

# Das James-Webb-Teleskop im fachübergreifenden MINT-Unterricht

Veit Berger



Teachers Teaching with Technology™

## Das James-Webb-Weltraumteleskop und die Lagrange-Punkte

Am 25. Dezember 2021 wurde das James-Webb-Weltraumteleskop (engl. James Webb Space Telescope, abgekürzt JWST) mit einer Ariane-Rakete vom Raumfahrtzentrum Französisch-Guayana gestartet. Mit ihm sollen Beobachtungen erster leuchtender Objekte und Galaxien möglich werden, die bereits einige 100 Millionen Jahre nach dem Urknall entstanden sind. Diese müssen also in einer Entfernung von ca. 13,5 Mrd. Lichtjahren gesucht werden.

Wegen der kosmologischen Rotverschiebung des expandierenden Universums sowie der geringeren Streuung durch interstellare Gaswolken soll die Beobachtung im Rot- bzw. Infrarot-Bereich des Lichtes erfolgen. Die entsprechenden Wellenlängen liegen zwischen 600 nm und 28  $\mu\text{m}$ .

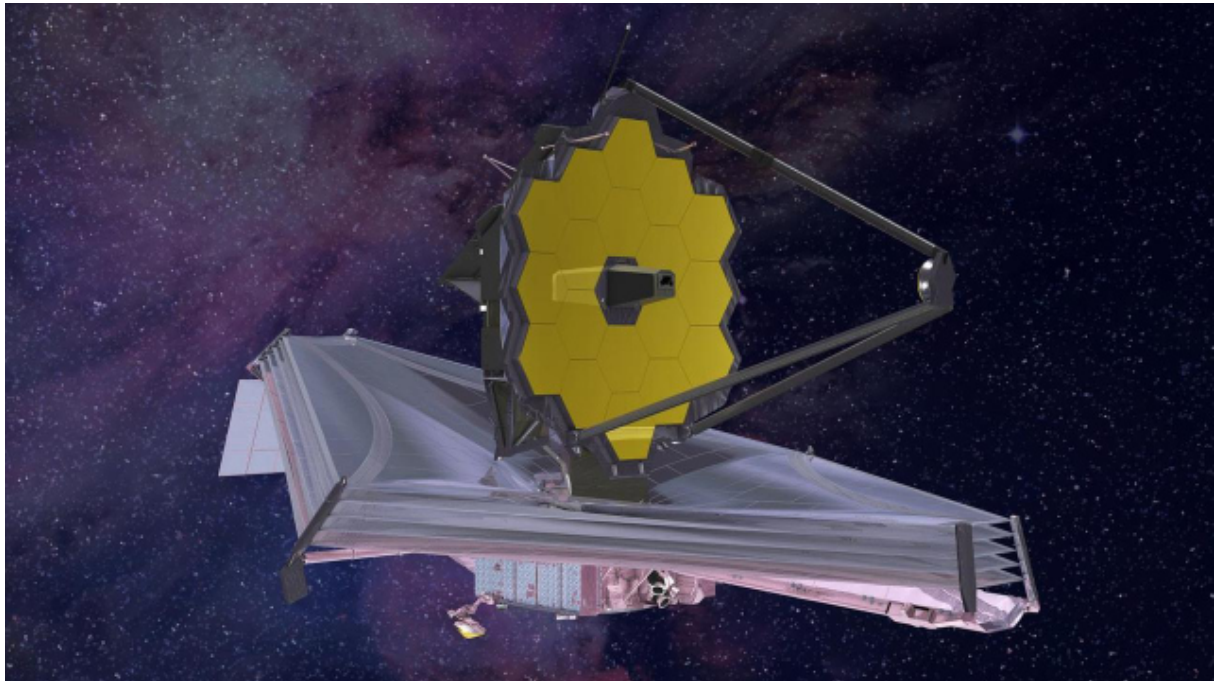
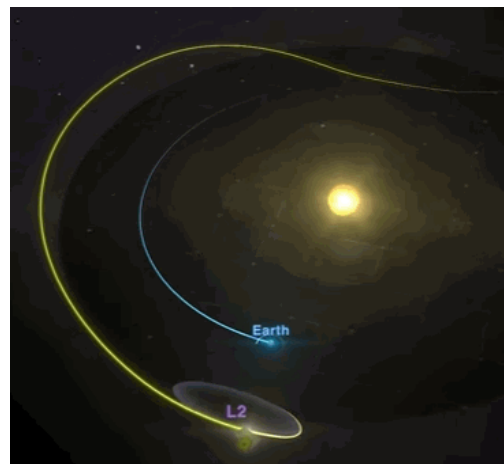
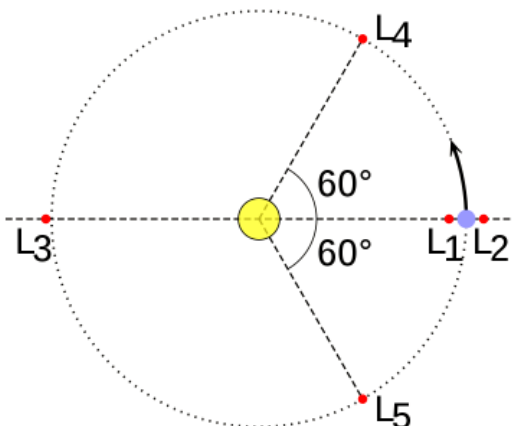


