Günter Heitmeyer

e-Funktionen und Wachstumsprozesse im Grundkursabitur

Im Unterricht eines Grundkurses der Oberstufe wurde durchgehend mit dem grafikfähigen Taschenrechner TI-82/83 Plus gearbeitet. Anwendungsaufgaben der Integralrechnung wurden mit Hilfe des „FnInt“ -Befehls gelöst, „e“ konnte numerisch bestimmt werden, Funktionsgleichungen ließen sich aus Messergebnissen ermitteln und konnten durch geeignete Regression und Wachstumsprozesse sequentiell dargestellt werden. Die folgende Aufgabe soll deutlich machen, wie diese Ziele in eine Abiturprüfung eingebaut werden konnten:

Aufgabe:

Gegeben sind die Gleichungen der beiden Funktionen $f(x) = 40 \cdot e^{0,2x}$ und $g(x) = 100 - 40 \cdot e^{-0,2x}$ für $x \geq 0$.

a) Stellen Sie die zugehörigen Graphen in einem gemeinsamen Achsenkreuz dar, nennen Sie besondere Eigenschaften und begründen Sie das asymptotische Verhalten für $x \to +\infty$.

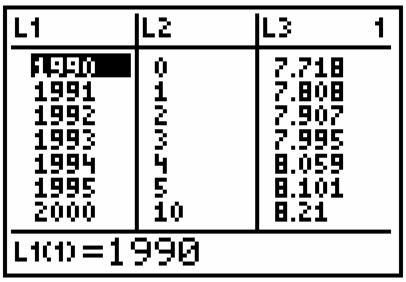
b) Das Rechteck mit den Eckpunkten (0/0), (10/0), (10/100) und (0/100) wird durch die Graphen aus a) in mehrere Flächenstücke unterteilt. Bestimmen Sie die zugehörigen Inhalte.

c) (I) Für die Bevölkerung Indiens gilt das folgende Wachstumsgesetz in Milliarden Einwohner:

$w(x) = 1{,}025 \cdot 1{,}0152^x \approx 1{,}025 \cdot e^{0{,}0151x}$

Das Jahr „0“ entspricht dabei dem Jahr 2002. Zeichnen Sie den Graphen und ermitteln Sie möglichst rechnerisch, in welchem Jahr Indien mehr als 1,5 Milliarden Einwohner haben wird.

(II) Die Bevölkerung Österreichs entwickelte sich in den Jahren zwischen 1990 und 2000 wie folgt:



L1	L2	L3 1
1990	0	7.718
1991	1	7.808
1992	2	7.907
1993	3	7.995
1994	4	8.059
1995	5	8.101
2000	10	8.21

L1(1)=1990

Abb. 1

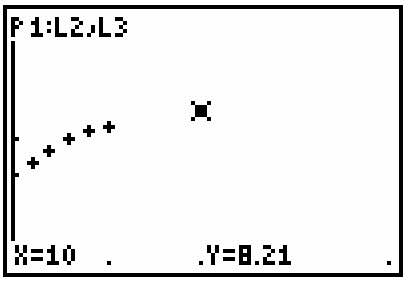


Abb. 2

Experten gehen davon aus, dass ein Wachstum über 8.25 Millionen Einwohner hinaus für Österreich nicht zu erwarten ist. Ermitteln Sie eine geeignete Wachstumsfunktion und den Prognosewert für 2010.

Vergleichen Sie die beiden Wachstumsprozesse in (I) und (II)!

d) Für eine bestimmte Tierart besteht in einem Tierpark „Lebensraum“ für 2000 Stück maximal. Die Vermehrung verläuft prozentual zur Differenz von Höchstgrenze und aktuellem Tierbestand mit 8%. Nur am Ende eines jeden Jahres wird für die Jagd das Revier freigegeben. 5% des aktuellen Bestandes werden erlegt. Der Anfangsbestand zu Beginn des Jahres 2000 war 1600 Tiere. Versuchen Sie den Vorgang iterativ so zu beschreiben, dass eine graphische Darstellung des Modells möglich wird. Deuten Sie den Graphen und vergleichen Sie mit c). Ändern Sie die Angabe „5%“ so ab, dass der Anfangstierbestand mindestens gehalten werden kann!

