Felix Geyer, Goetheschule Ilmenau

Die Eifunktion

Im Durchschnitt isst jeder Deutsche 212 Eier im Jahr. Aber wohl die wenigsten werden sich beim Verzehr des morgendlichen Frühstückseies schon gefragt haben, welche Funktionsgleichung sich hinter der Eiform verbirgt. Doch genau diese Fragestellung faszinierte mich, nachdem uns im Matheunterricht gegen Ende der 12. Klasse die Konstruktion einer „Eikurve“ mit Hilfe von Cabri Geometre gezeigt wurde.
Die Konstruktion einer „Eikurve“ geschieht wie folgt:
Zunächst wird ein Dreieck ABC gebildet, wobei A(0; 0) im Koordinatenursprung, B(b; 0) auf der x-Achse und C auf einem Kreis k_1 um B mit dem Radius r liege. Die Winkelhalbierende von $\angle BAC$ heiße w_A und die von $\angle CBA$ sei w_B. Sie schneiden sich im Punkt P. Bei geeigneten Verhältnissen von r und b (r = 6, b = 4) beschreibt die Spur von P bei Bewegung von C auf der Kreisbahn k_1 eine eiförmige Kurve, siehe Abbildung 1.

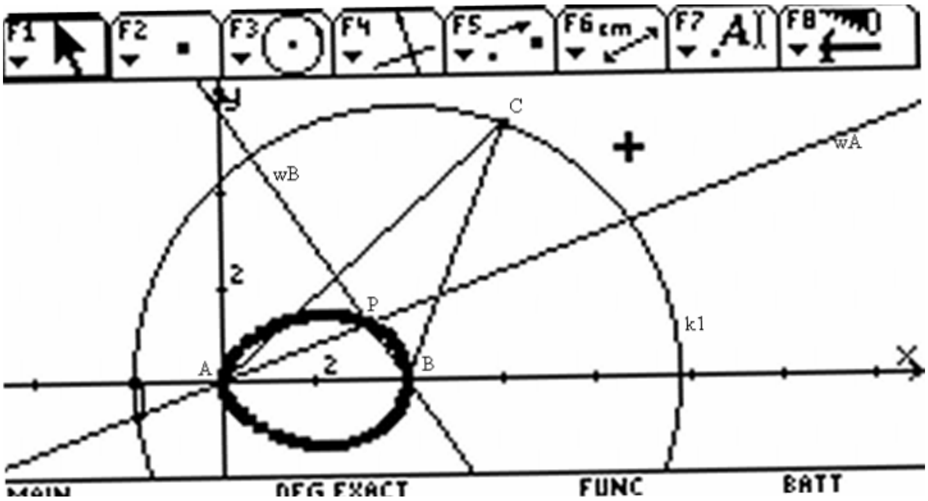

Abbildung 1: Konstruktion der Eikurve

Das Ziel ist die Erstellung einer Funktionsgleichung für die in Abbildung 1 dargestellte Spurkurve des Punktes P durch vektorielle Betrachtung.

Der Kreis k_1 wird durch folgende Gleichung beschrieben:

$$f(x) = \pm\sqrt{r^2 - (x-b)^2}\,. \tag{1}$$

Daraus erhält man für C die Koordinaten in Abhängigkeit von einem reellen Parameter t:

$$C\left(t, \pm\sqrt{r^2 - (t-b)^2}\right), \quad b - r \le t \le b + r, \quad t \in \Re\,. \tag{2}$$

Im nächsten Schritt müssen die Gleichungen der Geraden ermittelt werden, die durch die Dreiecksseiten verlaufen.

Gerade s_1 durch A und B:

$$s_1: \quad \vec{x} = \overrightarrow{0A} + m_1 \cdot \overrightarrow{AB} = m_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad m_1 \in \Re\,. \tag{3}$$

Gerade s_2 durch A und C:

$$s_2: \quad \vec{x} = \overrightarrow{0A} + m_2 \cdot \overrightarrow{AC} = m_2 \cdot \begin{pmatrix} t \\ \pm\sqrt{r^2 - (t-b)^2} \end{pmatrix}, \quad m_2 \in \Re\,. \tag{4}$$

Um den Richtungsvektor der Winkelhalbierenden w_A zu erhalten, müssen die Richtungsvektoren von s_1 und s_2 auf die Länge 1 normiert werden. Der Richtungsvektor von s_1 ist bereits normiert. Die Länge von s_2 beträgt:

$$\left|\begin{pmatrix} t \\ \sqrt{r^2-(t-b)^2} \end{pmatrix}\right| = \sqrt{t^2+r^2-(t-b)^2} = \sqrt{r^2-b^2+2bt}\,. \qquad (5)$$