Illustration des James-Webb-Weltraumteleskops

Im System Sonne – Erde gibt es 5 Lagrange-Punkte, in denen kosmische Kleinstkörper und Satelliten kräftefrei sind. Die Lagrange-Punkte  $L_1$  bis  $L_3$  liegen auf der Verbindungslinie Sonne – Erde. Sie sind instabil, d.h. Abweichungen eines Kleinstkörpers längs dieser Verbindungslinie führen zu einer weiteren Abdrift. Dementgegen sind die Punkte  $L_4$  und  $L_5$  stabil. Sie befinden annähernd sich auf der auf der elliptischen Erdbahn. Alle 5 Lagrange-Punkte haben die Umlaufzeit der Erde.



Das James-Webb-Teleskop bewegt sich auf einer Halo-Umlaufbahn um den Lagrange-Punkt  $L_2$ .

Am 24. Januar 2022 erreichte das Teleskop seine geplante Umlaufbahn im etwa 1,5 Millionen Kilometer von der Erde entfernten Lagrange-Punkt  $L_2$ . Dieser befindet sich auf der sonnenabgewandten Seite im (dort kaum noch wahrnehmbaren) Erdschatten.

Es bewegt sich darüber hinaus auf einer sogenannten Halo-Umlaufbahn um den Lagrange-Punkt  $L_2$ . Hier lassen sich vor allen Dingen die störenden Infrarotstrahlungen von Erde und Sonne gleichermaßen sicher abschirmen. Wegen der Instabilität dieses Punktes sind jedoch ständige Bahnkorrekturen des Teleskops notwendig.

Aus den Beobachtungsergebnissen erhoffen sich die Astronomen ein besseres Verständnis für die Strukturbildungsprozesse in der sehr frühen Entwicklungsphase des Universums.

