

# Lernpfad

## "Bestimmung von Schwerpunktslagen"

Heinz Pichler

### 1. Definition des Schwerpunkts (SP)

Von den vielen Möglichkeiten der SP-Definition sei in diesem Artikel auf eine mathematisch-orientierte und minder physikalisch-erläuternde gesetzt, weil sie dem Wesen der folgenden Beispiele und erst recht dem Kalkül eines elektronischen Rechners auf den Leib geschnitten ist:

Demnach ist der Ort des Schwerpunktes mehrerer punktförmiger und untereinander gleicher Massen das Arithmetische Mittel aus deren (vektoriellen) Lagen. Bei ungleichen Massen betrachten wir jede davon als Vielfaches des Größten Gemeinsamen (Massen-)Teilers und behandeln die Teile solchermaßen als getrennte Körper, womit das Problem auf eines gleicher Massen -aber eben vervielfachter Anzahl- deduziert ist. Diese Definition gilt für jede Orientierung, insbesondere für die kartesischen Achsenrichtungen. Wir begnügen uns dabei auf zweidimensionale Betrachtungen in der xy-Ebene. Schrägrichtungen darin bezeichnen wir mit "S".

Je nachdem, ob das betrachtete Gebilde eine endliche Ansammlung diskreter Massenpunkte oder eine kontinuierliche Massen-Verteilung über Linien, Flächen oder Räume darstellt, unterscheidet man zwischen Punkte-, Linien-, Flächen- und Volumen-Schwerpunkten.

### 2. Punkte-Schwerpunkt

#### Beispiel 1:

Ein Feuerwerkskörper sei durch die Explosion in 99 gleichmassige Stücke<sup>1</sup> zerborsten, wie es das folgende Programm simuliert. Gesucht sei deren gemeinsame SP-Lage -und damit auch die Position des Feuerwerkskörpers, wenn er nicht krepieri wäre!

```
PROGRAM:EXPLOSIV
:PlotsOff :FnOff
:Full
:ZStandard:ZDecimal
:RectGC:CoordOn:GridOff:AxesOff
:ClrList Lx,Ly
:For(I,1,99)
:  Xmin+(Xmax-Xmin)*rand→LX(I)
:  Ymin+(Ymax-Ymin)*rand→LY(I)
:  Pt-On(LX(I),LY(I))
:End
```

Weil das Programm die Lagekoordinaten vorsorglich in den Listen Lx und Ly abgelegt hat (Programmzeile 7,8), brauchen wir nur mehr deren Arithmetisches Mittel zu bilden, um die Lage des SP zu eruieren (Abb.1a,b; Random-Startwert 1).

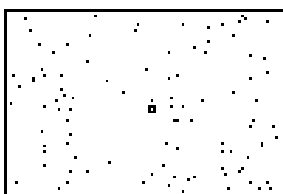


Abb. 1a

```
1→rand:PrmEXPLO
SIV
sum(LX)/99→X
sum(LY)/99→Y
Circle(X,Y,0.1)
```

Abb. 1b

Anregung:

Natürlich kann das Resultat auch zur Diskussion über die Ausgewogenheit des Random-Generators herangezogen werden, insbesondere, wenn vor dem Programmstart unterschiedliche Random-Initialisierungen gesetzt werden. Eine statistische Analyse, wie sie in Kapitel 3 zum Einsatz kommt, würde zudem noch eine bessere Beurteilungsgrundlage bieten.

#### Beispiel 2:

In einer Zentrifuge mit 3dm Radius werden 4 Proben zu 3,5g, 4,2g, 1,9g und 5,7g Blut zyklisch gleichmäßig verteilt. Erst ist deren SP-Lage zu bestimmen, ehe über die Anbringung einer Ausgleichsmasse am Zentrifugenrand zur Behebung der Unwucht zu befinden ist!

Der Massenteiler beträgt hier 0,1mg und führt bei Auftrennung aller Massen zu 35+42+19+57=153 Stücken. Da wir die Koordinatenlisten Lx und Ly mit sich wiederholenden Daten nicht überlasten (und auch Besitzer eines TI-82 nicht ausgrenzen) wollen, greifen wir zu einer dritten Liste LM, welche die Häufigkeit der Massenteiler, also kurz die Massen festhalten soll (Abb.2a). Durch Multiplikation der Koordinatenwerte mit deren Häufigkeiten und Teilung durch die Gesamtanzahl ermitteln wir das Gewichtete Mittel und damit den SP-Ort (Abb.2b). Mittels Ploteinstellung nach Abb.2c und Zeichenanweisung von Abb.2d erhalten wir den -händisch kommentierten- Lageplan (Abb.2e). (Die nochmalige Errechnung der SP-Koordinaten im Circle-Befehl ist notwendig, da der Rechner mit Neuerstellung einer Graphik das Y-Register und im Parameter-, wie im Polarmodus auch das X-Register automatisch löscht.)

```
(3,0,-3,0)→X
(3,0,-3,0)
(0,3,0,-3)→Y
(0,3,0,-3)
(3,5,4,2,1,9,5,7
)→M
(3,5 4,2 1,9 5,...
```

Abb. 2a

```
sum(LX*LM)/sum(L
M)→X
.3137254902
sum(LY*LM)/sum(L
M)→Y
-.2941176471
```

Abb. 2b

```
Plot1 Plot2 Plot3
Off Off Off
Type: [ ] [ ] [ ]
Xlist:X
Ylist:Y
Mark: [ ] [ ] [ ]
```

Abb. 2c

```
Circle(0,0,3):Pt
-On(0,0):Circle(
sum(LX*LM)/sum(L
M),sum(LY*LM)/su
m(LM),0.1)
```

