Arithmetisches Mittel und Standardabweichung von Daten mit der Ein-Variablen-Statistik bestimmen

In diesem Beitrag wird erläutert, wie mit Hilfe des TI-30X Prio MathPrint™ das arithmetische Mittel und die Standardabweichung von Messwerten ermittelt werden können, die in einer Häufigkeitsverteilung zusammengefasst sind.
Die Vorgehensweise kann im Zusammenhang mit Zufallsgrößen auf Erwartungswert und Standardabweichung übertragen werden.

Als Beispiel werden Körpergrößen von Neugeborenen betrachtet. In der Tageszeitung werden mitunter mit dem Einverständnis der Eltern Bilder und Daten zu Neugeborenen veröffentlicht. Neben dem Namen könnte zu einem Baby Folgendes bekanntgegeben werden: „Am Tag seiner Geburt war der kleine Junge 51 Zentimeter groß und 3030 Gramm schwer.“
Bei der Sammlung von solchen Daten über einen längeren, zusammenhängenden Zeitraum wurden 20 Angaben über die Körpergröße Neugeborener (auf Zentimeter gerundet) gesammelt. Sie sind zunächst als Urliste in einer Übersicht zusammengefasst. Die gleichen Daten sind in einer Häufigkeitsverteilung tabellarisch dargestellt

Urliste:

50	52	57	50	57	48	53	47	52	54
50	57	52	48	50	54	52	49	53	55

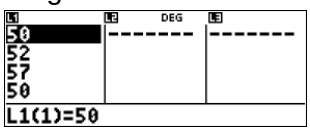
Häufigkeitsverteilung:

Größe	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57
Anzahl	1	2	1	4	0	4	2	2	1	0	3

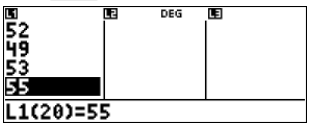
Berechnung des arithmetischen Mittels und der Standardabweichung ohne Ein-Variablen-Statistik anhand der Urliste
Zunächst wird erläutert, wie das arithmetische Mittel, die Varianz und die Standardabweichung der Daten auf der Grundlage ihrer Definitionen aus der Urliste mithilfe des TI-30X Prio MathPrint™ bestimmt werden können.

Definitionen: Gegeben sind n numerische Daten $x_1, x_2, \dots, x_n$.
Arithmetisches Mittel (Erwartungswert) : $\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k$
Varianz: $V = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x})^2$
Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{V}$

Eingabe der Werte aus der Urliste über data in den Listeneditor in die Liste L1:

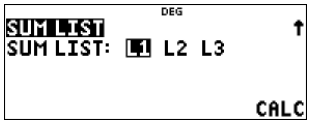


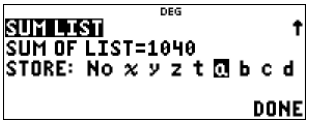
…



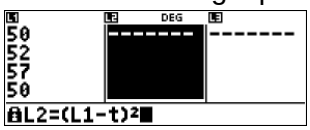
Um den Mittelwert zu berechnen, muss die Summe der Werte gebildet und durch 20 dividiert werden.

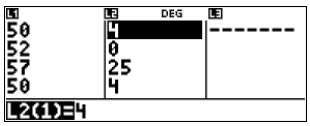
Mit [data] OPS [4] Sum List wird die Liste L1 zur Summenbildung ausgewählt. Die Summe (hier 1040) wird unter der Variablen a gespeichert.
Mit [2nd][mode] wird in den Hauptbildschirm gewechselt. Die Variable a wird aufgerufen und durch n = 20 geteilt.
Der Mittelwert 52 [cm]der Körpergrößen wird unter der Variablen t gespeichert.

