Combien de 6 ?

Enoncé

On lance deux fois un dé à 6 faces, parfaitement équilibré.

Le jeu est le suivant :

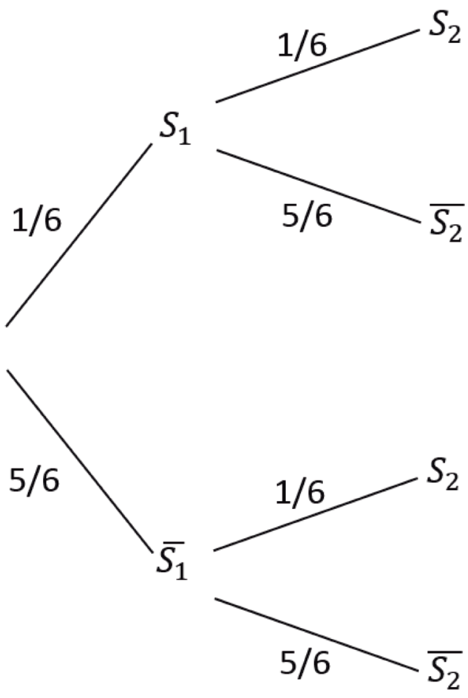
- Si on obtient deux 6, on gagne 5 €
- Si on obtient un 6, on ne perd ou ne gagne rien.
- Si on obtient aucun 6, on perd 2 €

On définit la variable aléatoire X qui, à chaque issue du jeu, relève la somme gagnée ou perdue

1. Après avoir déterminé les différentes issues possibles puis les différentes valeurs possibles, déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
2. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X. Que penser de nos chances de gagner de l'argent à ce jeu ?
3. Combien faudrait-il que le joueur perde, lorsqu'il n'obtient aucun 6, pour que l'espérance du jeu soit nulle ? Ou bien combien faudrait-il que le joueur gagne, lorsqu'il obtient deux 6, pour que l'espérance du jeu soit nulle ?

1. Loi de probabilité

Pour répondre à l'ensemble des questions, il est intéressant de dresser l'arbre de probabilité de l'expérience aléatoire.



On désigne par S_1 et S_2 les évènements obtenir un 6 respectivement au premier et deuxième tirage, puis $\bar{S_1}$ et $\bar{S_2}$ les évènements respectifs contraire.

On a $p(S_1) = p(S_2) = \frac{1}{6}$ et $p(\bar{S_1}) = p(\bar{S_2}) = \frac{5}{6}$.

Nous pouvons maintenant dresser la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

A l'issue de l'expérience aléatoire, X peut prendre les valeurs 5, 0 ou -2

$$P(X = 5) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$$P(X = 0) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36} + \frac{5}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

$$P(X = -2) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$$

x_i	-2	0	5
$P(X = x_i)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{36}$

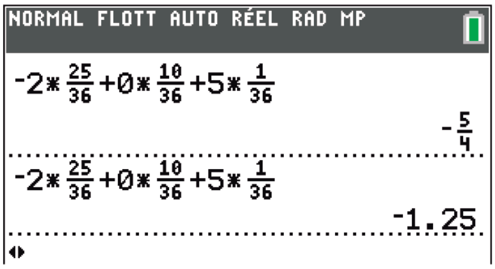
2. Espérance de la variable aléatoire

$E(X) = \ -2 \times \ P(X = -2) + 0 \times \ P(X = 0) + \ 5 \times \ P(X = 5)$

$E(X) = \ -2 \times \frac{25}{36} + 0 \times \frac{5}{18} + \ 5 \times \frac{1}{36} = -\frac{5}{4}$

On peut interpréter l'espérance de la manière suivante : si on joue un grand nombre de fois, en moyenne, on perdra 1,25€.

Le jeu nous est défavorable.



3. Espérance nulle

On appelle a la valeur prise par la variable aléatoire lorsque le joueur perd.

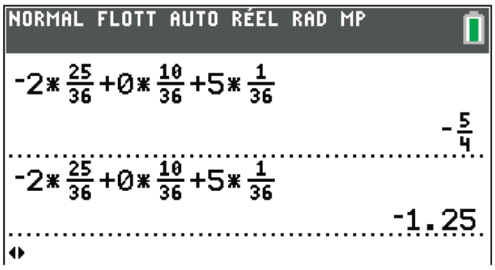
Il s'agit donc de trouver la valeur de a qui annule l'espérance.

$E(X) = \ a \times \ P(X = -2) + 0 \times \ P(X = 0) + \ 5 \times \ P(X = 5)$

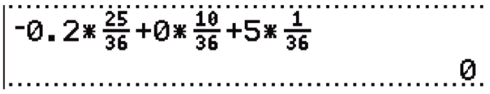
$E(X) = \ \frac{25}{36}a + \frac{5}{36}$

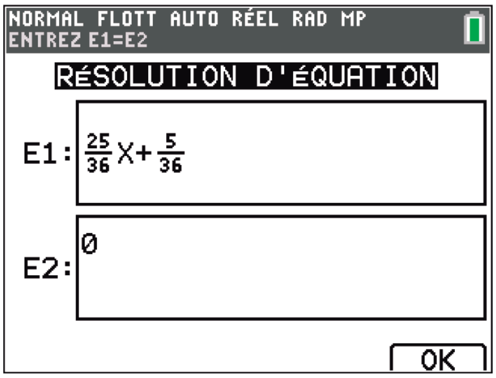
On doit donc résoudre l'équation $\frac{25}{36}a + \frac{5}{36} = 0$

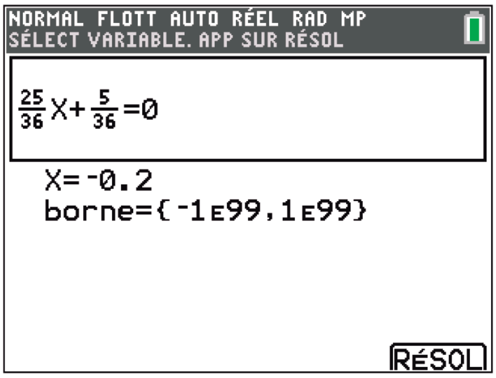
Pour cela, on utilise l'application `Résoudre` accessible via la touche résol



On trouve la valeur $a = -0{,}2$ c'est-à-dire que le joueur doit perdre 20 centimes pour que l'espérance du jeu soit nulle.







On reproduit la même démarche pour trouver, cette fois-ci, la valeur prise par la variable aléatoire lorsque le joueur gagne. Dans ce cas, on a :

$E(X) = \frac{-25}{18} + \frac{a}{36}$

Et on doit résoudre l'équation $\frac{-25}{18} + \frac{a}{36} = 0$

Dans ce cas, le joueur doit gagner 50€ pour que l'espérance du jeu soit nulle.