Abb. 2d

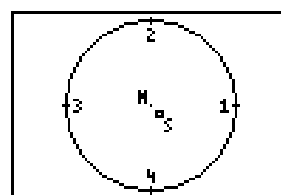


Abb. 2e

```
R→Pθ(X,Y)+180→θ
136.8476103
sum(LM)*R→Pr(X,Y
)/3
2.19317122
```

Abb. 2f

Nach neuerlicher Speicherung der SP-Koordinaten in X,Y über jeweils dreimaliges ENTRY gemäß Abb.2b lösen wir im <Degree>-MODE die Vektor-Forderung

$$\vec{r}_{\text{BlutSP}} \cdot \vec{m}_{\text{Blut}} + \vec{r}_{\text{Ausgleich}} \cdot \vec{m}_{\text{Ausgleich}} = \vec{0} \wedge |\vec{r}_{\text{Ausgleich}}| = 3 \text{ dm}$$

auf polare Weise und erfahren nach Abb.2f, dass ca.2,2g an zusätzlicher Masse unter einem Winkel von ca.137° gegenüber der Nulllinie an der Peripherie anzubringen ist, um für ein rundes Laufen der Zentrifuge zu sorgen.

Schneller als über den in Abb.2b gewählten Weg kommt man mit einer statistischen Analyse zum Ziel, wie sie im nächsten Kapitel vorgeführt wird. Ausserdem bedarf es in diesem Fall keiner Rechenwiederholungen, weil die SP-Koordinaten in den Speichern  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$  sicher verwahrt und von dort unter Einsatz des VARS<Statistics>-Menüs anstelle der X- bzw. Y-Werte abzurufen sind.

### Beispiel 3:

Drei Massen mit den Werten 5g, 8g sowie 11g und jeweils 40cm an gegenseitigem Horizontalabstand werden an fast masselosen Jochen aufgehängt. Masse 1 und 2 hängen an den beiden Enden des Balkens "a" und dieser hängt zusammen mit Masse 3 an einem weiteren Balken "b" (Abb.3c). Dessen Länge, sowie die Inneren Teilungsverhältnisse (ITV) durch die Aufhängepunkte sind zu errechnen!

Da die Aufhängefäden stets durch die betreffenden SP verlaufen, sind die SP-Lagen von zentralem Interesse. Mit dem Koordinatenursprung in der ersten Masse hat der SP aus dieser und der zweiten Masse die Lage von Abb.3a, Zeile 1-3. An dieser Stelle ist der 40cm lange Balken "a" aufzuhängen und weist somit ein ITV von Abb.3a, Z.4/5 auf.

Balken "b" muss eine Länge von Abb.3a, Z.6/7 haben. Sein Aufhängepunkt weist die absolute Koordinate Abb.3b, Z.1-3 bzw. die balkenbezogene von Abb.3b, Z.4/5 auf. Das ITV beträgt hier Abb.3b, Z.6/7.

```
(0*5+40*8)/(5+8)
→A
24.61538462
A/(40-A)*Frac
8/5
80-A→L
55.38461538
```

Abb. 3a

```
(A*(5+8)+80*11)/(
(5+8+11)→K
50
K-A→B
25.38461538
B/(L-B)*Frac
11/13
```

Abb. 3b

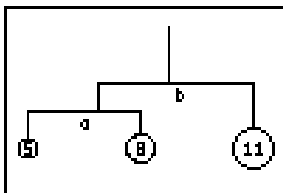


Abb. 3c

Anregungen:

- Verfertigen Sie mit den obigen Resultaten die maßstäbliche Zeichnung des Mobile von Abb.3c! (Als Zeichengrundlage können Sie im WINDOW Xmin=-6; Xmax=88; Ymin=-14; Ymax=48 das Bild MOBILE3 verwenden.)
- An welchen Stellen der obigen Berechnung manifestiert sich das Hebelgesetz?

- Arbeiten Sie den Zusammenhang zwischen Hebelgesetz und SP-Definition heraus!
- Das Hebelgesetz folgt zwingend aus der vektoriellen Kraftzusammensetzung. Erarbeiten Sie eine diesbezügliche Herleitung!
- Ähnliche Anordnungen und Probleme der Lastverteilung finden Sie bei mehrpunktig abgestützten Scheibenwischerblättern oder bei vielachsigen Fahrwerksaufhängungen von Tiefladern im Eisenbahn- und Kraftfahrzeugwesen. (Im Unterschied zum Mobile sind hier durchwegs Druck- statt Zugkräfte am Werk.) Finden Sie weitere Beispiele der diskreten Kraftverteilung oder -bündelung!

### 3. Linien-Schwerpunkt

Für linienhaft verteilte Massen scheidet eine Einzelerfassung aller (infinitesimal kleinen) Massenteile aus Gründen ihrer Vielzahl aus. Daher gehen wir hier blockweise vor: Als Block bietet sich im einfachsten Fall eine Strecke an; deren Schwerpunkt liegt aus Symmetriegründen in der Streckenmitte und hat eine der Streckenlänge adäquate Gewichtigkeit. So reduziert sich die SP-Bildung eines ganzen Streckenzuges auf die gewichtete Zusammensetzung seiner endlich vielen Streckenschwerpunkte. Sie erfolgt nach demselben Muster wie in Beispiel 2. Siehe auch Merksatz der Abb.14!

### Beispiel 4:

Der 4,5m hohe, 2,7m breite, aus gleich dicken Balken bestehende Buchstabe "L" eines Firmennamens war mit seinen Enden an einer Wand befestigt und hat sich aus der unteren Verankerung gelöst, sodass er nur mehr am oberen Haken baumelt (Abb.4e). Um welchen Winkel hat er sich verdreht?

