Zugmodus nutzen. – Größen messen.	
– Listen • definieren, • auswerten.	$anzahl:=\operatorname{seq}(k,k,2,6,2)$ $\{2,4,6\}$ $preis:=\{1.52,3.99,2.49\}$ $\{1.52,3.99,2.49\}$ $\operatorname{sum}(anzahl \cdot preis)$ 33.94 $\operatorname{mean}(preis)$ 2.66667

- Tabellen füllen.
- Spalten mit Listen verknüpfen.
- Operationen auf Spalten bzw. Zellen anwenden.

A höhe	B druck	C quotient
0	1013	1.44508
3000	701	1.48517
6000	472	1.53746
9000	307	

$C1 = \frac{b1}{b2} \cdot 1.$

- Diagramme in Data&Statistics erstellen.
- Daten mit Regression analysieren.



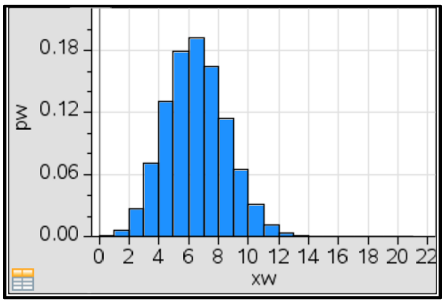
- Zufallszahlen erzeugen.

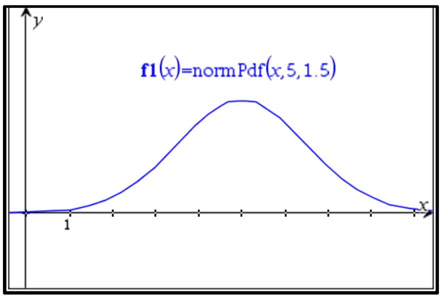
RandSeed 201298	*Fertig*
rand()	0.892367
rand(3)	{0.066557,0.514712,0.883731}
randInt(1,6,5)	{3,1,4,5,2}
randBin(50,0.6,5)	{29,28,26,35,24}
randNorm(3.3,0.5,2)	{4.77397,3.82351}

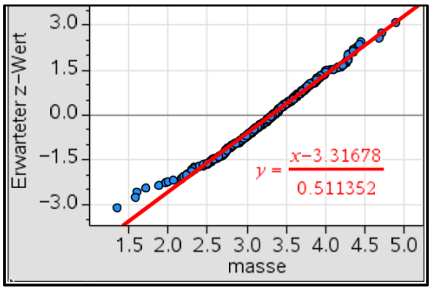
- Wahrscheinlichkeiten binomialverteilter Zufallsgrößen berechnen.

binomPdf(3,0.5)	{0.125,0.375,0.375,0.125}
binomPdf(3,0.5,0)	0.125
binomCdf(3,0.5)	{0.125,0.5,0.875,1.}
binomCdf(3,0.5,2,3)	0.5

- binomial- und normalverteilte Zufallsgrößen graphisch darstellen.





– Berechnungen im Zusammenhang mit normalverteilten Zufallsgröße rationell durchführen.	normCdf(-∞,0,0,1) 0.5 invNorm(0.8,4,0.5) 4.42081 nSolve(invNorm(0.6,m,0.4)=2,m) 1.89866
– ein Normalwahrscheinlichkeitsdiagramm erstellen und beurteilen	
– Vektoren als Zeilen- oder Spaltenvektoren eingeben. – mit Vektoren rechnen – den Betrag eines Vektors ermitteln. – das Skalarprodukt zweier Vektoren berechnen und anwenden.	$[1\ 2\ 3] \rightarrow a$ $[1\ 2\ 3]$ $b:=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$ $a:=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}:b:=\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}:c:=\begin{bmatrix}-0.5\\1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}-0.5\\1\end{bmatrix}$ $2\cdot a+b-0.2\cdot c$ $\begin{bmatrix}5.1\\-5.2\end{bmatrix}$ solve($a=k\cdot c,k$) $k=-2.$ solve($a=k\cdot b,k$) false $\text{norm}\left(\begin{bmatrix}1\\-2\\5\end{bmatrix}\right)$ $\sqrt{30}$ $\text{norm}\left(\begin{bmatrix}1\\-2\\5\end{bmatrix}\right)$ 5.47723 $a:=[1\ 0\ 0]:b:=[0\ 1\ 0]$ $[0\ 1\ 0]$ dotP(a,b) 0 $\cos^{-1}\left(\frac{\text{dotP}(a,b)}{\text{norm}(a)\cdot\text{norm}(b)}\right)$ $\frac{\pi}{2}$ $\frac{\pi}{2}$ ▸DD 90°
– das Vektorprodukt zweier Vektoren berechnen und anwenden.	$\text{crossP}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)$ $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