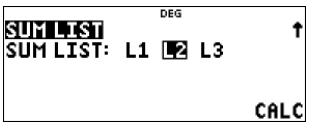


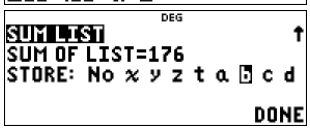


Zur Bestimmung der Varianz müssen die Quadrate der Abweichungen der Einzelwerte vom Mittelwert aufsummiert und durch n = 20 dividiert werden.
Mit [data] FORMULA [1] wird die Liste L2 auf die Berechnung der Quadrate der Differenzen der Werte von L1 und dem unter t gespeichertem Mittelwert vorbereitet. Mit [data] OPS [4] Sum List wird die Liste L2 zur Summenbildung ausgewählt. Die Summe (hier 176) wird unter der Variablen b gespeichert.

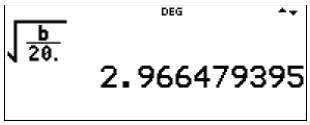








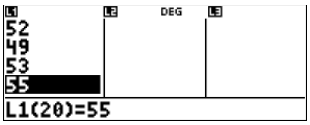
Mit [2nd][mode] wird in den Hauptbildschirm gewechselt. Die Wurzel aus b dividiert durch 20 ist mit rund 3 [cm] ein Näherungswert für die Standardabweichung der Körpergröße vom Mittelwert 52 [cm].



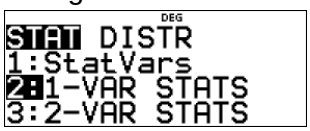
Berechnung des arithmetischen Mittels und der Standardabweichung mit Ein-Variablen-Statistik anhand der Urliste

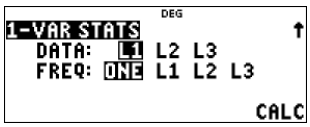
Die Daten der Urliste werden wie oben beschrieben unter [data] in die Liste L1 eingetragen.

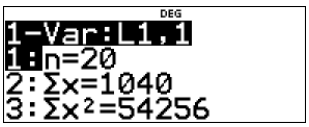
…



Mit [2nd][data][2] wird die Ein-Variablen-Statistik geöffnet. Unter DATA wird die Liste L1 und unter FREQ das Angebot ONE jeweils mit [enter] ausgewählt.
Der Taschenrechner bietet die drei Kenngrößen n $(hier\ 20)$, $\sum x$ $(hier\ 1040)$ und $\sum x^2$ $(hier\ 54256)$ für die Berechnung von Erwartungswert und Varianz bzw. Standardabweichung an.







Die Berechnung des Erwartungswertes ist klar: $\boldsymbol{E(x) = \bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{1040}{20} = 52}$. Die Varianz kann berechnet werden durch $\boldsymbol{V = \frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2}$.

Beweis:

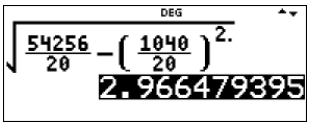
$V = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x})^2$ |binomische Formel anwenden, die Indizierung für k wird aus Übersichtsgründen weggelassen.

$V = \frac{1}{n} \cdot \left[\sum\left(x_k^2 - 2 \cdot x_k \cdot \bar{x} + \bar{x}^2\right)\right] = \frac{\sum x_k^2 - 2 \cdot \bar{x} \cdot \sum x_k + \sum \bar{x}^2}{n} = \frac{\sum x_k^2}{n} - 2 \cdot \bar{x} \cdot \frac{\sum x_k}{n} + \frac{\sum \bar{x}^2}{n} = \frac{\sum x_k^2}{n} - 2 \cdot \bar{x} \cdot \bar{x} + \frac{n \cdot \bar{x}^2}{n} = \frac{\sum x_k^2}{n} - 2 \cdot \bar{x}^2 + \bar{x}^2 = \frac{\sum x_k^2}{n} - \bar{x}^2$

Wegen $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$ folgt $V = \frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2$ w.z.b.w.