Mit dem verbliebenen Aufhängepunkt als Koordinatenursprung nahmen die Schwerpunkte des senkrechten und des waagrechteten Balkens ursprünglich die Positionswerte der  $\bar{L}X$ - und  $\bar{L}Y$ -Liste ein (Abb.4a). Sie liefern per Gewichtetem Mittel die Lage des gemeinsamen SP (Abb.4b,c; Zeile 2). Da dieser letztendlich die Lage senkrecht unter dem Aufhängepunkt aufsucht, dreht sich der gesamte Buchstabe gemäß der im <Degree>-MODE eingegebenen Anweisung von Abb.4d um etwa 9,3° mit dem Uhrzeiger.

```
(0,2.7/2)→X
(0,1.35)
(-4.5/2,-4.5)→Y
(-2.25,-4.5)
(4.5,2.7)→M
(4.5,2.7)
2-Var Stats LX, LY, LM
```

Abb. 4a

```
2-Var Stats
tg=-3.09375
tg=-22.275
tg=77.45625
Sg=
sg=1.089276566
Σxg=-16.4025
```

Abb. 4b

```
2-Var Stats
x=.50625
Σx=3.645
Σx²=4.92075
Sx=
σx=.6535659397
↓n=7.2
```

Abb. 4c

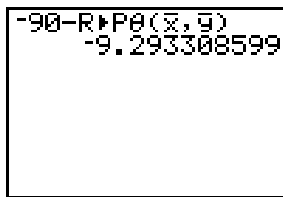


Abb. 4d

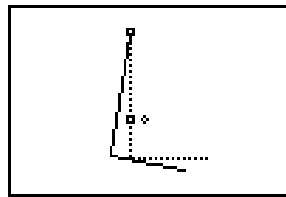


Abb. 4e

Anregungen:

- Vermutlich haben auch Sie fürs Ausmaß der Drehung einen höheren als den errechneten Wert erwartet! Warum wohl?
- Stellen Sie die Line-Befehle zur Darstellung der Abb.4e auf!

Damit ist auch die Vorgangsweise zur SP-Bestimmung bei vielgliedrigen Polygonen skizziert. Das Programmpaket POLYGON<sup>3</sup> verbessert dabei den Abwicklungskomfort, indem es eine graphische Eingabe der Polygonpunkte vorsieht. Mit jeder Streckeneingabe fügt es diese zum bestehenden Gebilde hinzu und aktualisiert die Lage des Gesamt-SP. Dessen Koordinaten finden sich in den Speichern V,W.

#### Beispiel 5:

Gilt es, den Linienschwerpunkt eines Halbkreisbogens mit Radius 1 (Abb.18) zu errechnen, muss zunächst eine Zerlegung in (angenäherte) Strecken vorgenommen werden. Einfacher Grenzen und Schrittweiten zuliebe, unterteilen wir den Bogen in 90 gleich lange Stücke<sup>1</sup> und ermitteln deren (angenäherte) SP-Koordinaten in Bezug auf den Kreismittelpunkt im <Degree>-MODE gemäß Abb.5a. Die Lage des Gesamt-SP ergibt sich aus dem Arithmetischen Mittel der Listenglieder (Abb.5b, Z.1-4).

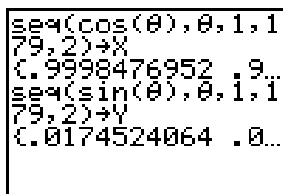


Abb. 5a

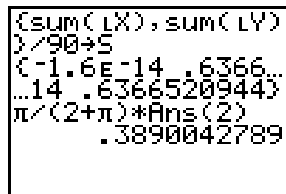


Abb. 5b

Aus Symmetriegründen ist der Wert der SP-X-Koordinate natürlich als 0 zu interpretieren; der Wert der Y-Koordinate kann mittels numerischer Integration im <Radian>-MODE

$$\text{fnInt}(\sin(\theta), \theta, 0, \pi) / \pi$$

noch auf 0,6366197724 verbessert werden und weicht vom exakten Wert  $2/\pi$  nur mehr minimal ab. Mit Schließung des Halbkreisrandes über den Durchmesser 2 verlagert sich der SP in Y-Richtung auf den Ausdruck,

$$(\theta * 2 + \text{LS}(2) * \pi) / (2 + \pi)$$

der nach Abb.5, Z.5/6 also 389 Promille des Radius ausmacht.

Anregungen:

- Finden Sie eine plausible Erklärung, warum der SP für einen (offenen) Viertelkreisbogen vom Mittelpunkt  $\sqrt{2}$ -mal so weit entfernt ist wie für einen (offenen) Halbkreisbogen!
- Wie groß ist die radiale Entfernung dann bei einem Achtel- und einem Sechzehntelbogen?

## 4. Flächen-Schwerpunkt

### Beispiel 6:

Für ein beliebiges Dreieck sei der Schwerpunkt seiner Fläche auszumachen!

Im WINDOW  $X_{\min}=0$ ;  $X_{\max}=9,4$ ;  $Y_{\min}=-0,6$ ;  $Y_{\max}=5,6$  eröffnen wir ein Dreieck mit der Grundseite über die volle Displaylänge und dem dritten Eckpunkt an der Displayoberkante (z.B.  $X_c=3,6$ ), indem wir nach Wahl des <Func> <Connected> -MODE die Seiten-Gleichungen formulieren (Abb.6a) und ihre Steigungen festlegen (Abb.6b). (Die Definition in Abb.6b, Z.6 ist deshalb notwendig, weil der Formel-Editor die Nennung der Systemvariablen  $X_{\max}$  nicht akzeptiert.)