– Geradengleichungen der Form – $\vec{x} = \overrightarrow{p_0} + t \cdot \vec{a}$ als Variable speichern und damit arbeiten. – die gegenseitige Lage von Geraden bzw. Geraden und Koordinatenebenen bestimmen. – Abstand Punkt – Gerade berechnen. – den Abstand windschiefer Geraden berechnen.	$g(t):=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+t\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ *Fertig* $g(1)$ $\begin{bmatrix}1\\3\\3\end{bmatrix}$ $\text{solve}\left(\begin{bmatrix}3\\-4\\2\end{bmatrix}=g(t),t\right)$ false $\text{solve}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+t\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+s\cdot\begin{bmatrix}2\\2\\-3\end{bmatrix},t,s\right)$ $t=\frac{-2}{7}$ and $s=\frac{-1}{7}$ $p1:=\begin{bmatrix}6\\-6\\14\end{bmatrix}: g(t):=\begin{bmatrix}2\\-2\\2\end{bmatrix}+t\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$ *Fertig* $\text{fMin}(\text{norm}(p1-g(t)),t)$ $t=4$ $\text{norm}(p1-g(t))\|t=4$ 8.94427 $h(t):=\begin{bmatrix}2\\2\\3\end{bmatrix}+t\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}:g(s):=\begin{bmatrix}4\\7\\3\end{bmatrix}+s\cdot\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}$ *Fertig* $v1:=\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}:v2:=\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}$ $d(t,s):=h(t)-g(s)$ *Fertig* $\text{solve}\left(\begin{cases}\text{dotP}(v1,d(t,s))=0\\\text{dotP}(v2,d(t,s))=0\end{cases},\{t,s\}\right)$ $s=-1$ and $t=1$ $\text{norm}(d(1,-1))$ 3
– Ebenengleichungen in Parameterform als Variable speichern und damit arbeiten.	$e(r,s):=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}+r\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}+s\cdot\begin{bmatrix}0\\2\\3\end{bmatrix}$ *Fertig* $e(1,1)$ $\begin{bmatrix}3\\5\\0\end{bmatrix}$ $\text{solve}(g(t)=e(r,s),r,s,t)$ $r=-1$ and $s=0$ and $t=-3$
– Ebenengleichungen in Normalen- und Koordinatenform erstellen.	$n:=\text{crossP}\left(\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)$ $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ $\text{dotP}\left(n,\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)=0$ $x+z=0$

– Matrizen erstellen und mit Matrizen arbeiten.	$m:=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0.2\\0.6 & 0 & 0.3\\0.4 & 0 & 0.5\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0.2\\0.6 & 0 & 0.3\\0.4 & 0 & 0.5\end{bmatrix}$ $m\cdot\begin{bmatrix}120\\80\\30\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}86.\\81.\\63.\end{bmatrix}$ $m\cdot m^{-1}$ $\begin{bmatrix}1. & 0. & 0.\\0. & 1. & -1.\mathrm{E}{-14}\\0. & 0. & 1.\end{bmatrix}$