Lösungsskizze:

In a) und b) sollen die Grundtypen für exponentielles und beschränktes Wachstum dargestellt und begründet werden. Flächeninhalte werden mit Hilfe der Begrenzungslinien numerisch ermittelt. Es ergeben sich 4 Flächenstücke. Ein Fall (Fläche 2) wird hier exemplarisch dargestellt:

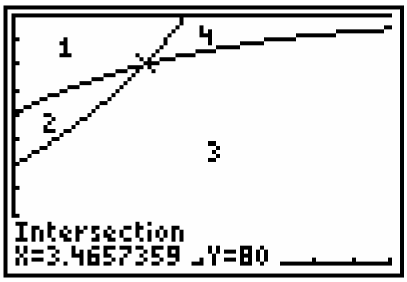


Abb. 3

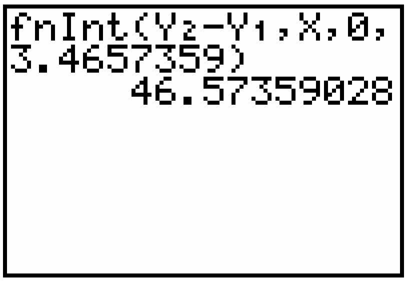


Abb. 4

Flächenstück 2 zwischen den beiden Graphen und der y-Achse:

$$\int_0^{3,47} (g(x)-f(x))dx = 46,57$$

c) (I)

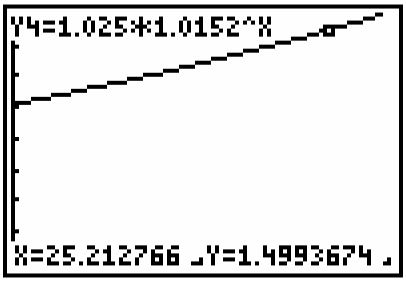
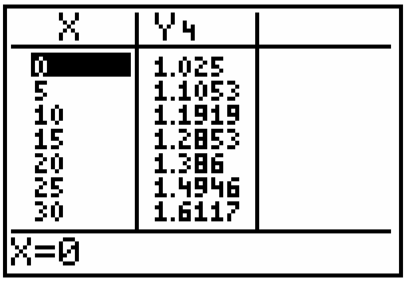


Abb. 5



X	Y4
0	1.025
5	1.1053
10	1.1919
15	1.2853
20	1.386
25	1.4946
30	1.6117

X=0

Abb. 6

Aus den Darstellungen kann man erkennen, dass der Zielwert 1.5 Milliarden nach etwa 25 Jahren erreicht wird, also 2027.

Rechnerisch:

$$1,5 = 1,025 \cdot e^{0,0151x} \Leftrightarrow$$

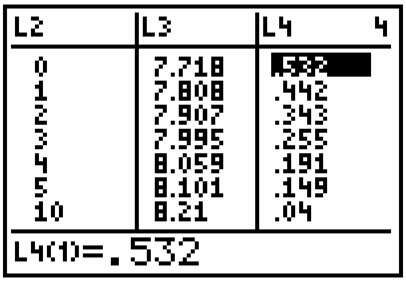
$$0,0151 \cdot x = \ln\left(\frac{1,5}{1,025}\right) \Leftrightarrow x = 25,22\cdots$$

(II)

Der Graph ist nach oben konvex gekrümmt und monoton steigend, die Bevölkerungszahl ist nach oben begrenzt durch die Angabe 8.25 Milliarden. Der Ansatz über beschränktes Wachstum scheint sinnvoll:

$$bsw(x) = 8,25 - a \cdot e^{kx} \Leftrightarrow 8,25 - bsw(x) = a \cdot e^{kx}$$

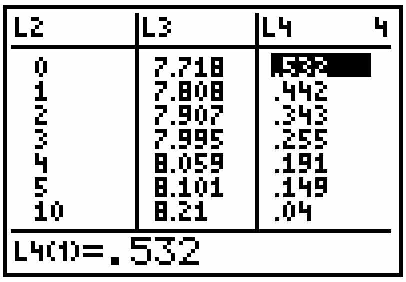
Es wird eine neue Liste L_4 erzeugt, die sich aus L_3 ergibt, in dem man von 8.25 die Werte aus der Liste L_3 abzieht. Auf L_2 und L_4 wird exponentielle Regression angewandt. Sie ergibt a = 0,558 und k=0,768.