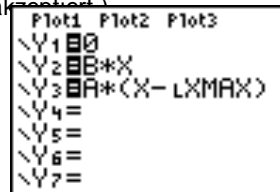


Abb. 6a

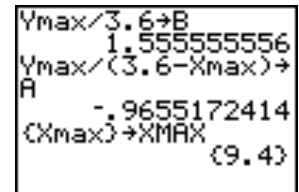


Abb. 6b

Dieses Dreieck zerschneiden wir in lauter grundseitenparallele Streifen ( $P_i, Q_i$ ) und tragen zu diesen die Schwerpunkte ein, indem wir nach Abb.7a, Zl.1,2 die Variable Y initialisieren und darauf die Mehrfachanweisung dieser Abbildung mit ENTER CLEAR oftmals ausführen. Im Resultat (Abb.7b) erkennen wir, dass alle Streifen-SP auf einer Geraden, der Schwerlinie  $s_c$  liegen.

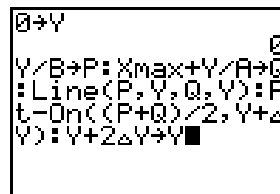


Abb. 7a

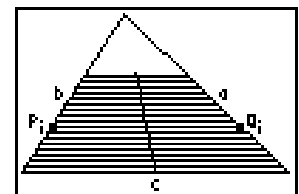


Abb. 7b

Der Gesamtschwerpunkt als Linearkombination aller Streifen-SP liegt zwingend auf dieser Linie, doch an welcher Stelle? Zur Lösung seien 2 Möglichkeiten angeboten:

Die eine Variante bedient sich des induzierenden Schlusses, dass die über die Schwerlinie  $s_c$  gewonnene Einsicht auch für die anderen Schwerlinien gilt. So stellen wir neben der Gleichung von  $s_c$  auch jene für die Verbindungslinie vom Eckpunkt B zum Halbierungspunkt der Seite b auf (Abb.8a; der reziproke Klammerausdruck begrenzt die Linien an der Dreieckseite) und legen ihre Steigungen W bzw. V fest (Abb.8b).

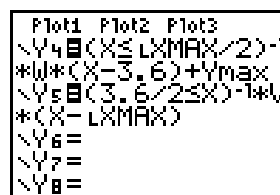


Abb. 8a

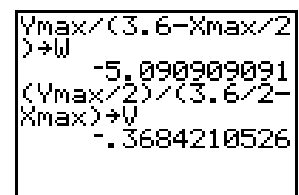


Abb. 8b

Weil der Dreieckschwerpunkt die Eigenschaften beider Schwerlinien in sich vereinen muss, resultiert er aus deren Schnitt. Wir bilden mittels CALC <intersect>, gefolgt von der

Auswahl der Linien "4" und "5" (rechts, oben im Bildschirm) den gemeinsamen Schnittpunkt und erhalten dessen Koordinaten (Abb.9a).

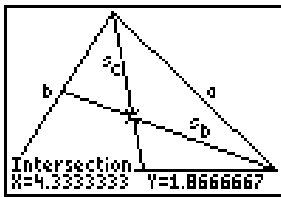


Abb. 9a

$$\begin{aligned} & (Y_{\max}-Y)/Y_{\max} \cdot \text{Frac} \\ & \text{ac} \\ & (X_{\max}-X)/(X_{\max}-3) \\ & \cdot 6/2 \cdot \text{Frac} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} 2/3 \\ 2/3 \end{array}$$

Abb. 9b

Keht man unmittelbar darauf mit QUIT in den Home-Screen zurück, zeigen die Anweisungen der Abb.9b unter Gebrauch des Strahlensatzes, dass der Abschnitt Eckpunkt-Schwerpunkt bei beiden Schwerlinien jeweils 2/3 deren Länge ausmacht.

Anregungen:

- Probieren Sie Dasselbe mit der Schwerlinie  $s_a$ !
- Ermitteln Sie das Innere Teilungsverhältnis der Schwerlinie durch den SP!
- Der Konstruktionsablauf lässt sich in ähnlicher Weise mit der -beim TI-84 Plus bereits vorinstallierten- Applikation "Cabri- Junior" abwickeln. Versuchen Sie es!

Die andere Variante zur Auffindung des Gesamtschwerpunktes auf der Schwerlinie bedient sich des Gewichteten Mittels aus allen Streifen-SP. Bei Teilung der der Einfachheit halber auf 1 normierten Schwerlinie in 99 gleiche Stücke<sup>1</sup> hat jeder Teil vom Eckpunkt aus gesehen die Position (S/99) und das Gewicht der Streckenlänge ( $X_{\max}/99 \cdot S$ ). So erhalten wir für die Distanz Eckpunkt-Schwerpunkt einen Anteil von rund 66,66% der Schwerlinienlänge (Abb.10a)<sup>2</sup>. Unter Einsatz der ausgefeilten agierenden, numerischen Integration wird dieser Wert wieder genau mit 2/3 bemessen (Abb.10b).

$$\text{sum}(\text{seq}((S/99) \cdot (X_{\max}/99 \cdot S), S, .5, 98.5)) / \text{sum}(\text{seq}(X_{\max}/99 \cdot S, S, .5, 98.5))$$

Abb. 10a

$$\text{fnInt}(S \cdot (X_{\max} \cdot S), S, 0, 1) / (X_{\max} / 2)$$

Abb. 10b

Anregung:

Stellen Sie Vermutungen über die Lagen des Eckpunkt-SP und des Seiten-SP für ein Dreieck auf und verifizieren Sie diese durch konkrete Berechnung mit dem Rechner!

Zur bequemen Schwerpunktsermittlung eines Vielecks dient das Programmpaket VIELECK<sup>3</sup>. Nach zyklischer Eingabe der Eckpunkte ermittelt es neben anderen Daten des Vielecks auch die Lage des Linien- und des Flächen-SP.