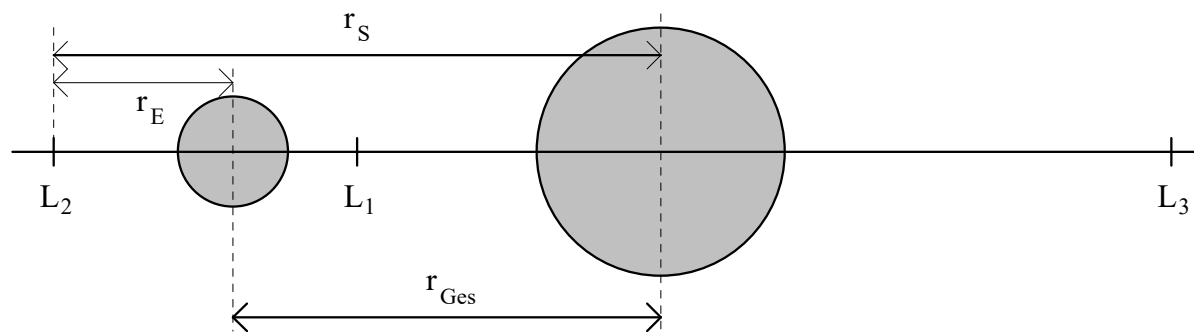
Aber auch die Suche nach Exoplaneten und ihre Eignung für mögliche Lebensformen soll fortgesetzt werden.<sup>[1]</sup>

### Die Position des Lagrange-Punktes $L_2$

Zunächst sollen folgende Vereinfachungen angenommen werden:

- Der Schwerpunkt des Systems Sonne – Erde liegt im Mittelpunkt der Sonne.
- Die Erde bewegt sich auf einer Kreisbahn um die Sonne.
- Die Masse eines Körpers im Punkt  $L_2$  ist deutlich kleiner als die Masse der Erde.
- Es gibt keine weiteren Störeinflüsse des Systems Sonne – Erde.

Die physikalischen Ansätze orientieren sich an der nachfolgenden Skizze:



Für kräftefreie Körper im Punkt  $L_2$  gilt:

Radialkraft = Gravitationskraft<sub>Erde/Sonne</sub>

$$F_r = F_E + F_S \quad (1)$$

$$m_K \cdot \frac{v_K^2}{r_S} = G \cdot \frac{m_E \cdot m_K}{(r_S - r_{Ges})^2} + G \cdot \frac{m_S \cdot m_K}{r_S^2} \quad (2)$$

$$\frac{v_K^2}{r_S} = G \cdot \frac{m_E}{(r_S - r_{Ges})^2} + G \cdot \frac{m_S}{r_S^2} \quad (3)$$

- G ... Gravitationskonstante
- $m_K$  ... Masse eines Körpers in  $L_2$
- $m_S$  ... Masse der Sonne
- $m_E$  ... Masse der Erde
- $v_K$  ... Bahngeschwindigkeit des Körpers

Der Lagrange-Punkt  $L_2$  hat die Umlaufzeit der Erde. Damit gilt:

$$T_E = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_S}{v_K} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_{Ges}}{v_E} \quad (4)$$

- $T_E$  ... Umlaufzeit der Erde
- $v_E$  ... Bahngeschwindigkeit der Erde

Aus den Gleichungen (3) und (4) folgt:

$$\frac{v_E^2 \cdot r_S}{r_{Ges}^2} = G \cdot \frac{m_E}{(r_S - r_{Ges})^2} + G \cdot \frac{m_S}{r_S^2} \quad (5)$$

Leider ist die Gleichung (5) für  $r_S$  nicht mehr elementar lösbar. Deshalb sollen numerische Näherungsverfahren genutzt bzw. entwickelt werden.

## Numerische Lösungen

Physikalisch repräsentiert die Gleichung (5) eine Bilanz von Beschleunigungen. Daraus soll eine stetige Funktion konstruiert werden, deren Nullstelle mit numerischen Näherungsverfahren bestimmt wird.

$$f(r) = G \cdot \frac{m_E}{(r - r_{Ges})^2} + G \cdot \frac{m_S}{r^2} - \frac{v_E^2 \cdot r}{r_{Ges}^2} \quad (6)$$

### 1. Näherungslösung in TI-Basic

Mit den physikalischen Konstanten sowie dem Funktionsterm aus Gleichung (6) wird die Funktion **beschl(r)** definiert. Deren Nullstelle kann anschließend mit dem **nSolve()**-Befehl ermittelt werden, wobei ein sinnvoller Startwert vereinbart werden muss.

