Markus Paul, BHAK Schwaz

Rule of 72 - Näherungsformel für die Verdoppelungszeit

Wie lange ist der Bremsweg bei einer Geschwindigkeit von 70 km/h? Jeder Fahrschüler muss diese Frage bei der Fahrprüfung beantworten können. Da aber die physikalische Formel zu kompliziert ist für den Alltagsgebrauch, bedient man sich in der Fahrschule einer Näherungsformel.
Wie lange dauert es, bis sich ein Kapital bei einer Verzinsung von 8 % verdoppelt hat? Wie lange dauert es bis sich die Bevölkerungs der USA mit einer jährlichen Zuwachsrate von 1,02 % verdoppelt hat?
Exponentielle Wachstumsprozesse lassen sich durch die Verdoppelungszeit beeindruckend charakterisieren. Die Verdoppelungszeit ist jene Zeiteinheit für den der Wachstumsprozess mit der Basis 2 erfolgt, gleich wie die Vermehrung der Weizenkörner auf dem Schachbrett.
Auch die Formel für die Verdoppelungszeit ist so kompliziert, dass sie im Alltag für Nicht-Mathematiker kaum praktikabel ist. Zum Glück gibt es aber auch hier eine äußerst einfache Näherungsformel, die in Amerika weit verbreitet, bei uns aber noch wenig bekannt ist. Sie heißt „Rule of 72“ und im Namen steckt schon fast die ganze Formel drin.

1. Kapitalwachstum

Ist K_0 das Anfangskapital und p der Prozentfuß, so erhält man die Verdoppelungszeit T durch Lösen folgender Exponentialgleichung:

$$2 \cdot K_0 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^T$$

Wir erhalten die Lösung $T = \dfrac{\ln 2}{\ln\left(1 + \dfrac{p}{100}\right)}$

Verzinst sich ein Kapital mit p = 8 Prozent, erhält man die Verdoppelungszeit T = 9,00647 Jahre.
Näherungsweise kann die Verdoppelungszeit durch

$$\boxed{T \approx \frac{72}{p}}$$

berechnet werden, die in Amerika unter dem Namen „Rule of 72“ bekannt ist. Für p = 8 ergibt das angenähert die Verdoppelungszeit T = 9. Der absolute Fehler beträgt lediglich 0,00647, der relative Fehler beträgt 0,00647/9,00647 = 0,07 %!
Wie gut ist nun diese Näherungsformel? Für welche Wachstumsraten liefert sie brauchbare Ergebnisse, für welche nicht?
Dazu erstellen wir mit dem TI-83 eine Tabelle für beide Formeln und lasssen den relativen Fehler berechnen:

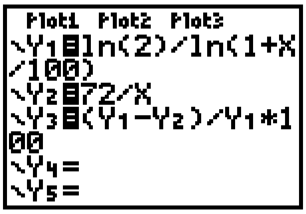
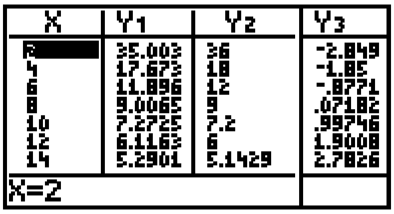


Abb. 1

Wir lassen die Wertetabelle bei p = 2 beginnen mit Schrittweite 2.



X	Y1	Y2	Y3
2	35.003	36	-2.849
4	17.673	18	-1.85
6	11.896	12	-.8771
8	9.0065	9	.07182
10	7.2725	7.2	.99746
12	6.1163	6	1.9608
14	5.2901	5.1429	2.7826

X=2

Abb. 2

Die Abhängigkeit des relativen Fehlers vom Prozentfuß p kann auch als Grafik dargestellt werden. Mit [**CALC**] > **2:zero** kann jene Wachstumsrate berechnet werden, bei der die Näherungsformel mit der Verdoppelungszeit übereinstimmt, es ist p = 7,847.

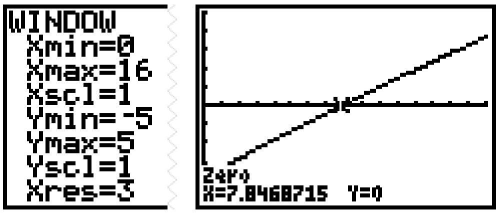


Abb. 3

Toleriert man einen relativen Fehler von ±2 %, so kann die Näherungsformel für 4 ≤ p ≤ 12 verwendet werden, das ist gerade jener Bereich, in dem viele Zinssätze liegen oder besser gesagt: bis vor wenigen Jahren lagen.
Gibt man als weitere Funktionen Y4 = -2 und Y5 = 2 ein, können mit [**CALC**] > **5:intersect** die Wachstumsraten berechnet werden, für die der relative Fehler gerade 2% beträgt, es sind dies p = 3,697 und p = 12,223.