In sehr ähnlicher Weise zum letzten Rechengang verläuft die Schwerpunktssuche im

#### Beispiel 7:

Für eine Halbkreisfläche mit Radius 1 (Abb.18) ist der Flächenschwerpunkt aufzusuchen!

Dass er auf der Symmetrielinie der Figur liegt, ist trivial. So ist das Problem nur mehr ein eindimensionales und kann

ähnlich zu Abb.10a behandelt werden. Im elementbildenden Ausdruck der Abb.11a<sup>1</sup> mit Y als vom Mittelpunkt zur Kuppe laufender Koordinate stellt die Klammer (Y/99) die jeweiligen Streifenpositionen dar, während der Rest die gewichteten Streifenlängen repräsentiert<sup>2</sup>.

Ein genaueres Resultat erzielen wir wieder durch numerische Integration; der exakte Wert beträgt  $4/(3\pi)$  (Abb.11b).

$$\text{sum}(\text{seq}((Y/99) \cdot 2 \cdot \sqrt{1-(Y/99)^2}, Y, .5, 98.5)) / \text{sum}(\text{seq}(2 \cdot \sqrt{1-(Y/99)^2}, Y, .5, 98.5))$$

Abb. 11a

$$\text{fnInt}(Y \cdot 2 \cdot \sqrt{1-Y^2}, Y, 0, 1) / (\pi/2)$$

Abb. 11b

Anregung:

Geben Sie eine einleuchtende Erklärung, warum der Linien-SP mehr als 50% und der Flächen-SP weniger als 50% des Kreisradius vom Mittelpunkt entfernt sind!

#### Beispiel 8:

Will man für eine Halbkugelsphäre mit Radius 1 (Abb.18) den Oberflächenschwerpunkt finden, hat man es mit einer Kombination aus Beispiel 5 und 7 zu tun! Auch hier liegt der SP auf der Symmetrieachse der Figur, sodass trotz Dreidimensionalität des Objektes das Rechenproblem ein eindimensionales ist. Unterteilen wir die Halbkugelhaut durch Breitenkreise in ringförmige Streifen und lassen den Zentriwinkel vom Sphären-Rand zum Sphären-Scheitel streichen, so beträgt die Streifenlage jeweils  $\sin(\theta)$  und die gewichtete Streifenfläche  $2\pi \cos(\theta) \cdot d\theta$ . Das numerische Integral im <Radian>-MODE

$$\text{fnInt}(\sin(\theta) \cdot 2\pi \cos(\theta), \theta, 0, \pi/2) / (2\pi)$$

erbringt für die SP-Lage den halben Kugelradius. (In Kapitel 5 wird zu diesem Beispiel noch ein anderer Lösungsweg beschrieben.)

#### Beispiel 9:

Einer aus dünnem Blech gefertigten Halbkugelfläche wird an der offenen Seite ein Kegelmantel gleichen Durchmessers und selbigen Bleches aufgesetzt (Abb.12a). Wie hoch darf der Kegel höchstens sein, damit der Hohlkörper stabil auf dem Kugelscheitel steht?

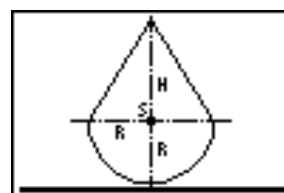


Abb. 12a

$$\text{solve}(H/3 \cdot 2\pi \sqrt{1+H^2}/2 - 1/2 \cdot 2\pi, H, 1)$$

Abb. 12b

Zweckmäßig legen wir den Koordinatenursprung in den Kugelmittelpunkt und normieren den Radius wieder auf 1. In Anwendung des Resultats von Abb.10b hat der Kegelmantel aus räumlich aneinandergereihten, infinitesimalen, kongruenten Dreiecken mit der Raumhöhe h den SP in der Höhe  $h/3$  liegen; die Gewichtung obliegt dessen Fläche, beträgt also  $2\pi \sqrt{1+h^2}/2$ . Der SP der Halbkugelsphäre hat den Ordinatenwert  $-1/2$  und die Bewertung  $2\pi$ . Zur Erlangung eines indifferenten Gleichgewichts muss der Gesamt-SP in den

Kugelmittelpunkt gelangen, womit der Wert des Ausdrucks in Abb.12b, Z.1-3 verschwindet. Stabilität ist also unter folgenden Bedingung gegeben:

$$H < \sqrt{\frac{37-1}{2}} \cdot R.$$

### Beispiel 10:

Ebene Flächen mit völlig unregelmäßiger Begrenzung, wie etwa jene eines Landes, werden zur SP-Bestimmung am einfachsten durch Abfahren und Auswerten eines darübergelegten, kartesischen Gitters bearbeitet. So nimmt das Programm AREASPKT<sup>3</sup> von allen im Graphikdisplay schwarz gefärbten Pixeln den Standort auf und mittelt ihn. Der Abb.13 liegt beispielsweise im Bildschirmrahmen Xmin=0, Xmax=215, Ymin=0, Ymax=142 die Karte der "Steiermark"<sup>3</sup> zugrunde. Ein Programmlauf gibt nach wenigen Minuten die indirekte Empfehlung ab, die Landeshauptstadt "Graz" aus mathematischer Fairness auf den 1988m hohen Speikkogel zu verlegen ...

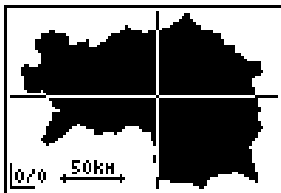


Abb. 13



Abb. 14

Anregung:

Entwickeln Sie das Programm derart weiter, dass zur Bearbeitung der Aufgabe nur die Eingabe des Flächenrandes - etwa mit DRAW<Pen>- vonnöten ist!

Natürlich kann das Programm auch zur Ermittlung von Linien-SP, insbesondere bei zisierten Strukturen herangezogen werden, wie dies in Abb.14<sup>3</sup> geschah!