Define **beschl(r)**=

Func

Local *me,ve,ms,rges,gr*

*me*:=5.97E24

*ms*:=1.989E30

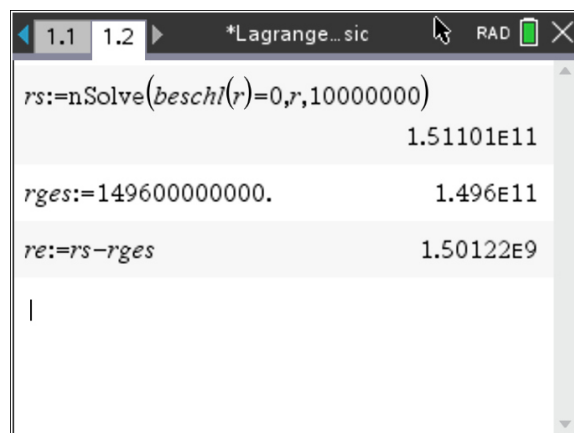
*rges*:=149600000000.

*gr*:=6.673E-11

*ve*:= $\sqrt{\frac{gr \cdot ms}{rges}}$

Return  $\frac{gr \cdot me}{(r - rges)^2} + \frac{gr \cdot ms}{r^2} - \frac{ve^2 \cdot r}{rges^2}$

EndFunc



Der ermittelte Abstand des James-Webb-Teleskops von der Erde stimmt mit  $1,501 \cdot 10^9 \text{ m} = 1,501 \cdot 10^6 \text{ km}$  recht gut mit dem aktuellen Erwartungswert überein.

### 2. Näherungslösungen in Python

Zunächst soll auch hier die Beschleunigung als Funktion definiert werden:

```
from math import sqrt

def beschl(r):
    me = 5.97e+24
    ms = 1.989e+30
    rges = 149.6e+09
    gr = 6.673e-11
    ve = sqrt(gr * ms / rges)
    return gr * me / (r - rges)**2 + gr * ms / r**2 - ve**2 * r / rges**2
```

In Python steht ein zum **nSolve()**-Befehl vergleichbares Werkzeug nicht zur Verfügung. Deshalb soll eine Nullstellensuche nach dem Intervallhalbierungsverfahren implementiert werden. Dazu muss vorausgesetzt werden, dass die übergebene Funktion stetig ist und die Funktionswerte an den Intervallgrenzen [li; re] entgegengesetzte Vorzeichen besitzen.

Algorithmus:

- Bestimme den Mittelpunkt  $m$  des Intervalls  $[li; re]$ .
- Ist die Differenz der Intervallgrenzen kleiner als  $\epsilon$ , dann gib  $m$  als Näherungswert der Nullstelle zurück.
- Anderenfalls prüfe, ob die Funktionswerte an den Grenzen des Teilintervalls  $[li; m]$  entgegengesetzte Vorzeichen besitzen.
- Ist dies der Fall, setze die Nullstellensuche im Teilintervall  $[li; m]$  fort, anderenfalls im Teilintervall  $[m; re]$ .

Mit diesem sogenannten Teile-und-Herrsche-Algorithmus (Divide-and-conquer-Algorithmus) ist die Nullstellensuche sehr (zeit-)effizient. Sie kann sowohl iterativ als auch rekursiv implementiert werden:

iterativ	rekursiv
<pre>def nst_it(lt, rt):     eps = 1e+5     m = (lt + rt) / 2     while abs(rt - lt) &gt; eps:         if beschl(lt) * beschl(m) &lt;= 0:             rt = m         else:             lt = m         m = (lt + rt) / 2     return m</pre>	<pre>def nst_rek(lt, rt):     eps = 1e+5     m = (rt + lt) / 2     if abs(rt - lt) &lt; eps:         return m     else:         if beschl(lt) * beschl(m) &lt;= 0:             return nst_rek(lt, m)         else:             return nst_rek(m, rt)</pre>