L2	L3	L4 4
0	7.718	.532
1	7.808	.442
2	7.907	.343
3	7.995	.255
4	8.059	.191
5	8.101	.149
10	8.21	.04

L4(1)=.532

Abb. 7



L2	L3	L4 4
0	7.718	.532
1	7.808	.442
2	7.907	.343
3	7.995	.255
4	8.059	.191
5	8.101	.149
10	8.21	.04

L4(1)=.532

Abb. 8

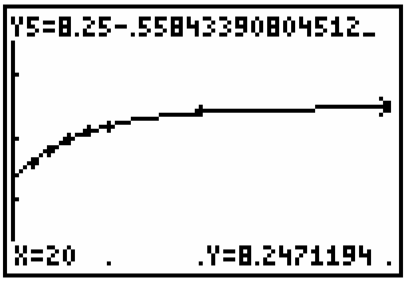


Abb. 9

Prognosewert für 2010

Die Methode ist anwendbar, wenn eine „sinnvolle Schätzung“ des Grenzwertes vorliegt.

d)

Der Prozess lässt sich iterativ beschreiben:

$$U_n = ((2000 - U_{n-1}) \cdot 0,08 + U_{n-1}) \cdot 0,95$$

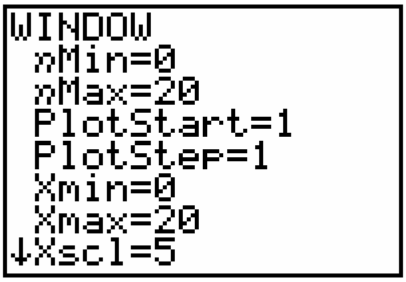


Abb. 10

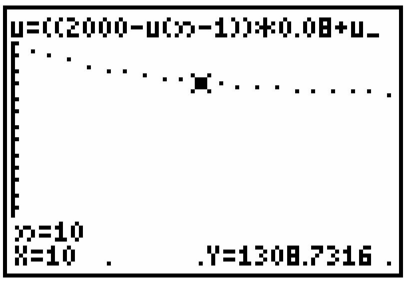


Abb. 11

n	u(n)
0	1600
10	1308.7
20	1233
30	1213.3
40	1208.2
50	1206.8
60	1206.5

n=0

Abb. 12

Es handelt sich im Vergleich zu c) um eine abnehmende Population. Der Graph fällt so lange, bis die Entnahme dem Zuwachs entspricht. Dazu wird der „Fixpunkt“ bestimmt.:

$$U_n = U_{n-1} = y \Leftrightarrow y = ((2000 - y) \cdot 0{,}08 + y) \cdot 0{,}95$$

$$\Leftrightarrow y = (160 + 0{,}92y) \cdot 0{,}95 \Leftrightarrow y = 152 + 0{,}874y$$

$$\Leftrightarrow 0{,}126y = 152 \Rightarrow y = 1206{,}349\cdots$$

Damit ist die Schranke nach unten gefunden!

Tierbestand bleibt erhalten:

$$U_n = U_{n-1} = 1600 \Leftrightarrow 1600 = (400 \cdot 0{,}08 + 1600) \cdot p$$

$$\Rightarrow p = 0{,}98039\cdots$$

Die Entnahme beträgt also im Grenzfall 100%-98,04%=1,96%

Ziel war es, Wachstumsprozesse mit unterschiedlichen Methoden und unterschiedlichen Ergebnissen mit Hilfe des GTR analysieren zu lassen. Einige Schüler/innen haben in c) auch Interpolation angewandt. Die Methode wurde aber nicht so hoch bewertet, weil nicht alle Messpunkte berücksichtigt werden.

Der Autor
Günter Heitmeyer
Parkstr. 6, D-31655 Stadthagen
Schule: Ratsgymnasium Stadthagen
email: GUENTER.HEITMEYER@t-online.de