Bestimmte Integrale mit dem TI-30X Prio MathPrint™ auswerten

Eine Rangierlok bewegt sich längs einer geraden Strecke mit der Geschwindigkeit $v(t) = 0{,}2t^3 - 1{,}6t^2 + 3t$. Dabei gibt t die Zeit in Minuten und v die Geschwindigkeit in Kilometer pro Minute an. Beobachtet wird die Bewegung im Zeitraum von t = 0 bis t = 6.

a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion.
b) Tabellieren Sie die Funktionswerte von v im Intervall $0 \le t \le 6$.
c) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion.
d) Interpretieren Sie den Kurvenverlauf vom Start bis zur sechsten Minute im Sachzusammenhang.
e) Ermitteln Sie den insgesamt zurückgelegten Weg des Körpers bis zur sechsten Minute.
f) Bestimmen Sie die Entfernung des Körpers vom Startpunkt nach sechs Minuten.

Lösungen

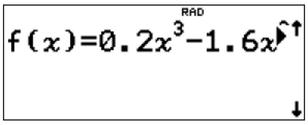
Die Lösungsdokumentation erfolgt mit dem TI-30X Prio MathPrint™.

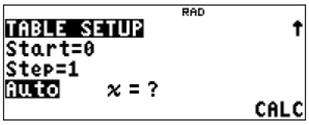
a) $0{,}2t^3 - 1{,}6t^2 + 3t = 0 \Leftrightarrow t \cdot (0{,}2t^2 - 1{,}6t + 3) = 0 \Leftrightarrow t_1 = 0 \vee\ 0{,}2t^2 - 1{,}6t + 3 = 0$

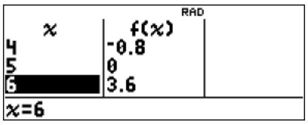
$0{,}2t^2 - 1{,}6t + 3 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 8t + 15 = 0 \Leftrightarrow t_{2_3} = 4 \pm \sqrt{16 - 15} \Leftrightarrow t_2 = 3 \wedge t_3 = 5$

b) Wertetabelle:

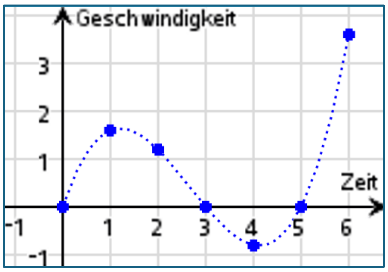
t in Minuten	0	1	2	3	4	5	6
v(t) in km/Min.	0	1,6	1,2	0	-0,8	0	3,6







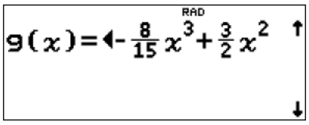
c) Graph



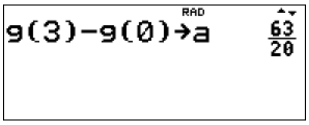
d) Bis t = 3 fährt der Körper aus dem Stand geradeaus vorwärts. Er erreicht nach etwas mehr als einer Minute seine Höchstgeschwindigkeit im Intervall [0; 3] von etwa 1,6 Kilometer pro Minute. Dann verringert sich seine Geschwindigkeit, bis der Körper nach drei Minuten zum Stillstand kommt.

Ab t = 3 bis t = 5 bewegt sich der Körper in entgegengesetzter Richtung geradeaus zurück. Dabei erreicht er nach etwa vier Minuten die Höchstgeschwindigkeit bei der Rückwärtsbewegung von etwa 0,8 Meter pro Minute. Danach verlangsamt sich die Rückwärtsbewegung, bis der Körper bei t = 5 zum Stillstand kommt. Von t = 5 bis t = 6 bewegt sich der Körper wieder vorwärts mit stetig steigender Geschwindigkeit, die hier einen Höchstwert von ca. 3,6 Kilometer pro Minute zum Zeitpunkt t = 6 hat.

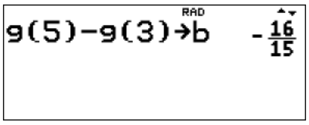
e) Der im Intervall[a; b] zurückgelegte Weg s wird berechnet aus
$s = \int_a^b v(t)dt = V(t)_a^b = V(b) - V(a)$.
Dabei ist $V(t)$ eine Stammfunktion von $v(t)$.
Wir bestimmen $V(t)$ für den vorliegenden Sachverhalt:
$V(t) = \frac{0{,}2}{4}t^4 - \frac{1{,}6}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 = \frac{1}{20}t^4 - \frac{8}{15}t^3 + \frac{3}{2}t^2$
Diesen Term geben wir über a1 als Funktion g(x) in den TI-Prio ein:



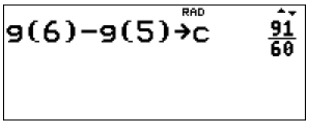
Im Hauptbildschirm können nun für die relevanten Teilintervalle die bestimmten Integrale ermittelt werden. Die Funktion g(x) wird über a3 aufgerufen. Die Teilergebnisse werden mit x unter den Variablen a, b bzw. c gespeichert.
$s = \int_0^3 v(t)dt = V(3) - V(0) = \frac{63}{20} \approx 3{,}15$ [km]



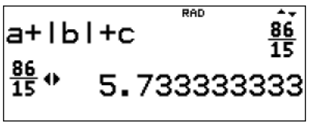
$s = \int_3^5 v(t)dt = V(5) - V(3) = -\frac{16}{15} \approx -1{,}07$ [km]



Der Wert ist negativ, weil das Kurvenstück unterhalb der Zeitachse liegt (Rückwärtsbewegung!).
$s = \int_5^6 v(t)dt = V(6) - V(5) = \frac{91}{60} \approx 1{,}52$ [km]

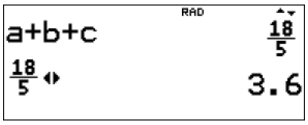


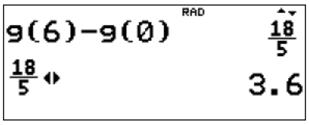
Für den insgesamt zurückgelegten Weg muss der Betrag des Weges aus dem Intervall [3; 5] berücksichtigt werden. Den Betrag einer Zahl können wir mit der Taste t [num] aufrufen.
Die gespeicherten Werte der Variablen a, b und c werden mit z aufgerufen.



Die insgesamt in den ersten sechs Minuten zurückgelegte Strecke beträgt rund 5,7 Kilometer.

f) Um die Entfernung nach sechs Minuten vom Startpunkt zu finden, muss der im Intervall [3; 5] zurückgelegte Weg mit dem negativen Vorzeichen berücksichtigt werden.
Alternativ kann auch die Flächenbilanz mit $s = \int_0^6 v(t)dt = V(6) - V(0)$ verwendet werden.





Die Entfernung vom Startpunkt beträgt nach sechs Minuten 3,6 Kilometer.

Autor:
Dr. Wilfried Zappe