Die Gleichung der Winkelhalbierenden w_A erhält man durch vektorielle Addition der normierten Richtungsvektoren der Geraden s_1 und s_2:

$$w_A:\quad \vec{x} = k\cdot\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{t}{\sqrt{r^2-b^2+2bt}} \\ \dfrac{\pm\sqrt{r^2-(t-b)^2}}{\sqrt{r^2-b^2+2bt}} \end{pmatrix}\right] = k\cdot\begin{pmatrix} \dfrac{t}{\sqrt{r^2-b^2+2bt}}+1 \\ \dfrac{\pm\sqrt{r^2-(t-b)^2}}{\sqrt{r^2-b^2+2bt}} \end{pmatrix},\quad k\in\Re\,. \qquad (6)$$

Um die Gleichung für die Winkelhalbierende w_B zu erhalten, wird analog vorgegangen. Gerade s_3 durch B und A und s_4 durch B und C:

$$s_3:\quad \vec{x} = \overrightarrow{0B} + m_3\cdot\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix}b\\0\end{pmatrix} + m_3\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix},\quad m_3\in\Re\,. \qquad (7)$$

$$s_4:\quad \vec{x} = \overrightarrow{0B} + m_4\cdot\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}b\\0\end{pmatrix} + m_4\cdot\begin{pmatrix} t-b \\ \pm\sqrt{r^2-(t-b)^2} \end{pmatrix},\quad m_4\in\Re\,. \qquad (8)$$

Die Länge des Richtungsvektors von s_4 entspricht dem Radius r. Die Gleichung der Winkelhalbierenden w_B lautet:

$$w_B:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix}b\\0\end{pmatrix} + i\cdot\begin{pmatrix} \dfrac{t-b}{r}-1 \\ \dfrac{\pm\sqrt{r^2-(t-b)^2}}{r} \end{pmatrix},\quad i\in\Re\,. \qquad (9)$$

Um die Koordinaten des Schnittpunktes P der Winkelhalbierenden zu ermitteln, muss man w_A und w_B gleichsetzen und nach einem Parameter, z.B. k, auflösen:

$$k\cdot\begin{pmatrix} \dfrac{t}{\sqrt{r^2-b^2+2bt}}+1 \\ \dfrac{\pm\sqrt{r^2-(t-b)^2}}{\sqrt{r^2-b^2+2bt}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b\\0\end{pmatrix} + i\cdot\begin{pmatrix} \dfrac{t-b}{r}-1 \\ \dfrac{\pm\sqrt{r^2-(t-b)^2}}{r} \end{pmatrix} \qquad (10)$$

Damit der TI das Gleichungssystem lösen kann, werden zunächst die Koordinatenterme der Richtungsvektoren durch die Variablen x_{WA}, y_{WA}, x_{WB} und y_{WB} ersetzt. Dieses verallgemeinerte Gleichungssystem lässt sich nun mit Hilfe der solve-Funktion nach k auflösen. Durch Rücksubstitution der Terme liefert der TI die Lösung der ursprünglichen Vektorgleichung.

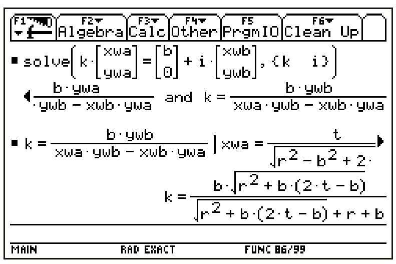

Abbildung 2: Lösung der Vektorgleichung

Durch Einsetzen in die Ursprungsgleichung erhält man die Koordinaten des gesuchten Schnittpunktes P und somit die parametrische Gleichung für den oberen und unteren Bogen des Eies.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{b \cdot \sqrt{r^2 + b\cdot(2t-b)}}{\sqrt{r^2 + b\cdot(2t-b)} + r + b} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{t}{\sqrt{r^2 - b^2 + 2bt}} + 1 \\ \dfrac{\pm\sqrt{r^2 - (t-b)^2}}{\sqrt{r^2 - b^2 + 2bt}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{b\cdot\left(\sqrt{r^2 + b\cdot(2t-b)} + t\right)}{\sqrt{r^2 + b\cdot(2t-b)} + r + b} \\ \dfrac{\pm b\cdot\sqrt{r^2-(t-b)^2}}{\sqrt{r^2 + b\cdot(2t-b)} + r + b} \end{pmatrix}. \quad \textbf{(11)}$$

Die Funktionsgleichung der Eikurve erzeugt man aus der Parametergleichung, indem man den Parameter t eliminiert. Dazu wird zunächst die Gleichung der x-Koordinate nach t umgestellt.