Damit ist die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2}$. Dies kann auch geschrieben werden als $\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{E(X^2) - (E(X))^2}$

Somit gilt im Beispiel $\sigma = \sqrt{\frac{54256}{20} - \left(\frac{1040}{20}\right)^2} \approx 3$, also derselbe Wert wie oben.

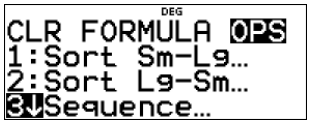


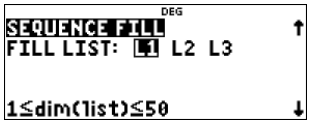
Berechnung des arithmetischen Mittels und der Standardabweichung mit Ein-Variablen-Statistik anhand der Häufigkeitsverteilung

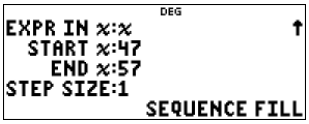
Die Häufigkeitsverteilung wurde auf Seite 1 schon angegeben:

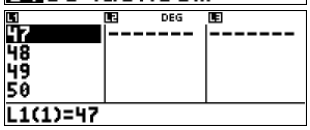
Größe	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57
Anzahl	1	2	1	4	0	4	2	2	1	0	3

Die Eingabe unter [data] OPS [3] Sequence kann so erfolgen: In Liste L1 werden als Zahlenfolge die natürlichen Zahlen von 47 bis 57 eingegeben.

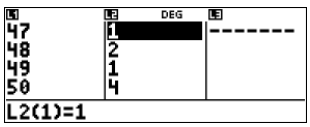


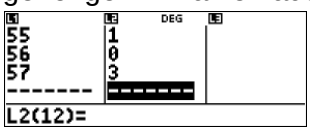






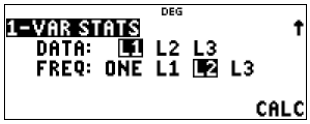
In der Liste L2 werden die zugehörigen Anzahlen aus der Tabelle eingetippt.

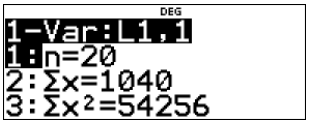




Mit [2nd] [data] [2] wird die Ein-Variablen-Statistik geöffnet. Unter DATA wird die Liste L1 und unter FREQ das Angebot L2 jeweils mit [enter] ausgewählt.

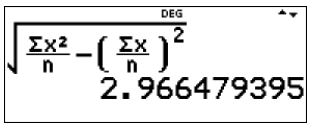
Der Taschenrechner bietet die drei Kenngrößen n $(hier\ 20)$, $\sum x$ $(hier\ 1040)$ und $\sum x^2$ $(hier\ 54256)$ für die Berechnung von Erwartungswert und Varianz bzw. Standardabweichung an. Das sind dieselben Kennzahlen wie sie für das Vorgehen mit der Urliste auf Seite 3 angezeigt wurden, also müssen sich hier auch dieselben Ergebnisse wie auf Seite 3 ergeben.





Es wird trotzdem noch eine etwas andere Variante gezeigt, mit der die Symbole $n, \sum x$ und $\sum x^2$ und damit indirekt auch die zu ihnen gehörenden Werte in den Hauptbildschirm exportiert werden können. Diese Variante ist sehr effektiv und vor allem bei anderen Anwendungen vorteilhaft.

- Um die Symbole mit ihren angezeigten Werten in den Hauptbildschirm zu übertragen, wird die Taste mit der Zahl vor dem Term gedrückt.
- Mit [2nd][data][1] geht es zurück in die Ein-Variablen-Statistik.
- Hinweis: Sollte man mit [2nd][data][1] nicht in den Bildschirm mit den Kenngrößen der Ein-Variablen-Statistik gelangen, kann dieser mit [2nd][data][2] wieder aufgerufen werden.



Autor:
Dr. Wilfried Zappe