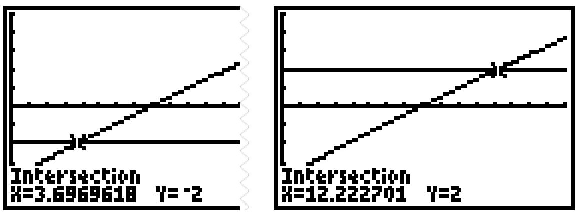


Abb. 4

2. Bevölkerungswachstum

Die Wachstumsraten für die Bevölkerung liegen aber unter 4 %!

Hier einige Beispiele:

Land	Bevölkerung (1995)	Wachstum (%,1995)	Verdoppe-lungszeit
Ägypten	62.359.623	1,95%	35,89
Banglad.	128.094.948	2,32%	30,23
Brasilien	160.737.489	1,22%	57,16
China	1.203.097.268	1,04%	66,99
Deutschl.	81.337.541	0,26%	267,01
Elfenbeink.	14.791.257	3,38%	20,85
Japan	125.506.492	0,32%	216,96
USA	263.814.032	1,02%	68,30
Quelle: CIA World Fact Book, 1995 (http://www.uni-flensburg.de/geo/wisogeo/bev2.htm)			

Donella und Dennis Meadows verwenden in ihrem Buch „Die neuen Grenzen des Wachstums" (1992) als Näherungsformel

$$\boxed{T \approx \frac{70}{p}}$$

Mit dieser Formel erhalten wir folgende Ergebnisse wobei Gleichung 2 in Abb. 1 durch Y2=70/X ersetzt wird):

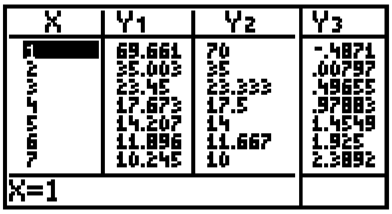


Abb. 4

Diesmal stimmt die Näherungsformel für p = 1,98 mit der Verdoppelungszeit überein.

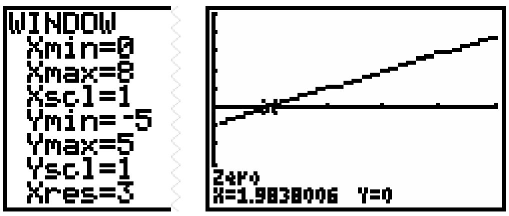


Abb. 5

Toleriert man einen relativen Fehler von ±2 %, so kann die Näherungsformel für $0 \le p \le 6$ verwendet werden (bei p = 6,16 ist der relative Fehler 2%), das ist gerade jener Bereich, in dem die Wachstumsraten für die Bevölkerung liegen.

3. Konstruktion der Näherungsformel

Wie kann man diese Näherungsformeln plausibel machen?

Wir müssen nur die Logarithmenwerte berechnen, dann liegt die Näherungsformel auf der Hand. Wir nehmen p = 2:

$$T = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}02} = \frac{0{,}6931\ldots}{0{,}0198\ldots} = \frac{69{,}31\ldots}{1{,}98\ldots}$$

Die stetige Zuwachsrate 1,98 % liegt nur wenig unter der jährlichen Zuwachsrate 2 %. Dieser Fehler kann ausgeglichen werden, indem der Nenner ein wenig erhöht wird, etwa auf 70.

Je größer die Zuwachsrate ist, desto größer wird die Differenz zwischen jährlicher und stetiger Zuwachsrate. Bei der „Rule of 72" wird der Fehler im Nenner durch den Wert 72 im Zähler korrigiert.

Mathematisch formuliert: Der Kehrwert der Logarithmusfunktion lässt sich erstaunlich gut durch eine Hyperbel annähern.

Nun kann man sogar ein kleines Spiel daraus machen: Wer findet die beste Näherungsformel für die Verdoppelungszeit von der Form $T = \frac{Z}{p}$ für Zuwachsraten um 20 %? Welche Zahl Z müssen wir für den Zähler wählen?

Wir können natürlich so lange herumprobieren, bis der Wert im Zähler ein befriedigendes Ergebnis liefert. Aber elegant kann man dieses Problem mit dem **SOLVER** (Menü [**MATH**] > **0:Solver**) lösen:

Wir geben als Gleichung 0=Y1-C/X im SOLVER ein und lassen für X = 20 den TI-83 die Sucharbeit für den Zähler Z erledigen, indem wir als Startwert für Z etwa 75 eingeben und mit [ALPHA] SOLVE den Solver starten:

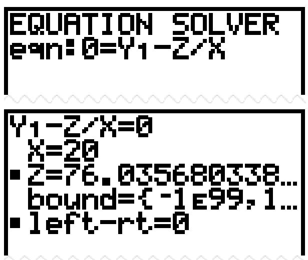


Abb. 7

Nun haben wir eine neue Näherungsformel für die Verdoppelungszeit gefunden, ich nenne sie „Rule of 76":

$$\boxed{T = \frac{76}{p}}$$

Sie liefert hervorragende Näherungswerte der Verdoppelungszeit für Zuwachsraten in der Nähe von 20%.

Der Autor:
Dr. Markus Paul
Peter-Mayr-Straße 19
A-6020 Innsbruck
mailto:markus.paul@utanet.at