Zunächst sollen sinnvolle Intervallgrenzen festgelegt werden, mit denen die oben angeführte Beschleunigungsfunktion entgegengesetzte Vorzeichen liefert:

```
rges = 149.6e+09
li = rges + 1e+07
re = 2 * rges
print (beschl(li))
print (beschl(re))
```

```
*Lagrange...tiv  RAD  X
Python-Shell 5/5
>>>#Running Lagrange_L2_it.py
>>>from Lagrange_L2_it import *
3.983779810804236
-0.01037839091060564
>>>|
```

Damit können sowohl die iterative als auch die rekursive Nullstellensuche zur Anwendung kommen:

```
rges = 149.6e+09
li = rges + 1e+07
re = 2 * rges
rs = nst_rek(li, re)
re = rs - rges
print("Position des Punktes L2")
print("Sonnenabstand in Mio. km:", \
round(rs / 1e+09, 3))
print("Erdabstand in Mio. km:", \
round(re / 1e+09, 3))
```

```
*Lagrange...siv  RAD  X
Python-Shell 6/6
>>>#Running Lagrange_L2_rek.py
>>>from Lagrange_L2_rek import *
Position des Punktes L2
Sonnenabstand in Mio. km: 151.101
Erdabstand in Mio. km: 1.501
>>>|
```

Auch hier besteht die Übereinstimmung zum Erwartungswert von  $1,5 \cdot 10^6$  km für die Entfernung des Teleskops von der Erde. An diesem konkreten Beispiel bestätigt sich die Eignung der Nullstellensuche durch Intervallschachtelung.

**Hinweis:** Im Dokument "Lagrange Sonne-Erde.pdf" können die Berechnungen zu den Lagrange-Punkten  $L_1 - L_3$  nachvollzogen werden. Es wurde mit dem CAS Mathcad erstellt und beinhaltet ebenfalls den rekursiven Algorithmus zur Nullstellensuche.

### Zusammenfassung

Die erfolgreiche Platzierung des James-Webb-Teleskops im Lagrange-Punkt  $L_2$  sowie erste optimistisch stimmende Funktionstests lassen auf großartige Beobachtungsergebnisse hoffen. Damit bietet sich die Thematisierung im MINT-Unterricht regelrecht an.

Schülerinnen und Schüler der gymnasialen Oberstufe sollten keine Probleme haben, die physikalischen Ansätze zur Positionsbestimmung des Teleskops nachzuvollziehen. Mit der Erkenntnis, dass eine elementare Lösung der aufgestellten Gleichung nicht möglich ist, erfolgt ein Beitrag zur Kompetenzentwicklung, zur Verfügung stehende Lösungswerkzeuge auszuwählen und anzuwenden. Die Möglichkeit, ein solches Werkzeug adäquat nachzubilden und mit gleichem Erfolg anzuwenden, soll den Schülerinnen und Schülern einmal mehr zeigen, dass die im Informatikunterricht thematisierten Algorithmen nicht dem Selbstzweck dienen, sondern vielfältige praktische Anwendungsmöglichkeiten zulassen. Schließlich lassen sich die Ergebnisse auch mit einer visuellen Methode zum Auffinden des Lagrange-Punktes  $L_2$  vergleichen, die unter

[https://resources.t3europe.eu/t3europe-home?resource\\_id=3487](https://resources.t3europe.eu/t3europe-home?resource_id=3487) angeboten wird.

### Bildnachweise:

James-Webb-Teleskop, S. 2: Northrup Grumman / NASA

Lagrange-Punkte, S. 2:

<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1639194>

Animation der Umlaufbahn des JWST, S. 2:

<https://webb.nasa.gov/content/about/orbit.html>

### Quelle:

[1] <https://de.wikipedia.org/wiki/James-Webb-Weltraumteleskop>



Teachers Teaching with Technology™