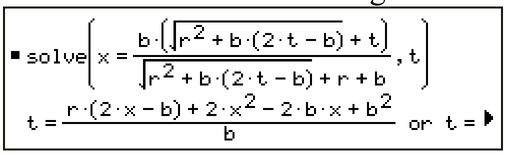

Abbildung 3: Umstellen der parametrischen Gleichung

Durch Einsetzen von t in die Gleichung der y-Koordinate gibt der Taschenrechner die gesuchten Funktionsgleichungen für den oberen und unteren Bogen des Eies an.

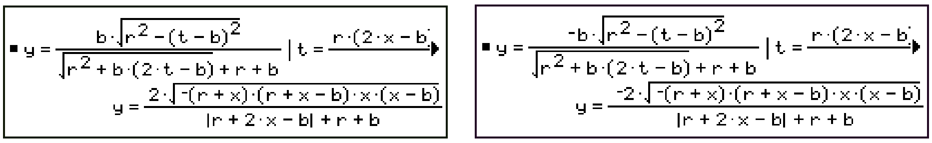

Abbildung 4: Funktionsgleichung des oberen und unteren Bogens des Eies

Die Korrektheit der Lösung wird durch die grafische Darstellung der Funktionsgleichungen überprüft.

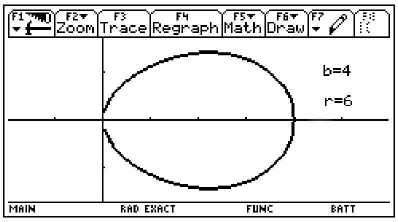

Abbildung 4: Probe

Bei genauerer Untersuchung der Funktion für verschiedene Kreisradien unter den Bedingungen $0 \le x \le b$, sowie $r \ge b$ und $r, b > 0$, stellt man fest, dass die Eiform einen Spezialfall darstellt.
Um eine umfassendere Vorstellung von dem Kurvenverlauf für beliebige Kreisradien zu bekommen, werden im Folgenden die beiden Grenzfälle $r \to \infty$ und $r = b$ betrachtet. Die Gleichung des unteren Bogens der Spurkurve für einen Radius, der gegen unendlich geht, sieht wie folgt aus:

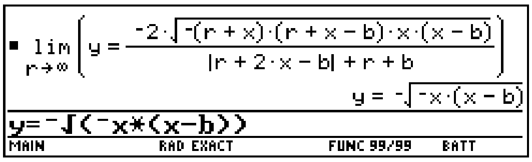

Abbildung 5: Grenzwert der Funktion

Nach wenigen Umformungsschritten erhält man diese Gleichung für beide Bögen der Kurve:

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2. \quad \textbf{(12)}$$

Hierbei handelt es sich um einen Kreis, mit dem Radius b/2 und dem Mittelpunkt (0; b/2) (siehe Abb. 7, dünn gezeichnete Kurve). Die Funktionsgleichung des unteren Bogens für den Spezialfall r = b hat folgende Form:

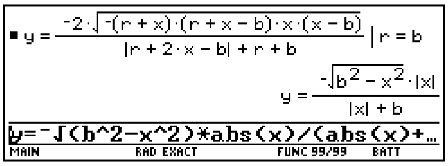

Abbildung 6: Grenzfall r = b

Der Graph hat eine blattähnliche Form (siehe Abb. 7, fett gezeichnete Kurve).

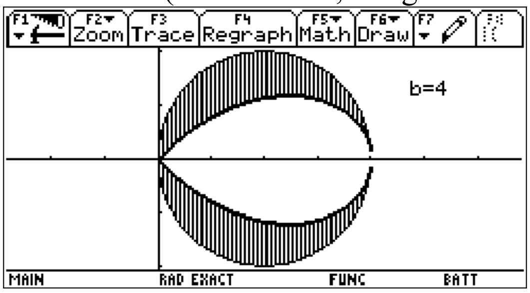

Abbildung 7: Grenzfälle r = b (dick) und r → ∞ (dünn)

Im schraffierten Bereich in Abb. 7 liegen alle Kurven der Funktionsschar. Mit wachsendem r wird die anfängliche Blattform (r = b) immer runder und geht in die Eiform über, wenn r ungefähr im Bereich von 1,5 b liegt. Nähert sich r an unendlich an, beschreibt die Spurkurve des Punktes P eine Kreisbahn.

Ausblick

Mit Hilfe der Eifunktion lässt sich das Volumen und die Oberfläche eines Eies als Rotationskörpers näherungsweise bestimmen. Außerdem ist es möglich, aus der Ebenengleichung eine Eiergleichung für den dreidimensionalen Raum zu erzeugen. Mit dieser könnte man dann das Ei als 3D-Objekt auf dem Computer erzeugen.

Felix Geyer
Baumbachstr. 8
D-98693 Ilmenau
E-Mail: Felix_Geyer89@yahoo.de