## 5. Volumen-Schwerpunkt

Zerlegt man ein Prisma mit beliebiger Grundfläche in lauter zu ihr parallele und untereinander gleich dicke Scheiben, so liegen ihre Schwerpunkte auf der Verbindung zwischen Grund- und Deckflächenschwerpunkt. Zuzugabe der Gleichgewichtigkeit der Scheiben liegt der Prismen-SP in der Mitte dieser Schwerlinie. Nicht so einfach liegen die Verhältnisse bei einer Pyramide!

### Beispiel 11:

Wo liegt der Schwerpunkt einer Vollpyramide, deren Grundfläche und deren Schwerlinie durch die Spitze jeweils auf 1 normiert sind?

Bei einer Pyramide liegen die SP der grundflächenparallelen Scheiben auf der Verbindung zwischen Grundflächen-SP und Pyramidenspitze. Ihr Gewichtetes Mittel -und damit der Körperschwerpunkt- ergibt sich nach Abb.15a,b<sup>1,2</sup> mit 75% der Schwerlinienlänge. An diesem Prozentsatz ändert sich nichts, wenn sich der Grundflächeninhalt oder die Pyramidenhöhe verändert. Für einen Kegel gelten dieselben Schlüsse und Resultate.

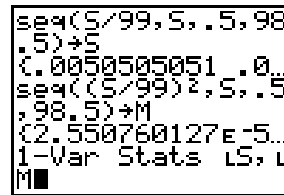


Abb. 15a

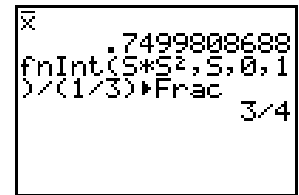


Abb. 15b

Anregungen:

- Welche Möglichkeiten bieten sich zur SP-Berechnung von Pyramidenstümpfen?
- Der Schwerpunkt einer Strecke, eines Dreiecks, einer Pyramide weist, von der Spitze aus gemessen, einen Abstand von 1/2, 2/3, 3/4 der Schwerlinienlänge auf. Diese Regelmäßigkeit ist kein Zufall. Arbeiten Sie das dahinterstehende Prinzip klar heraus!

### Beispiel 12:

Für eine Halbkugel mit Radius 1 (Abb.18) ist der (auf der Symmetrieachse liegende) Körperschwerpunkt aufzusuchen! Vom Mittelpunkt her gezählt, ergibt die Prozedur der Abb.16a<sup>1,2</sup> das Ergebnis, das nach Abb.16b im exakten Format wieder überraschend einfach ausfällt.

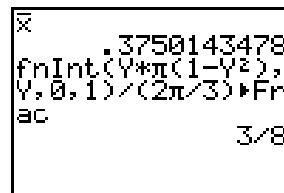


Abb. 16a

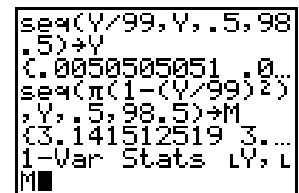


Abb. 16b

Nachtrag zu Beispiel 8:

Eine Halbkugelhaut der Dicke 2E und dem Radius 1 kann man sich auch als Differenz zweier konzentrischer Halbkugeln mit geringfügigem Radienunterschied, nämlich  $r_1 = 1+E$ ;  $r_2 = 1-E$ , entstanden denken. Der Sphären-SP auf der Symmetrieachse hat bezüglich des Mittelpunktes die Koordinate,

$$\frac{\frac{3}{8}(1+E) \cdot \frac{2\pi}{3}(1+E)^3 - \frac{3}{8}(1-E) \cdot \frac{2\pi}{3}(1-E)^3}{\frac{2\pi}{3}(1+E)^3 - \frac{2\pi}{3}(1-E)^3}$$

worin der jeweils zweite Faktor des Zählers und die Terme im Nenner die Gewichtungen darstellen. Durch  $(2\pi/3)$  gekürzt, liefert der Bruch für kleiner werdendes E alsbald den Wert 0,5 (Abb.17). (Natürlich lässt sich der genannte Wert genauso gut durch Entwicklung der potenzierten Binome herleiten.)

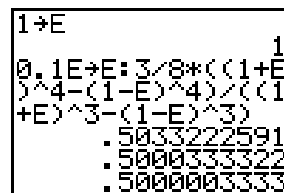


Abb. 17

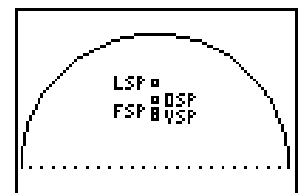


Abb. 18

Abb.18 stellt die Lagen von Linien-, Flächen-, Oberflächen- und Volumenschwerpunkt eines Halbkreisbogens, einer Halbkreisfläche, einer Halbkugelsphäre bzw. einer Halbkugel im gegenseitigen graphischen Vergleich dar.

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass selbst bei flächigen oder körperhaften Objekten der Schwerpunkt materielfreie Lokalitäten als Standort einnehmen kann!

Die Lagebestimmung von Linien-, Flächen- und Volumenschwerpunkten hat im Anlagenbau wesentliche Bedeutung, kommt es bei Fachwerkteilen doch darauf an, die Aufhängegeöse stets senkrecht über dem SP zu positionieren, um einen Transport am Kranhaken in der gewünschten Hängeorientierung zu gewährleisten.

## 6. Der Schwerpunkt-Turm

### Beispiel 13:

Durch Übereinanderlegen lauter gleicher Münzen soll ein möglichst hoher und möglichst überhängender Turm gebaut werden!

Legt man den Versatz der Münzen gleichbleibend an, so fällt der Turm in dem Moment um, als die oberste Münze die unterste um einen ganzen Münzdurchmesser überragt. In diesem Stadium gerät nämlich der Körperschwerpunkt des gesamten Schrägzylinders über die Standfläche der untersten Münze hinaus. Siehe auch Abb.19<sup>3</sup>!

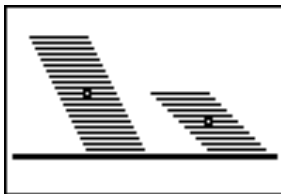


Abb. 19

Anregung:

Verfertigen Sie zur Erstellung der obigen Abbildung eine passende Anweisungsroutine!

So kommen wir zum Schluss, dass bei linearer Bauweise der Überhang höchstens das Ausmaß eines Münzendurchmessers erreichen kann. Die Bauhöhe kennt jedoch keine Schranke; sie hängt reziprok vom Ausmaß des Münzversatzes ab.

Diese Erkenntnis bringt uns auf die Idee, den Versatz variabel, und zwar schwerpunktsorientiert zu wählen. Da das Problem der Instabilität gerne am untersten Kippunkt akut wird, müssen wir den Turm -ausführungsfremd, aber logisch zielführend- von der obersten Münze her zu bauen beginnen und ihm Münze um Münze unterschieben. Dabei wird jede neue Münze mit ihrem Rand senkrecht unter den Körperschwerpunkt des bestehenden Turmteiles gebracht.

Mit Hinzutritt der n-ten Münze verlagert sich der SP des bisherigen Münzstapels  $x_{n-1}$  auf den neuen Wert:

$$x_n = \frac{x_{n-1} \cdot (n-1) + (x_{n-1} + R) \cdot 1}{n} = x_{n-1} + \frac{R}{n}, \quad x_0 = 0$$

Diese Rekursiv-Formel mit dem normierten Münzradius  $R=1$  vertrauen wir im <Seq>-MODE dem Formeleditor an (Abb.20a), stellen das WINDOW auf die Werte der Abb.20b,c ein, wählen als Darstellungs-FORMAT <Time> und exekutieren die im Home-Screen zu formulierende Anweisung der Abb.20d,Zl.1,2. Die sich ergebende (geringfügig vignettierte) Graphik (Abb.20e ohne SP-Spur) muss um 90° im Uhrzeigersinn gedreht werden, um die Seitenansicht des

progressiven, aus 48 Münzen bestehenden Turmes zu erhalten.

```
Plot1 Plot2 Plot3
nMin=0
u(n)=u(n-1)+1/n

u(nMin)=0
u(n)=
u(nMin)=
u(n)=
```

Abb. 20a

```
WINDOW
nMin=0
nMax=47
PlotStart=1
PlotStep=1
Xmin=0
Xmax=47
Xscl=0
```

Abb. 20b

```
WINDOW
PlotStep=1
Xmin=0
Xmax=47
Xscl=0
Ymin=0
Ymax=6.2
Yscl=0
```

Abb. 20c

```
Shade(u(X),u(X)+
2,0,47,2)
u(47)/2
2.218981921
round(u(1,4,16,
64),1)
(1 2.1 3.4 4.7)
```

Abb. 20d

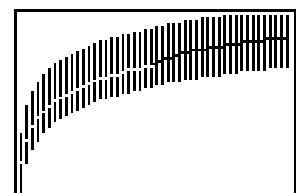


Abb. 20e

Immerhin bordet er gegenüber der untersten Münze um das in Abb.20d, Z.4 ausgewiesene Vielfache des Münzdurchmessers über! Dass er im Prinzip beliebige Weiten erzielen kann, wird mit dem Rechner über die Anweisung der Abb.20d, Z.5-7 demonstriert: Mit jeder Vervierfachung der Turmhöhe wird mindestens 1 weiterer Münzradius überspannt!

Mit Durchführung der Anweisung von Abb.21a wird der Graphik die Spur des beim realen Bau mitwachsenden Schwerpunktes hinzugefügt. Dunkle Linie in Abb.20e!

```
u(48)*48:DrawF (
47/2≤X):1*(Ans-u(
2X-47)*(2X-47))/
(48-(2X-47))
```

Abb. 21a

```
0→X
Pt-Off(X,(X<47/2
)-1*u(2X+1)):X+1→
X
```

Abb. 21b

Umgekehrt würde die Anweisung  
DrawF (X≤47/2)\*1\*u(2X+1)

die SP-Linie beim (fiktiven) Bau von der Spitze zur Basis skizzieren. Um die beiden verschieden zu interpretierenden Spuren - daher auch der Knick am Treffpunkt - aber nicht zu einer durchgehenden Linie zusammenwachsen zu lassen, empfiehlt es sich, letztere in hellem Ton zu gestalten. Dazu initialisieren wir die Variable X nach Abb.21b, Z.1/2 und führen danach die Mehrfachanweisung dieser Abbildung mit ENTER CLEAR bis zum Auftreten der Fehlermeldung aus.

Die Enden der beiden SP-Spur in der Turmmitte liegen genau über dem linken Rand der untersten Münze, wie eine Peilung mit DRAW<Horizontal> ergibt.

Bei Verwirklichung des Baues hat man äusserst penibel vorzugehen. Voraussetzung dazu sind die numerischen Werte der Münzpositionen von der Basis zur Spitze hin, die man

für einen Turm aus beispielsweise 18 Münzen auf jeweils 2 Dezimalstellen abgeschnitten aus der modifizierten Rekursionsformel der Abb.22a, gefolgt von der Anweisung der Abb.22b erhält.

```
u(17)-u(0,17)÷%:
SortA(LX):LX
{0 .05 .11 .17 ...
... .24 .31 .39 ...
... .48 .58 .69 ...
... .81 .95 1.11 ...
... 1.31 1.56 1.8...
... 1.89 2.39 3.39}
```

Abb. 22a

```
Plot1 Plot2 Plot3
nMin=0
u(n)=u(n-1)+int
(100/n)/100
u(nMin)=(0)
v(n)=
v(nMin)=
w(n)=
```

Abb. 22b

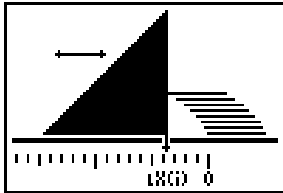


Abb. 22c

Zur Übertragung der Werte in die Realität benutzt man eine ebene Unterlage, auf die man ein Geodreieck aufsetzt (Abb.22c). Nachdem das Dreieck mit Hilfe einer Feinskala oder den Innenmessspitzen einer Schiebelehre in die vorgeschriebene Position aus Abb.22b gebracht wurde, legt man die nächste Münze bündig mit der Dreieckskathete auf den Münzstapel. Anfangs beschert die Stabilität -in Übereinstimmung mit dem Verlauf der dunklen SP-Spur in Abb.20e- keinerlei Schwierigkeiten, was zur Sorglosigkeit im Umgang mit den Baudaten führen kann. Erst gegen Ende der Bauausführung wird die Statik indifferent. Nun rächt sich jede vorher begangene Bausünde! Überdies müssen die letzten Münzen möglichst impulsarm aufgesetzt werden, um das Gelingen nicht noch in letzter Sekunde zu gefährden!

Anregung:

Die Turmkonstruktion ist ein lupenreiner Gewichtsbaum, der allein auf die Festigkeiten der Steine setzt und die Fugen zug- wie scherungsfrei hält. Durch Seitenabstützungen ließen sich noch größere Gewölbedimensionen bei geringerer Bauhöhe erzielen, allerdings auf Kosten externen Lager oder einer Scherbeanspruchung der Fugen. Darüber hinaus lässt sich die Proportion Spannweite zu Höhe um ein weiteres Vielfaches steigern, wenn zugfeste Materialien, wie Stahlelemente integriert werden (Spannkonstruktion). Vergleichen Sie dazu den Artikel "Parabeln stehen Modell" von Dr. S. Stachniss-Carp in den TI-Nachrichten 1/05 und 2/05!

## 7. Adaptierungen für den TI-82

Großteils gelten die obigen Ausführungen auch für den TI-82. Seine fixen Listenspeicher machen allerdings eine Bezeichnungstransformation, etwa nach dem Muster LX, LY, LM, LS, LXMAX => L1, L2, L3, L5, L6 nötig.

Ebenso augenfällig ist der Umstand, dass der Befehl sum keine Argumentklammer erfordert. Bei den Funktionen sin, cos und  $\sqrt{\quad}$  darf sie für den Fall operationsfreier Argumente ebenfalls entfallen.

In den seq-Befehlen der Abb.10a, 11a, 15a muss die Schrittweite 1 dagegen explizit genannt und daher als fünftes Argument eingefügt werden.

Im Programm EXPLOSIV heisst der Befehl "Full" beim TI-82 "FullScreen". Die darin enthaltene Programmzeile ClrList LX,LY muss weggelassen werden. Sollte die Schleifenanzahl von 1-99 auf ein verringertes Ausmaß gesetzt werden, wäre die Listenlöschung aber durch die folgende Anweisung zu ersetzen:

```
1→dim L1:1→dim L2.
```

Zur Bildung eines Gewichteten Mittels per Statistischer Analyse fordert der TI-82 ganzzahlige Bewertungen. Im Beispiel Nr.4 (Abb.4a) lässt sich dies durch die zwischengeschaltete Anweisung 10L3→L3 bewerkstelligen. In den Beispielen Nr.11 (Abb.15a) und Nr.12 (Abb.16a) ist der gemeinsame Massenteiler zu klein, als dass dieser Trick gelänge. Hier muss das Gewichtete Mittel in analoger Weise zu Abb.2b gebildet werden.

Die größten Abweichungen bestehen bei den rekursiven Funktionen. Die Symbolik bedarf folgender Wandlung:

```
u(n)=      => Un=
u(n-1)     => Un-1
u(nMin)    => UnStart
PlotStart  => nStart
u           => Un
```

So mutiert Abb.20d zu Abb.20t.

```
Shade(Un(X),Un(X)
)+2)
Un(47)/2
2.218981921
round(Un(1,4,16
,64),1)
{1 2.1 3.4 4.7}
```

Abb. 20t

### Der Autor:

Mag. Heinz Pichler  
Liesersteggasse 5  
A-9800 Spittal/Drau  
E-Mail: [pichler\\_h@lycos.at](mailto:pichler_h@lycos.at)

<sup>1)</sup> Der TI-83/84 würde mit der gewählten Methode bis zu 999 Stück verarbeiten können; doch sei hier auch auf den TI-82 Rücksicht genommen, der je Liste maximal 99 Werte fassen kann.

<sup>2)</sup> Begrifflich korrekt müsste man die Ausdrücke in beiden Seq-Anweisungen noch mit  $1/99 \cdot \sin(\theta)$  (mit  $\theta$  als Neigungswinkel der Schwerlinie zu den Schnitten) multiplizieren, um tatsächlich mit Flächenstreifen bzw. Scheibenvolumina zu arbeiten. Da der Zusatz sowohl im Zähler als auch im Nenner fehlt, hat die Kürzung keinen Einfluss auf das Resultat. Ebenso fehlt in den Ausdrücken durchgehend, aber ungestraft der Massenbelag pro Dimensionseinheit, das wäre beim Volumen-SP die Dichte.

<sup>3)</sup> Das Bild/Programm liegt zum kostenlosen Download bei!